

壓縮性 흙의 壓密에 대한 數值解析

—多層土를 中心으로—

Numerical Analysis for Consolidation of Compressible Soils

金 八 圭*

Kim, Pal Kyu

宋 容 善**

Song, Young Sun

李 桓 基***

Lee, Hwan Ki

ABSTRACT

Occasionally it is used for simple extensions of Terzaghi's theory to account for time-dependent loading but there is little evidence of application in more complicated consolidation theories that take into account such effects as nonlinear stress-strain, layered systems or large strains.

The purpose of this paper provides an efficient computer algorithm based on numerical analysis using finite difference method which account for multi-layered soils to determine the degree of consolidation and excess pore pressures relative to time and positions more realistically. The explicit scheme of solving the consolidation equations has been investigated from the point of view of the stability conditions and the convergence with variance of the operator as well as to obtain an optimal divided depth ratios of total depth.

A comparison of the settlement predictions with both the classical analysis and the algorithm based on numerical analysis indicates that the new algorithm scheme is found to be superior to the classical theory in the layered soils.

要 旨

壓縮性 흙에 대한 壓密沈下の 數值解析 연구는 이제까지 Terzaghi의 壓密論을 간단히 확장하여 사용해 왔다. 그러나 非線形 應力-變形관계, 多層土, 큰 變形의 문제를 고려한 보다 복잡한 문제를 壓密論에 적용한 예는 거의 없었다.

本 研究의 目的은 壓縮性 흙에서도 多層土를 中心으로 時間과 位置에 따른 壓密度와 過剩間隙水壓을 보다 실제적인 조건에 부합되도록 하기 위하여 有限差分法을 사용한 數值解析을 근거로 有用한 컴퓨터 알고리즘을 開發하는 데 있다. 壓密式을 解析하는 Explicit Scheme 이 전체 깊이에 대한 最

*正會員·忠南大學校 工科大學 教授

**正會員·忠南大學校 大學院 博士過程

***産業基地開發公社建設 2部 係長

適分割 깊이率과 아울러 Operator의 變化에 따른 安定條件과 收斂의 觀點에서 研究되었다.

沈下의 예측에 대해 전통적인 解析과 數值解法에 기초를 둔 개발된 알고리즘으로부터 새로운 알고리즘은 壓縮性 흙에 있어 전통적인 理論보다 우수한 것으로 闡명되었다.

1. 序 論

粘土地盤에서의 外部荷重에 의한 沈下는 砂質土에서와는 달리 荷重後 오랜 시간에 걸쳐 일어난다. 실제로 荷重의 作用은 2,3次元 壓密을 제외하고라도 地盤의 非均質性(Nonhomogeneous)과 시간—의존성, 應力—變形의 非線形性, 自重의 문제 時間중속적인 境界條件, 2次壓密 등의 복잡한 요소 때문에 정확한 壓密解析은 매우 힘들다. (1) 그러나 이제까지는 주로 有效應力의 개념에 근거를 둔 Terzaghi의 전통적인 壓密論에 의해 解析되어 왔다. 따라서 粘土地盤에서의 基礎工學的 문제를 합리적으로 해결하기 위해서는 地盤 내의 物理的 特性的 精確한 이해에 따른 壓密解析의 연구가 필요하다.

본 연구는 이러한 노력으로서 1次元의 多層土의 壓密解析을 위한 일반화된 數值解法의 알고리즘을 개발하고자 했다. 有限差分法(Finite Difference Method)에서도 安定條件만 제외한다면 가장 경제적인 Explicit Scheme에 근거를 두어 壓密方程式을 解析하고 多層土의 境界面에서는 흐름의 連續性을 응용하여 Scheme을 수정함으로써 시간 및 위치에 따르는 間隙水壓을 구하였다.

주된 문제가 되는 安定性的 條件과 收斂度를 검토하고 解析의 方法에 의한 결과와 비교하여 精度(Accuracy)와 경제성을 고려한 합리적인 格點數를 검토하였으며, 格點間隔은 土層의 物理的 特性에 따르는 安定 조건에 의해 層別로 각각 다르게 分割되었다. 地盤의 土性, 初期條件 및 境界條件의 入力은 物理適用에 적합하도록 프로그램이 設計되었다.

