

〈論 文〉

開水路의 斷面縮小로 인한 水面變化

Variation of Water Surface due to Constriction in Open Channel

趙 容 駿\*

Yong-Jun, Cho

車 英 基\*\*

Young-Ki, Cha

尹 泰 勳\*\*\*

Tae-Hoon, Yoon

Abstract

The variation of water surface profile due to the constriction of flow section in open channel was analysed by numerical scheme. Findings are that the variations of water surface are mainly dependent on the constriction ratio and Froude number of uniform flow, and the magnitudes of backwater obtained from the flow profiles agrees fairly well with the experiments by Skogerboe. This implies that the backwater can be predicted by numerical technique.

要 旨

水理構造物에 의하여 河川斷面의 減小로 유발되는 水面의 變化를 數值的으로 解析하였다. 水面變化는 收縮比와 等流의 Froude No. 에 가장 민감하게 나타났으며, 水面의 變化로 부터 구한 背水는 Skogerboe의 實驗式과 매우 잘 맞았다. 이는 背水의 크기는 數值解析法으로 豫測할 수 있음을 시사한다.

1. 서 론

河川에 교량과 같은 수리구조물이 설치되면 이는 흐름단면을 감소시킨다. 이와같은 흐름단면의 감소는流速을 증가시켜 단면축소부에 있는 구조물 주위에 세굴을 발생시키고 상류의 水位의 상승 즉 背水를 유발시킨다. 洪水시 수위상승으로 인한 浸水地 補償, 堤防의 높임 등에 많은 예산의 투입이 필요하게 되며 이러한 水害防止에 대한 비용은 예측되는 홍수위에 전격으로 좌우되며, 수리구조물로 인한 배수의 크기와 흐름현

상을 비교적 정확하게 예측할 수 있는 것이 요망된다. 하천흐름단면의 감소로 인한 흐름현상을 해석하는 데에는 해석적으로 해를 구하는 방법, 수리모형실험을 통한 경험식에 의한 방법, 흐름의 기본방정식을 수치적으로 해석하는 방법으로 구분할 수 있다. 해석적인 방법은 아직 정확히는 물론 개략치도 정립이 어렵다고 볼 수 있으며 개략식 자체도 실험자료를 필요로 한다.

많이 이용되는 방법으로는 수리모형의 결과를 이용한 실험적으로 이 방법도 제한된 실험자료에 따라 적용범위에 한계가 있고 흐름현상에는 별다른 정보를 제공하지 않는다.<sup>(7,6,21)</sup> 따라서 본 연구에서는 보다 광범

\* 漢陽大學校 大學院

\*\* 檀國大學校(天安 Campus) 土木工程科 助教授

\*\*\* 漢陽大學校 土木工程科 教授

위한 흐름조건에 대한 해석결과를 얻고자 흐름의 기본방정적인 연속 방정식과 운동량 방정식이 수치적으로 해석된다.

2. 基本方程式

흐름의 舉動을 해석하는 基本方程式으로 連續方程式과 運動量方程式을 들 수 있다. 실제 흐름은 三次元이나 河床粗度에 의한 亂流混合으로 인하여 鉛直方向으로 거의 균일한 流速分布를<sup>(5,11,16)</sup> 갖을 경우 鉛直方向의 가속도가 重力加速度에 비하여 작아 무시할 수 있고 水深의 변화가 무시할만큼 작으면 흐름의 基本方程式을 깊이에 대하여 적분을 취하여 깊이에 대한 平均變量으로 표시한 경우 二次元흐름으로 해석하는 것이 가능하다. 깊이에 대하여 적분을 취한 基本방정식은 다음과 같다.<sup>(15)</sup>



Fig 1. Definition Sketch

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \{(h+\eta)\bar{u}\}}{\partial x} + \frac{\eta \{(h+\eta)\bar{v}\}}{\partial y} = 0 \dots\dots\dots(1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial (\bar{u} \cdot \bar{u})}{\partial x} + \frac{\partial (\bar{v} \cdot \bar{u})}{\partial y} + g \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\tau_{bx}}{\rho(h+\eta)} \\ - \frac{1}{\rho(h+\eta)} \left[ \frac{\partial \{(h+\eta)T_{xx}\}}{\partial x} + \frac{\partial \{(h+\eta)T_{xy}\}}{\partial y} \right] \\ = 0 \dots\dots\dots(2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \frac{\partial (\bar{u} \cdot \bar{v})}{\partial x} + \frac{\partial (\bar{v} \cdot \bar{v})}{\partial y} + g \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\tau_{by}}{\rho(h+\eta)} - \frac{1}{\rho(h+\eta)} \\ \left[ \frac{\partial \{(h+\eta)T_{xy}\}}{\partial x} + \frac{\partial \{(h+\eta)T_{yy}\}}{\partial y} \right] = 0 \dots\dots\dots(3) \end{aligned}$$