2. Explicit Scheme에 의한 壓密解析

2.1. 有限差分法

土層의 單位要素로부터 間隙水의 流出量과 時

間에 따르는 土層의 體積變化量이 같다고 두었을 때 Terzaghi의 1次元壓密方程式은 다음과 같다. (2)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = C_u \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \dots\dots(1)$$

여기서

u ; 過剩間隙水壓

t ; 時間

z ; 位置(깊이)

C_u ; 壓密係數

數值解法에 의한 壓密解析은 式(1)의 時間, 位置 및 過剩間隙水壓의 3次元面의 解析으로 고려할 수 있으며 Fig. 1에서와 같은 Operator를 적용할 때 式(1)은 다음의 差分方程式으로 대체될 수 있다.

$$\frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\Delta t} = C_u \frac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j}{\Delta z^2} \dots\dots(2)$$

그리고 다음의 回歸方程式을 얻게 된다.

$$u_i^{j+1} = \alpha u_{i+1}^j + (1 - 2\alpha)u_i^j + \alpha u_{i-1}^j \dots\dots(3)$$

여기서

$$\alpha = C_u \frac{\Delta t}{\Delta z^2}$$

式(3)은 주어진 初期條件과 境界條件에 의해 時間과 位置에 따르는 過剩間隙水壓의 解析面 전체를 완성하게 된다.

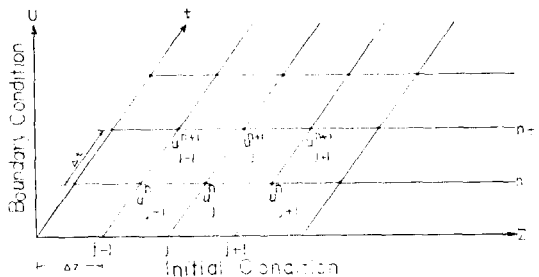


Fig. 1. Finite Difference Mesh

2.2. 安定度와 收斂度

數值解法의 기본형태는 $\partial f/\partial s$ 와 같은 微分을 $\Delta f/\Delta s$ 의 差分으로 대체시키는 것이므로 安定과

收斂의 조건을 만족시켜야 한다. 安定度는 Round-off 등으로 생긴 오차가 시간에 따라 확장되지 않는 것을 나타내며 收斂度는 有限差分으로 나누어 계산함에 따른 오차의 크기를 나타낸다.

Difference Scheme의 安定度는 다음 식과 같은 Fourier級數에 의한 解를 기초로 한 線形安定性을 검토함으로써 구명된다.

$$u_j^n = \sum_k \xi_k^n \exp(ikmj\Delta z) \quad \dots\dots(4)$$

여기서

$l = jj\Delta z$; 計算領域

m ; π/l

ξ ; Fourier係數

k ; Wave Number

式(4)의 한 要素를 式(3)에 代入하면 다음의 관계를 얻는다.

$$\xi^{n+1} = A\xi^n \quad \dots\dots(5)$$

여기서

$$A = 1 - 4\alpha \sin^2 \frac{k\pi\Delta z}{2l}$$

Scheme의 安定條件은 Amplification factor A의 절대값이 1보다 같거나 작아야 한다는 조건⁽⁵⁾에서 $\alpha \leq \frac{1}{2}$ 의 安定條件을 얻는다.

한편 式(1)을 Taylor級數에 따라 展開하면

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= C_v \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + C_v \left[2 \frac{\partial^4 u}{\partial z^4} \frac{\Delta z^2}{4!} \right. \\ &\quad - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \frac{\Delta t}{2!} + 2 \frac{\partial^6 u}{\partial z^2} \frac{\Delta z^4}{6!} \\ &\quad \left. - \frac{\partial^4 u}{\partial t^3} \frac{\Delta t^2}{3!} + \dots\dots \right] \\ &= C_v \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + 0[\Delta t, \Delta z^2] \quad \dots\dots(6) \end{aligned}$$

의 관계를 얻게되어 Δt 와 Δz 가 0(영)으로 收斂함에 따라 어떤 경우에도 式(2)는 式(1)로 收斂함을 알 수 있으며 切斷誤差(Truncation error)는 $0[\Delta t, \Delta z^2]$ 이다.⁽⁴⁾

한편, 다음 式(7)을 式(6)에 代入하면 式(8)에서 切斷誤差는 $\alpha = \frac{1}{6}$ 일 때 $0[\Delta t^2, \Delta z^4]$ 이 되어 有限差分식의 計算결과가 참값에 더 빨리 收斂하게 된다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial t} \left(C_v \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) = C_v \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) \\ &= C_v \frac{\partial^4 u}{\partial z^4} \quad \dots\dots(7) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= C_v \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial z^4} \cdot \frac{C_v \Delta z^2}{2} \left(\frac{1}{6} - \alpha \right) \\ &\quad + C_v \left[2 \frac{\partial^6 u}{\partial z^6} \frac{\Delta z^4}{6!} - \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} \frac{\Delta t^2}{3!} \right. \\ &\quad \left. + \dots\dots \right] \\ &= C_v \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial z^4} \cdot \frac{C_v \Delta z^2}{2} \left(\frac{1}{6} - \alpha \right) \\ &\quad + 0[\Delta z^4, \Delta t^2] \quad \dots\dots(8) \end{aligned}$$

또한, 安定性 검토에 따르는 Amplification factor는 數值解法에 따른 分散度의 측정이 된다.

2.3. 境界條件

多層土의 境界層에서는 土性의 변화에 따라 間隙水壓의 不連續性이 나타나므로 Fig. 2에서의 각 土層에서 間隙水의 流出量과 時間에 따른 土層의 休積變化量이 같다는 조건외에 境界層에서의 흐름은 連續으로 처리한다.⁽⁵⁾

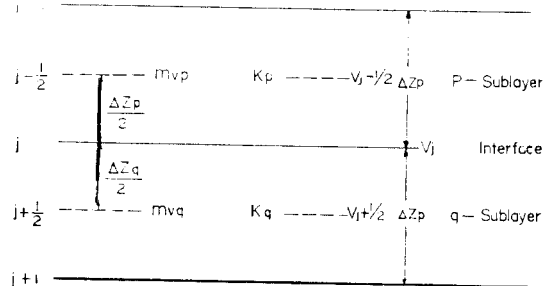


Fig. 2. Notation used in determining finite Difference expressions at layer interface.

土層 P에서

$$V_{j-1/2} - V_j = m_{vp} \frac{\Delta z_p}{2} \frac{\partial u}{\partial t} \quad \dots\dots(9)$$

토층 q에서

$$V_j - V_{j+1/2} = m_{vq} \frac{\Delta z_q}{2} \frac{\partial u}{\partial t} \quad \dots\dots(10)$$

여기서 V는 單位流量으로서

$$\left. \begin{aligned} V_{j-1/2} &= -k_p \frac{\partial u}{\partial z} = k_p \frac{u_{j-1} - u_j}{\Delta z_p} \\ V_{j+1/2} &= -k_q \frac{\partial u}{\partial z} = k_q \frac{u_j - u_{j+1}}{\Delta z_q} \end{aligned} \right\} \dots\dots(11)$$

여기서

k ; 透水係數

m_v ; 體積變化率

式(9)와 式(10)을 결합하여 式(11)에 代入하고 Explicit Scheme 을 적용하면 式(12)가 얻어지게 된다.

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \frac{2\Delta t}{m_{op}\Delta z_p + m_{oq}\Delta z_q} \left\{ -\frac{k_p}{\Delta z_p}(u_{j-1}^n - u_j^n) + \frac{k_q}{\Delta z_q}(u_{j+1}^n - u_j^n) \right\} \dots\dots(12)$$

外部境界面이 自由排水面이면 $t > 0$ 에서 $u = 0$ 이며, 不透水層인 경우에는 Darcy의 법칙에서 $\partial u / \partial z = 0$ 을 만족시키기 위하여 境界面 밖에 가상 的 格點을 두어 수정한다.

$$\frac{u_{jj+1} - u_{jj-1}}{2\Delta z} = 0 \text{에서 } u_{ii+1} = u_{jj-1}$$

$$\text{즉 } u_i^{n+1} = 2\alpha u_{i-1}^n + (1-2\alpha)u_i^n$$

初期條件은 $t=0$ 에서의 u 값으로 나타내며 계산의 시작점에서 初期條件과 境界條件이 相值되는 경우 즉 境界條件이 순간적으로 바뀌는 경우에는 Implicit 한 방법으로 두 값의 平均値를 취한다.