$$\bar{u} = \frac{1}{(h+\eta)} \int_{-h}^{\eta} u dz \dots\dots\dots(4)$$

$$v = \frac{1}{(h+\eta)} \int_{-h}^{\eta} v dz \dots\dots\dots(5)$$

여기서  $u$ 는  $x$  방향 유속성분,  $v$ 는  $y$  방향 유속성분, 는 평균수면에서 바닥까지의 수심,  $h$ 는 평균수면으로부터의 水面의 變位,  $\tau_{bx}, \tau_{by}$ 는 河床摩擦應力,  $T_{xx}, T_{xy}, T_{yy}$ 는 有效剪斷應力을 나타낸다.

여기서 有效剪斷應力이라 함은 유체의 粘性에 의한 전단응력, 亂流流速變動 성분에 의한 Reynolds 응력, 3차원흐름을 2차원으로 해석하는 데서 유발되는 부가적인 전단효과 등을 포함한다.

즉,

$$T_{xx} = \frac{1}{(h+\eta)} \int_{-h}^{\eta} \left[ 2\rho v \frac{\partial u}{\partial x} - \rho \overline{u^2} - \rho(u-\bar{u})^2 \right] dz \dots\dots(6)$$

$$\begin{aligned} T_{xy}, T_{yx} = \frac{1}{(h+\eta)} \int_{-h}^{\eta} \left[ \rho v \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) - \rho \overline{u'v'} \right. \\ \left. - \rho(u-\bar{u}) \cdot (v-\bar{v}) \right] dz \dots\dots\dots(7) \end{aligned}$$

$$T_{yy} = \frac{1}{(h+\eta)} \int_{-h}^{\eta} \left[ 2\rho v \frac{\partial v}{\partial y} - \rho \overline{v^2} - \rho(v-\bar{v})^2 \right] dz \dots\dots(8)$$

하상마찰응력을 수심에 대한 평균값으로 표현하기 위한 몇개의 실험식이 제안되었는데 그중 Dronkers<sup>4)</sup>에 의한 식은 다음과 같다.

$$\tau_{bx} = \rho f_r \bar{u} (\bar{u}^2 + \bar{v}^2)^{1/2} \dots\dots\dots(9)$$

$$\tau_{by} = \rho f_r \bar{v} (\bar{u}^2 + \bar{v}^2)^{1/2} \dots\dots\dots(10)$$

여기서  $f_r = g/C^2$  이고  $C$ 는 chezy 계수이다.

이상의 방정식을 수치모형화 하는 데 있어서 가장 큰 어려움의 하나는 유효전단응력을 水深에 대한 평균값으로 표현하는 문제이다.

이에 관해서는 Kuipers와 Vreugdenhill<sup>(11)</sup>이 제안한 속도의 공간평균 과정을 통해 유효전단응력을 數值模型에 陰性的으로 도입하여 해결하는 방법, 유효전단응력을 수심에 대한 평균값으로 직접 표현하는 방법등이 있다. Kuipers와 Vreugdenhill의 방법은 유효전단응력을 수치모형에 양성적으로 포함시키지 않고 每時間區間마다 속도의 공간적 평균과정을 통해 流速을 연화(smoothing)함으로써 수치모형내에 유효전단응력을 模擬發生시키는 것으로서 式으로 표현하면 아래와 같다.

$$\begin{aligned} \bar{u}_{j,k}^* = \bar{u}_{j,k}(1-\alpha) + \frac{\alpha}{4} (\bar{u}_{j-1,k} + \bar{u}_{j,k-1} + \bar{u}_{j,k+1} + \bar{u}_{j+1,k}) \\ \dots\dots\dots(11) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{v}_{j,k}^* = \bar{v}_{j,k}(1-\alpha) + \frac{\alpha}{4} (\bar{v}_{j-1,k} + \bar{v}_{j,k-1} + \bar{v}_{j,k+1} + \bar{v}_{j+1,k}) \\ \dots\dots\dots(12) \end{aligned}$$

여기서  $\bar{u}_{j,k}^*, \bar{v}_{j,k}^*$ 는 공간평균된 유속이고  $\alpha$ 는 加重因子,  $j, k$ 는 空間格子의 格點의 번호이다.

이상과 같은 인위적인 점성형태의 에너지 감쇄과정을 도입함으로써 수치모형의 非線型的 不安定의 성장을 억제하는 방안이 될수도 있으나 이 방법의 단점은 메시간 구간마다 연화되는 量中 실제유효전단응력을 재현하는 데 기여하는 量과 수치모형의 불안전성의 억제에 기여하는 부분을 物理적으로 해석할 수 없다는 것이고 적절한 가중인자를 결정하는데 어려움이 따른다.

다.

따라서 본 연구에서는 유효전단응력을 Boussinesq 渦粘性係數를 도입하여 다음 식과 같이 水深平均값으로 표현했다.

$$\frac{1}{\rho(h+\eta)} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \{ (h+\eta) T_{xx} \} + \frac{\partial}{\partial y} \{ (h+\eta) T_{xy} \} \right] = \epsilon \left( \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} \right) \dots\dots\dots (13)$$

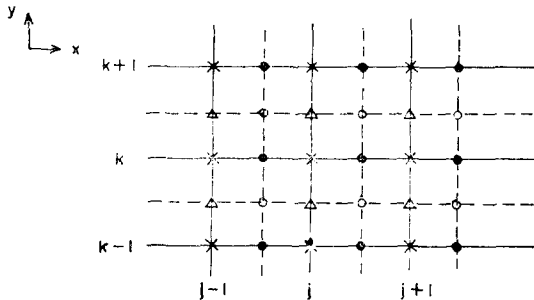
여기서  $\epsilon = \alpha (\Delta x)^2 / \Delta t$  이고  $\Delta x$  는 공간격자망의 크기이고,  $\Delta t$  는 시간구간의 크기,  $\alpha$  는 보정계수이다.

### 3. 數值解析

#### 3.1 基本方程式의 數值模型化

기본방정식 (1)~(3)에 해당하는 有限差分式은 每時間區間을 두개의 가상적인 부분으로 나누어 두번의 계산과정이 수행되는 ADI(Alternating Direction Implicit)方法<sup>(1,5,13,17,20)</sup>을 이용해 표현했다.

즉,  $n\Delta t$  에서  $(n + \frac{1}{2})\Delta t$  까지의 구간에서는 미분방정식 (1), (2), (3)에서  $\bar{u}$  를 포함하는 항은 陰性的으로 표현하고  $\bar{v}$  를 포함하는 항은 陽性的으로 표현한다. 반면에  $(n + \frac{1}{2})\Delta t$  에서  $(n+1)\Delta t$  까지의 구간에서는  $\bar{v}$ ,  $\eta$  를 포함하는 항은 음성적으로 표현하고  $\bar{u}$  를 포함하는 항은 양성적으로 표현된다. 또한 엄밀히 말하면 모든 格點에서  $\bar{u}$ ,  $\bar{v}$ ,  $\eta$ ,  $h$  가 정의되어야 하나 계산상의 편의와 境界條件의 대입을 용이하게 하기위해 개개의 格點에 상이한 값을 정의하는 Space-staggered mesh system<sup>(1,5,14,17,20)</sup>을 사용했다.



- × : 平均水面으로부터 水面變位( $\eta$ )
- :  $x$  방향 流速( $\bar{u}$ )
- △ :  $y$  방향 流速( $\bar{v}$ )
- : 平均水面( $h$ )

Fig 2. Space Staggered Mesh

기본방정식을 유한차분으로 나타내는 과정에서 空間微分項은 중앙차분으로 시간미분항은 전방차분으로 표

현된다.

따라서 유한차분식의 절삭오차는  $O(\Delta t, \Delta x^2)$ 이 되고 이로 인해 미세한 위상오차를 유발하게 된다.

每時間區間마다 2번의 계산이 수행되는데 이들에 대한 표현은 다음과 같다.

1) 1段階 :  $n\Delta t \rightarrow (n + \frac{1}{2})\Delta t$

連續方程式

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} : \left( \eta_{j,k}^{n+1/2} - \eta_{j,k}^n \right) / \frac{1}{2} \Delta t$$

$$\frac{\partial \{ (h+\eta) \bar{u} \}}{\partial x} : \left( A \bar{u}_{j+1/2,k}^{n+1/2} - B \bar{u}_{j-1/2,k}^{n+1/2} \right) / \Delta x$$

$$A = 0.5 (h_{j+1/2,k+1/2} + h_{j+1/2,k-1/2} + \eta_{j+1,k}^n + \eta_{j,k}^n)$$

$$B = 0.5 (h_{j-1/2,k+1/2} + h_{j-1/2,k-1/2} + \eta_{j,k}^n + \eta_{j-1,k}^n)$$

$$\frac{\partial \{ (h+\eta) \bar{v} \}}{\partial y} : (C \bar{v}_{j,k+1/2}^{n-1} - D \bar{v}_{j,k-1/2}^{n-1}) / \Delta y$$

$$C = 0.5 (h_{j+1/2,k-1/2} + h_{j-1/2,k+1/2} + \eta_{j,k+1}^n + \eta_{j,k}^n)$$

$$D = 0.5 (h_{j+1/2,k-1/2} + h_{j-1/2,k-1/2} + \eta_{j,k-1}^{n-1} + \eta_{j,k-1}^n)$$