3. 數值解法의 應用과 結果分析

3.1. 프로그램의 설계

Explicit Scheme 技法에 의한 多層土의 壓密沈下解析 프로그램이 設計되었다. 주요한 Output 은 時間에 따른 平均 壓密度와 時間 및 길이別 過剩間隙水壓의 分布이다. 프로그램의 개략적인 흐름도는 Fig. 3과 같다.

3.2. 過剩間隙水壓

Fig. 4는 $t=1000$ days에서 過剩間隙水壓의 分布를 移動座標에 나타낸 것이다. 載荷荷重은 각각 $1t/m^2$, $10t/m^2$ 인 경우이며 종래의 壓密理論은 실선으로 표시되어 있다. 주어진 時間에서 載荷荷重에 대한 過剩間隙水壓의 比는 종래의 壓密理論에 의한 결과보다 대체로 크게 나타나며 荷重이 클수록 뚜렷하다. 이것은 荷重의 영향이 상대적으로 크기 때문으로 판단된다. 즉 종래의 壓密理論에서는 過剩間隙水壓을 작게, 따라서 有效應力이 크게 해석될 수도 있다. 地盤의 安定에 영향을 주는 剪斷強度 등은 有效應力에 따라

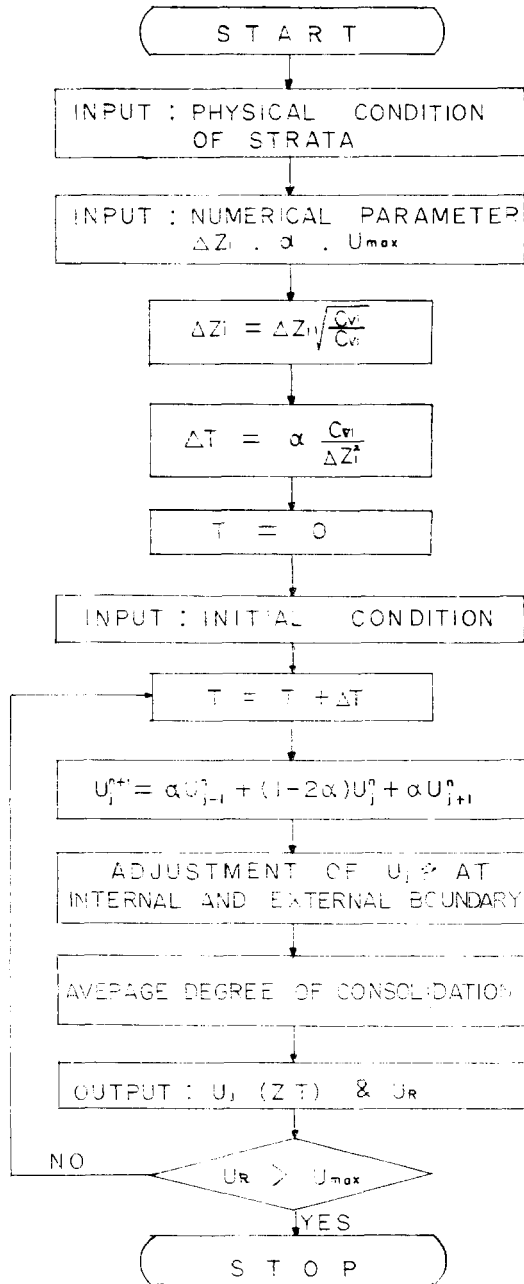


Fig. 3. Flow Chart

증가하므로⁽¹¹⁾ 전통적인 壓密理論에 따르면 위험한 基礎設計를 할 가능성이 있다.