運動量方程式

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} : (\bar{u}_{j+1/2,k}^{n+1/2} - \bar{u}_{j+1/2,k}^{n-3/2}) / 2\Delta t$$

$$\frac{\partial (\bar{u})^2}{\partial x} : \{ (\bar{u}_{j+1,k}^{n-1/2})^2 - (\bar{u}_{j,k}^{n-1/2})^2 \} / \Delta x$$

$$\frac{\partial (\bar{u}\bar{v})}{\partial y} : (\bar{u}_{j+1/2,k+3/2}^{n-1/2} \cdot 0.5 (\bar{v}_{j+1,k+1/2}^n + \bar{v}_{j+1,k+3/2}^n) - \bar{u}_{j+1/2,k-1/2}^{n-1/2} \cdot 0.5 (\bar{v}_{j+1,k+1/2}^n + \bar{v}_{j+1,k-1/2}^n)) / \Delta y$$

$$p = -\bar{v}_{j+1,k+1/2}^n / 2 | \bar{v}_{j+1,k+1/2}^n |$$

$$q = -\bar{v}_{j+1,k-1/2}^n / 2 | \bar{v}_{j+1,k-1/2}^n |$$

$$g \frac{\partial \eta}{\partial x} : g \cdot (\eta_{j+1,k}^{n+1/2} - \eta_{j,k}^{n+1/2}) / \Delta x$$

$$\frac{f_r \bar{u} (n^2 + \bar{v}^2)^{1/2}}{(h+\eta)} : f_r (\bar{u}_{j+1,k}^{n+1/2} + \bar{u}_{j+1,k}^{n-1/2}) (1 \bar{u}_{j+1,k}^{n+1/2} / + 0.25 | \bar{v}_{j,k-1/2}^n + \bar{v}_{j,k+1/2}^n + \bar{v}_{j+1,k-1/2}^n + \bar{v}_{j+1,k+1/2}^n |) / (h_{j+1,k+1/2} + h_{j+1,k-1/2} + \eta_{j+1,k}^n + \eta_{j,k}^n)$$

$$\epsilon \left( \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} \right) : \epsilon (\bar{u}_{j+1/2,k}^{n-1/2} - \bar{u}_{j-1/2,k}^{n-1/2} + \bar{u}_{j+1/2,k}^{n-1/2} - \bar{u}_{j+1/2,k-1}^{n-1/2} - 2 \bar{u}_{j+1/2,k}^{n-1/2} - 2 \bar{u}_{j+1/2,k}^{n-1/2}) / \Delta x^2$$

$x$  방향을 따라 각 格點에 연속방정식과 운동량방정식을 적용함으로써 얻을 수 있는 방정식은 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} & X_{13} & 0 \\ 0 & X_{22} & X_{23} & X_{24} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}_{j-\frac{1}{2},k}^{n+\frac{1}{2}} \\ \eta_{j,k}^{n+\frac{1}{2}} \\ \bar{u}_{j+\frac{1}{2},k}^{n+\frac{1}{2}} \\ \eta_{j+1,k}^{n+\frac{1}{2}} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} \dots\dots\dots(14)$$

$X_{11}, X_{12}, X_{13}, F_1$ 은 연속방정식에서의  $\bar{u}_{j-\frac{1}{2},k}^{n+\frac{1}{2}}, \eta_{j,k}^{n+\frac{1}{2}}, \bar{u}_{j+\frac{1}{2},k}^{n+\frac{1}{2}}$ 의 계수와 상수항이고  $X_{22}, X_{23}, X_{24}, F_2$ 는 운동량방정식에서의  $\eta_{j,k}^{n+\frac{1}{2}}, \bar{u}_{j+\frac{1}{2},k}^{n+\frac{1}{2}}, \eta_{j+1,k}^{n+\frac{1}{2}}$ 의 계수와 상수항을 의미한다.

2) 2 段階 :  $(n + \frac{1}{2})\Delta t \rightarrow (n+1)\Delta t$

連續方程式

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} : (\eta_{j,k}^{n+1} - \eta_{j,k}^{n+\frac{1}{2}}) / \frac{1}{2} \Delta t$$

$$\frac{\partial \{(h+\eta)\bar{u}\}}{\partial x} : (E \bar{u}_{j+\frac{1}{2},k}^{n-\frac{1}{2}} - F \bar{u}_{j-\frac{1}{2},k}^{n-\frac{1}{2}}) / \Delta x$$

$$E = 0.5(h_{j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} + h_{j+\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}} + \eta_{j+1,k}^{n-\frac{1}{2}} + \eta_{j,k}^{n-\frac{1}{2}})$$

$$F = 0.5(h_{j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} + h_{j-\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}} + \eta_{j,k}^{n-\frac{1}{2}} + \eta_{j-1,k}^{n-\frac{1}{2}})$$

$$\frac{\partial \{(h+\eta)v\}}{\partial y} : (G \bar{v}_{j,k+\frac{1}{2}}^{n+1} - H \bar{v}_{j,k-\frac{1}{2}}^{n+1}) / \Delta y$$

$$G = 0.5(h_{j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} + h_{j-\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} + \eta_{j,k}^{n+\frac{1}{2}} + \eta_{j,k}^{n+\frac{1}{2}})$$

$$H = 0.5(h_{j+\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}} + h_{j-\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}} + \eta_{j,k}^{n+\frac{1}{2}} + \eta_{j,k-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}})$$

運動量方程式

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + (\bar{v}_{j,k-\frac{1}{2}}^{n+1} - \bar{v}_{j,k+\frac{1}{2}}^{n-1}) / 2\Delta t$$

$$\frac{\partial (\bar{u}\bar{v})}{\partial x} : (0.5(\bar{u}_{j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} + \bar{u}_{j+\frac{1}{2},k}^{n+\frac{1}{2}}) \cdot \bar{v}_{j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - 0.5(\bar{u}_{j-\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} + \bar{u}_{j-\frac{1}{2},k}^{n+\frac{1}{2}}) \cdot \bar{v}_{j-\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}) / \Delta x$$

$$P = -\bar{u}_{j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} / 2\bar{u}_{j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} / ,$$

$$q = -\bar{u}_{j-\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} / 2\bar{u}_{j-\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} /$$

$$\frac{\partial (\bar{v})^2}{\partial y} : ((\bar{v}_{j,k+\frac{1}{2}}^n)^2 - (\bar{v}_{j,k}^n)^2) / \Delta y$$

$$g \frac{\partial \eta}{\partial y} : g(\eta_{j,k+\frac{1}{2}}^{n+1} - \eta_{j,k}^{n+1}) / \Delta y$$

$$\frac{f_r \bar{v}(\bar{u}^2 + \bar{v}^2)^{\frac{1}{2}}}{(h+\eta)} : f_r(\bar{v}_{j,k+\frac{1}{2}}^{n+1} + \bar{v}_{j,k+\frac{1}{2}}^{n-1})(0.25|\bar{u}_{j-\frac{1}{2},k}^{n+\frac{1}{2}} + \bar{u}_{j-\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} + \bar{u}_{j+\frac{1}{2},k}^{n+\frac{1}{2}} + \bar{u}_{j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}| + |\bar{v}_{j,k+\frac{1}{2}}^n|) / (h_{j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} + h_{j-\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} + \eta_{j,k+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} + \eta_{j,k}^{n+\frac{1}{2}})$$

$$\epsilon \left( \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial y^2} \right) : \epsilon(\bar{v}_{j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}^n - \bar{v}_{j-\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}^n + \bar{v}_{j,k+\frac{1}{2}}^n - \bar{v}_{j,k-\frac{1}{2}}^n - 2\bar{v}_{j,k+\frac{1}{2}}^{n+1} - 2\bar{v}_{j,k+\frac{1}{2}}^{n-1}) / \Delta x^2$$

y 방향을 따라 각 격자점에 연속방정식과 운동량방정식을 적용할 경우 얻을 수 있는 방정식은 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} & Y_{13} & 0 \\ 0 & Y_{22} & Y_{23} & Y_{24} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{v}_{j,k-\frac{1}{2}}^{n+1} \\ \eta_{j,k}^{n+1} \\ \bar{u}_{j,k+\frac{1}{2}}^{n+1} \\ \eta_{j,k+\frac{1}{2}}^{n+1} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} \dots\dots\dots(15)$$

여기서  $Y_{11}, Y_{12}, Y_{13}, C_1$ 은 연속방정식에서의  $\bar{v}_{j,k-\frac{1}{2}}^{n+1}, \eta_{j,k}^{n+1}, \bar{u}_{j,k+\frac{1}{2}}^{n+1}$ 의 계수와 상수항이고  $Y_{22}, Y_{23}, Y_{24}, C_2$ 는 운동량방정식에서의  $\eta_{j,k}^{n+1}, \bar{v}_{j,k+\frac{1}{2}}^{n+1}, \eta_{j,k+\frac{1}{2}}^{n+1}$ 의 계수와 상수항이다.