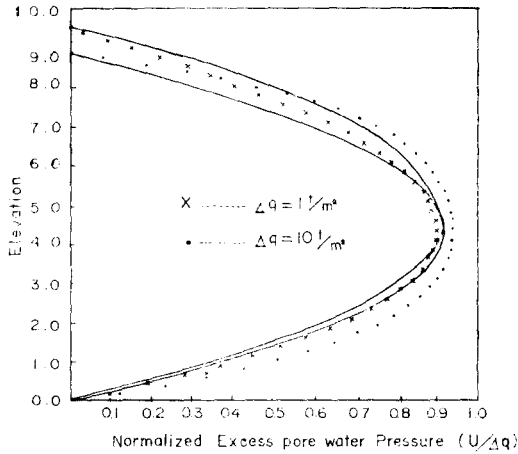


Fig. 4. Comparison of Excess pore water pressure isochrones ($t=1000$ days)

3.3. 數値解法の精度

數値解法の精度를 검증하기 위하여 數値解法の係數들을 여러가지로 변화시켜 그 銳敏度를 고찰하였다. 土層은 片面排水의 均質土로 初期條件은 單位間隙水壓을 주었으며 변화는 $\alpha(11/20 \sim 1/8)$ 와 $H/\Delta Z(20 \sim 2)$ 로 하였다.

Fig. 5는 $\alpha=11/20 > 0.5$ 인 경우의 Isochrone을 나타내며 계산이 不安定하고 時間이 경과함에 따라 誤差가 增幅됨을 보여준다.

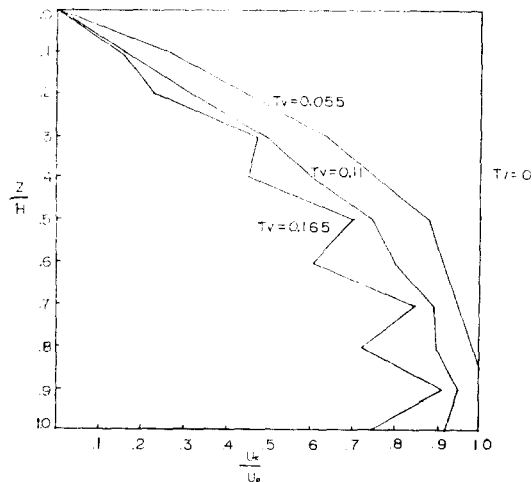


Fig. 5. Isochrone ; $\alpha=0.55$

Fig. 6은 α 의 변화에 따른 時間別 平均壓密度를 나타내며 數値解法の 결과는 α 의 變化에 큰

영향을 받지 않으며 解析의 方法에 의한 결과와 거의 일치함을 알 수 있다.

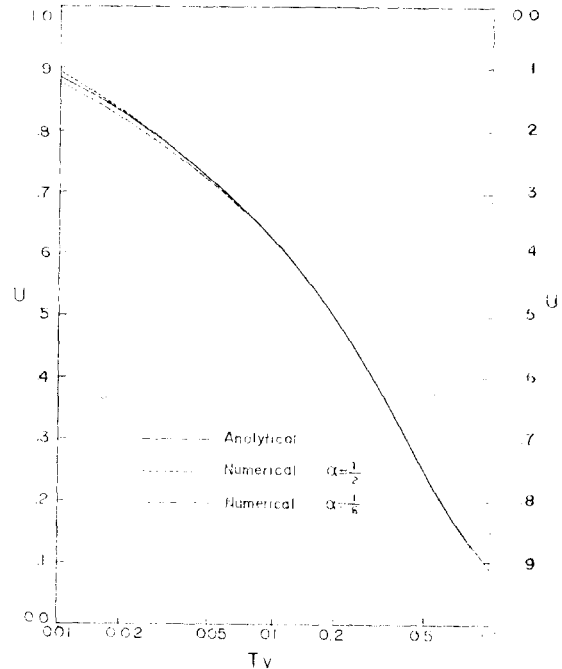


Fig. 6. Influence of α on average degree of Consolidation; $H/\Delta Z=10$

반면에 Fig. 7에서 보는 바와 같이 깊이 分割率($H/\Delta Z$)의 변화에 따라서는 계산결과가 크게 달라진다. $H/\Delta Z$ 가 커질수록 解析의 結果에 급속도로 收斂하여 $H/\Delta Z=10$ 에서는 만족스러운 결과가 나타났으며 $H/\Delta Z=20$ 으로 ΔZ 를 細分하는 경우는 解析의 結果와의 誤差가 거의 없음을 알 수 있다. 그러나 동일한 α 에서 ΔZ 를 細分하면 계산의 노력 즉 電算機 사용시간은 거의 $H/\Delta Z$ 의 제곱에 比例한다는 것을 주의해야 한다.