위와 같은 수치모형이 안전성을 갖기 위해서는 Courant No. 가 5 보다는 작아야 하는 것으로 알려졌다.<sup>(5)</sup>

이와같이 x, y 방향에 유한차분식을 적용할 경우 얻어지는 연립방정식의 行列을 푸는 데는 Thomas Algorithm<sup>(20)</sup>을 이용한 Gauss 消去法이 이용된다.

### 3.2 有限差分式的 數值的 性質

흐름이 갖는 에너지는 비선형적인 상호작용을 통해 移送되는데 이 移送거리는 점점 축소되고 종국에는 粘性에 의하여 소멸된다. 그러나 移送加速度項의 공간도함수에 中央差分을 적용할 경우 에너지 擴散距離는 공간격자망크기 2배이하로는 표현할 수 없고 따라서 各格點에서 에너지는 축적되고 이 축적된 에너지로 말미암아 수치해는 진동하는 것으로 알려졌다.<sup>(15)</sup>

본 연구에서 해석하려는 것이 斷面收縮을 갖는 開水路에서의 흐름현상이므로 移送加速度項이 흐름현상에 주된 영향을 미치게 된다.

이송가속도항으로 예상되는 수치모형의 불안정성을 해결하기 위하여 본 모형에서는 이송가속도항의 속도도함수에 관해서만 時間에 대해 중앙차분화된 형태로 표현했다. 이렇게 함으로써 수치모형은 조건적인안정성을 얻게 되고 局部加速度項, 유사선형화된 이송가속도항, 운동량방정식의 河床摩擦項들을 가지고 Fourier 안정해석<sup>(22)</sup>을 하면 이송가속도항이 안정성을 갖기 위해서는 아래와 같은 조건을 만족해야 하는 것으로 알려졌다.<sup>(11)</sup>

$$\alpha \frac{\Delta t}{\Delta x} |u_{max}| \leq 1$$

#### 4. 模型의 檢定

數值模型의 실제문제에 대한 적용가능성을 檢定하는 방법에는 실험이나 실측을 통한 물리적 방법과 미분방정식의 정확해와 비교하는 두가지 방법이 있다.

본 연구에서는 실측자료의 미비로 미분방정식의 정확해와 비교하는 방법을 택했다.<sup>(18)</sup> 또한 본 연구에서 해석하려고 하는 흐름현상이 2차원이므로 2차원의 경우에 적용하는 것이 타당하나 알려져 있는 정확해가 없기때문에 1次元矩形水路에 본모형을 적용했다. 수치모형의 안정성과 초기조건의 영향을 고려하기 위하여  $h$ 가 5m일 경우  $\Delta x, \Delta y$ 를 2m,  $\Delta t$ 를 1sec(courant no.=3.5)로 놓고 계산을 수행한 결과 약간의 位相差異를 보였지만 비교적 정확한 수치해를 구할 수 있었고  $h$ 가 10m일 경우  $\Delta x, \Delta y$ 를 2m,  $\Delta t$ 를 1 sec(courant no.=4.94)로 놓고 계산한 결과 역시 약간의 位相差異를 보였으나 비교적 정확한 해를 구할 수 있었다. 이로부터 본 연구에서 제안된 數值模型의 安定條件의 범위를 설정할 수 있었고 시간도함수에 대한 전방차분의 적용으로 인해 야기되는 위상오차는 二次精度(second order accuracy)를 갖는 중앙차분을 적용할 경우 줄일 수 있을 것으로 예상된다. 그러나 그렇게 할 경우 2개의 시간구간에서의 값들이 모두 미지수가 되어 반복법에 의한 수치해를 구할 수 밖에 없어 과도한 계산량을 요구하게 되어 전방차분을 계속 적용한다.

#### 5. 數值解析結果

흐름斷面의 縮小로 인한 水面 변화에 관한 數值的인 解析이 수행되는 水路는 彎曲의 영향을 무시할 수 있을 정도로 반듯하고 等流가 일어날만큼 긴 것으로 가정된다.

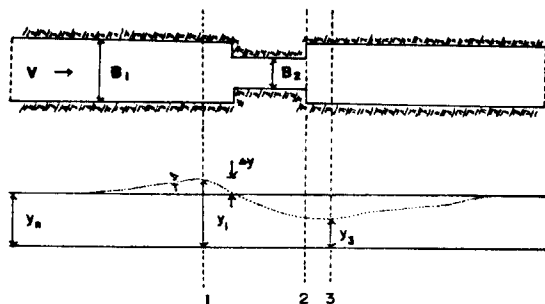


Fig 3. Definition Sketch of Constriction

基本方程式을 푸는데에는 수로의 상하류와 河岸에서의 경계조건이 주어져야 한다. 흐름의 상하류에서는 또한 初期조건이 주어져야 한다. 이 초기조건은 흐름이 定流인가 不定流인가에 따라서도 다르게 된다. 그러나 본 연구에서는 定流에 한한다. 定流라 하더라도 단면속도로 인한 수면의 변화를 모르는 상태에서 구하는 것이므로 상류와 하류에서 초기조건을 주는 것은 불가능 하다. 이러한 경우에 가능한 방법으로 상류와 하류의 초기수심을 等流水深으로 주고 유속이 零인 停止상태(cold start)에서 시작하여 구하고자 하는 수면 상태에 도달할때 까지 계산을 계속하는 것이다. 河岸에서의 경계조건은 하안에 수직인 유속성분과 접선방향의 유속성분이 다같이 零인 no-slip 조건을 대입했다. 空間格子網의 크기는 1m로 하였고 시간구간의 크기는 Courant no.가 4를 초과하지 않도록 선정하였다. 그림 3에서  $\sigma = B_2/B_1$ 으로 정의되는 收縮比에 따른 背水  $\Delta y (=y_1 - y_n)$ 의 변화는 그림 4에서 알 수 있는 바와 같이 收縮比가

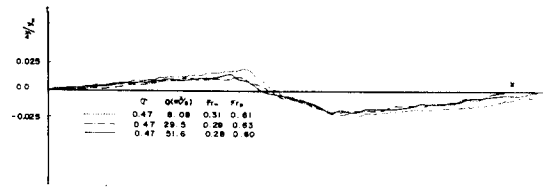


Fig 4. Water Surfaces for Different Contraction Ratios

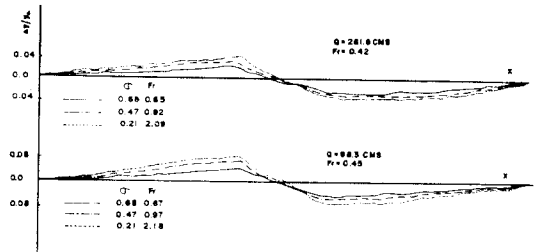


Fig 5. Water Surfaces for Different Contraction Ratios

감소함에 따라 背水の 크기는 증가하고 최대배수가 발생하는 위치는 점근적으로 수축부에 접근한다. 최대 배수가 발생하는 위치를 美道路局의 방법에 의한 構造物 下側端으로부터 측정한 거리와 비교한 결과 본 연구에 의한 거리가 보다 짧게 나타났으나 그 이유는 아직 밝혀지지 못했다.

背水에 가장 지배적인 영향을 주는 인자는 收縮比와 等流水深의 Froude no.(Frn)로서 이들을 플랏트한 것이 그림 7이다.

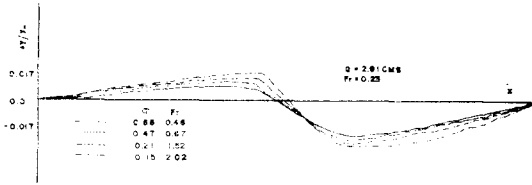


Fig 6. Water surfaces for Different Flow Conditions

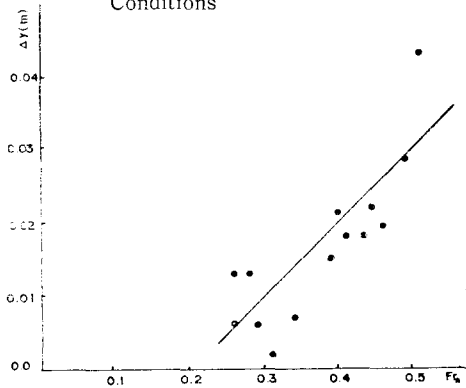


Fig 7. Froude number and Backwater

模型實驗에서 얻은 실험자료로 부터 skogerboe 와 Barret<sup>(19)</sup>는 流量, 背水, 無次元等流水深  $y_n/y_1$  사이의 實驗式을 다음과 같이 제시하였다 .