또한 점(·)으로 표시된 $H/\Delta Z=2$ 의 경향에서 알 수 있는 바와 같이 결과의 정확도를 고려할 때, Δt 가 壓密初期에는 너무 크게 後期에는 너무 작게 채택되었음을 보여준다. 이것은 安定條件을 만족시키기 위해서는 계산에서 얻는 豫測值의 精度에 관계없이 Δt 를 일률적으로 취해야 한다는 Explicit Scheme의 큰 短點이라 할 수 있다.

실제로 數値解法 結果의 精密度는 잘 設計된

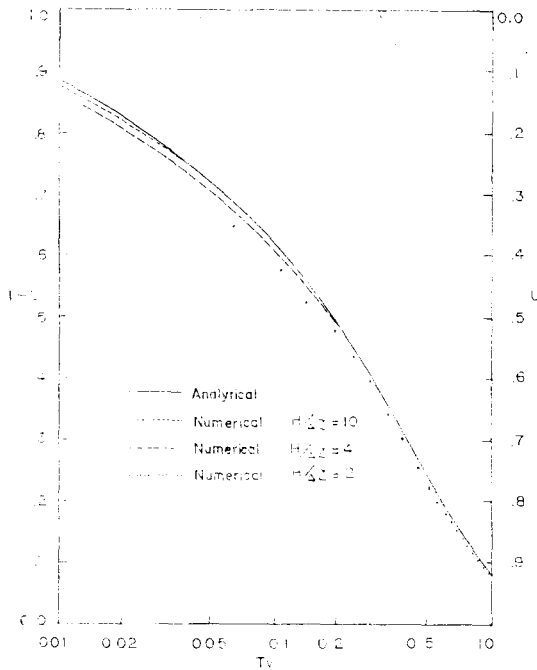


Fig. 7. Influence of $H/\Delta Z$ on average degree of Consolidation ; $\alpha=1/6$

프로그램에서 계산의 노력과 相値되는 것으로서 Fig. 8은 $H/\Delta Z$ 의 변화에 따른 數值解法 結果

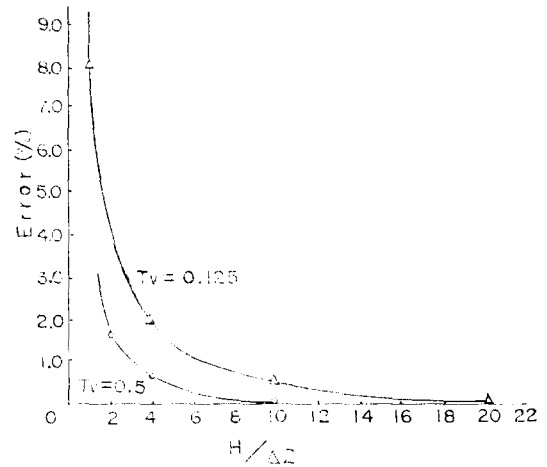


Fig. 8. Magnitude of error in relation to $H/\Delta Z$; $\alpha=1/6$

의 일치함을 알 수 있다.

3.4. 多層土에의 적용

Fig. 9에서와 같이 3개의 層으로 이루어진 土層의 壓密進行過程을 계산하여 總樑의 平均値法에 의한 結果와 비교하였다. 土層의 平均壓密係數 \bar{C}_v 는 다음 式으로 구해 진다.

Table 1. Isochrone Comparison

Z/H	$T_1=0.015$		$T_1=0.2$		$T_1=0.5$	
	analytical	numerical	analytical	numerical	analytical	numerical
0.1	.43630	.43750	.12387	.12383	.05801	.05795
0.2	.75179	.75000	.24425	.24427	.11458	.11448
0.3	.91674	.93750	.35783	.35793	.16834	.16817
0.4	.97908	1.00000	.46165	.46205	.21795	.21775
0.5	.99611	1.00000	.55378	.55386	.26219	.26193
0.6	.99947	1.00000	.64940	.63157	.29997	.29970
0.7	.99995	1.00000	.69181	.69334	.33037	.33004
0.8	1.00000	1.00000	.73633	.73828	.35263	.35231
0.9	1.00000	1.00000	.76329	.76545	.36621	.36585
1.0	1.00000	1.00000	.77231	.77460	.37078	.37044

의 收斂度를 나타낸다. 壓密에 따르는 물리적 性質이 아직도 기초 연구단계에 있다는 점을 감안할 때 $H/\Delta Z$ 의 권장되는 한계는 5~10이라 할 수 있다.

Table 1에서 $H/\Delta Z=10$, $\alpha=1/2$ 의 경우에 대한 Isochrone은 解析的 方法에 의한 結果와 거

$$\bar{C}_v = \frac{\left(\sum_{i=1}^n H_i \right)^2}{\left(\sum_{i=1}^n \frac{H_i}{\sqrt{C_{vi}}} \right)^2}$$

여기서

H_i ; i 번째 層의 두께

C_{vi} ; i 번째 層의 壓密係數

n ; 층 수

Fig. 9는 시간에 따른 Isochrone 을 비교 표시 한 것으로 깊이에 따른 간층수압 分布의 차이를 나타내고 있다.

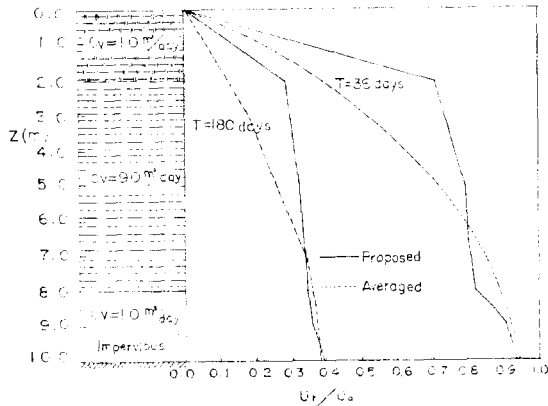


Fig. 9. Isochrone of multi-layered Subsoil

본 연구에서 제안된 Scheme 과 종래의 平均值法에 의한 壓密度를 Fig. 10에 나타냈으며 平均值法에 의하는 경우 계산결과의 誤差는 실제와 크게 差를 알 수 있다. 즉 層의 構成關係를 무시한 平均值法보다는 실제의 土層상태를 재현 할 수 있는 多層土의 數值解法이 아주 효과적이다.

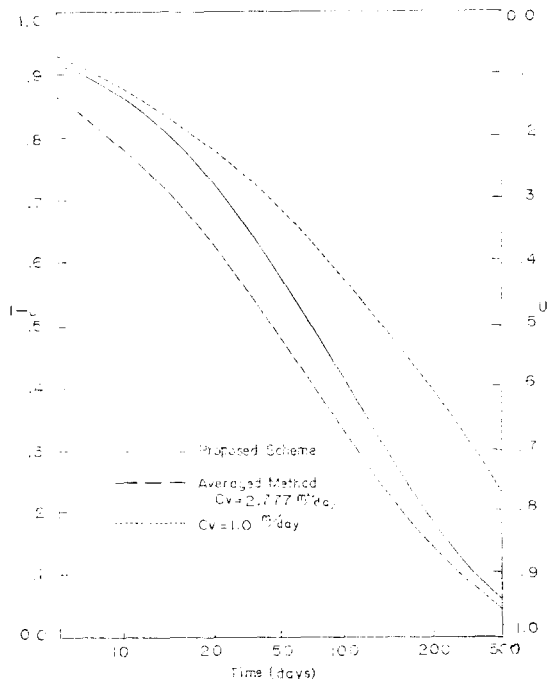


Fig. 10. Average degree of Consolidation

실제로 數值解法의 係數의 변화에 따라서는 壓密解析의 結果가 부분적으로 영향을 받는 반면 土層의 物理的 特性의 解析結果에 직접적으로 영향을 주므로 壓密의 物理的 特性과 現場係數의 精確한 測定이 필요하다.

4. 結 論

Explicit 有限差分法을 壓縮性흙으로서 多層土의 壓密解析에 적용하기 위한 이론을 전개하였으며, 數值解法의 正確度와 安定度가 검증되었고 개발된 프로그램을 실제 多層土에 적용 검토 하였다.

여기서 1次元 壓密解析에 有限差分法을 적용함에 있어 가장 큰 장점이란 본 방법의 單純性과 使用上의 多樣性이라 할 수 있다. 일반적으로 충분한 資料가 없으므로 본 解析의 精確度(Accuracy)를 구체적으로 세밀히 記述한다는 것은 어려운 일이나 최근 진행되는 연구^(7,8,9,10)에 의하면 1次 壓密沈下를 豫測하는데 있어 誤差의 대부분은 土性의 잘못된 측정에 기인되는 것으로 나타나고 있다. 다음은 본 연구의 총괄적인 結論으로서 다음과 같다.

i) 數值解法上의 係數 α 의 변화는 계산결과에 큰 영향을 주지 않는 반면 $H/\Delta z$ 의 값은 큰 영향을 주며 일반적인 壓密解析에서는 $H/\Delta z \approx 10$ 이 권장된다.

ii) 提案된 Explicit Algorithm은 그 正確度에 있어서 壓密解析에의 적용이 매우 효과적이다. 그러나 安定條件의 制約 때문에 壓密의 後期過程에서는 사용자가 얻는 豫測值의 量에 비해 計算機의 使用시간이 상대적으로 크다.

iii) 종래의 平均值法에 의한 壓密解析은 誤差가 매우 크며 본 연구에서 提案된 Algorithm은 現場條件을 직접 감안하여 壓密解析을 할 수 있으므로 매우 효과적이다.

參 考 文 獻

1. Roy E. Olson, and Charles C. Ladd, "One-Dimensional consolidation problems", *J of ASCE.*, Vol.105, No. GT1, Jan, 1979.
2. Terzaghi, K., "Theoretical Soil Mechanics, John Wiley & Sons, New York, 1954, pp.265

- ~296.
3. M.B. Abbott, "Numerical Methods, Delft Netherlands", *International Courses in Hydraulic Engineering*, 1983, pp. 21~23.
 4. J. Siemons, *Numerical Methods for the solution of Diffusion Advection Equations*, *J of Mathematics, Physics and Mechanics*, Publication No. 88, 1970.
 5. Braja M. Das, *Advanced Soil Mechanics*, Hemisphere, 1983, pp. 271~280.
 6. Christian, J.T., "Consolidation with Internal Pressure Generation", *J of the Geotechnical Eng. Div. ASCE*, Vol. 102, No. GT10, Oct, 1976.
 7. Kinard, D.T., "A case study of the Time Effects in One-Dimensional Consolidation", thesis presented to the University of Texas, at Austin Tex., in 1977, in partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science.
 8. Ladd, C.C., Rixner, J.J., and Gifford, D.G., "Performance of Embankments with sand drains on sensitive clay", *ASCE, Soil mechanics and Foundations Division specialty conference*, Purdue University, Vol.1, part, 1972, pp. 211~242.
 9. Hurray, R.T., "Embankments constructed on soft Foundations; Settlement study at Avonmouth", *Report LR 419, Road Research Laboratory*, Crowthorne, Berks, Great Britain (NTIS PB 207-629), 1971.
 10. Olson, R.E., Daniel, D.E., and Liu, T.K., "Finite Difference Analysis for sand drain problems", *Analysis and Design in Geotechnical Engineering*, ASCE, Vol. 1, 1974, pp. 85~110.
 11. Sills, G.C. and Lee, K Discussion on "One-Dimensional Consolidation Problems" by Olson, R.E. & Ladd, C.C., *Journal of Geotechnical Engineering Division, ASCE*, Vol. 105, No. GT1, pp. 11~30, *Journal of the Geotechnical Engineering Division, ASCE*, Vol. 106, No. GT7, 1980, pp. 380~831.

(1985. 4. 30. 접수)