$$Q = \frac{C(y_1 - y_n)^{1.5}}{-\log y_n/y_1} \dots\dots\dots(17)$$

여기서 C는 流量係數로서 收縮比  $\sigma$ 의 함수로 주어

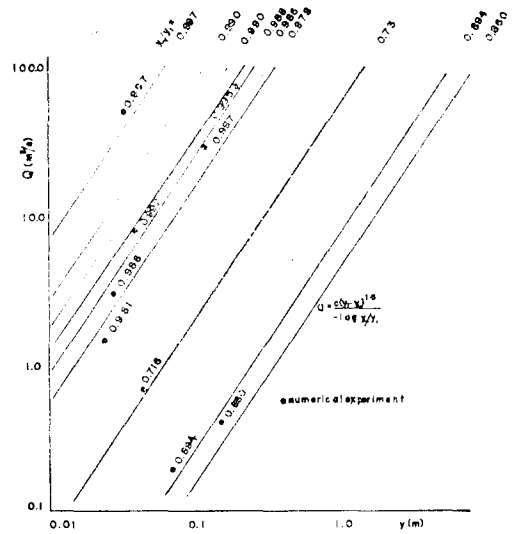


Fig 8. Relationship of Discharge and Backwater

Table. 1

單位幅當流量 m³/s/m	等流水深 m	Frn	최대배수고 $y_1$ (m)			收縮比 $\sigma$	최대배수발생위치 (m)	
			實測值	本模型	實驗式		本模型	美道路局
0.049	0.117	0.39	0.136	0.132		0.47	3.0	3.3
0.019	0.068	0.34	0.076	0.075		0.47	3.5	3.4
0.064	0.116	0.51	0.162	0.159		0.47	3.0	3.5
1.437	1.072	0.41		1.092	1.096	0.47	14.5	13.9
2.918	2.052	0.23		2.026	2.081	0.47	14.0	13.4
8.096	4.052	0.31		4.082	4.09	0.47	15.5	19.2
6.850	3.052	0.42		3.147	3.153	0.47	13.7	14.5
13.541	5.052	0.38		5.178	5.185	0.47	16.5	17.5
2.670	1.557	0.44		1.574	1.579	0.47	15.0	16.5
29.169	10.052	0.29		10.142	10.170	0.47	14.5	21.3
51.601	15.052	0.28		15.091	15.085	0.47	15.0	19.2
75.169	20.052	0.26		20.151	20.245	0.47	17.5	20.2
2.918	2.052	0.23		2.068		0.68	15.0	23.2
2.918	2.052	0.23		2.082		0.21	11.0	
2.918	2.052	0.23		2.09		0.15	9.5	

① 構造物 下流端에서 측정 한 거리

진다.

$\sigma$	0.245	0.497
C	1.55	3.7

상이한 유량에 대하여 실험 식인 식(17)을 이용하여 계산한 背水는 표 1에 수록되어 있으며 이들은 數值模型에 의한 背水와 비교할 때 매우 근사한 결과를 보인다. 또한 이들을 플랫폼한 것이 그림 8로 數值解析의 결과가 실험치와 잘 맞는 것을 알수 있다.

### 6. 結 論

自然河川에서 水理構造物로 인한 흐름단면의 감소는 水面曲線의 변화를 유발한다. 이러한 水面의 변화를 흐름方程式을 數值的으로 풀므로써 해석하였다. 解析結果는 다음과 같이 요약될 수 있다.

水面의 변화는 收縮比가 감소함에 따라 증가를 보이며 동일한 收縮比에서도 背水의 크기는 等流의 Froude no.에 크게 영향을 받는다. 水面의 변화에서 나타난 背水는 Skogerboe의 實驗式과 매우 잘 맞으며 이는 數值解法으로 背水의 豫測이 가능함을 시사한다.

### 참 고 문 헌

1. Abbott, M.B., Computational hydraulics, Pitman, 1980.
2. Brebbia, C.A., Computational hydraulics, Butterworths, London, 1983.
3. Chow, V.T., Open Channel hydraulics, McGraw-Hill 1981.
4. Dronkers, J.J., Tidal Computations in Rivers and Coastal Waters, Inter-Science Publishers, N.Y., 1964.
5. Falconer, R.A., 'Numerical Modeling of Tidal Circulation in Harbors,' J. of Waterway Div. ASCE., Vol. 106, WWL, 1980
6. Franques, J.T. and Yannitel, D.W., 'Two-Dimensional Analysis of Backwater at Bridges,' J. of Hydraulics Div. ASCE., Vol.100, No.HY3, March, 1974.
7. Henderson, F.M., Open Channel Flow, Macmillan Publishing Co., Inc. New York, 1966.
8. Herbert, F.W., and Mary, P.A., Introduction to Ground Water Modeling, W.H. Freeman and Company, San Francisco, 1982.
9. Hugh Barrett, J.W., and Skogerboe, G.V., 'Computing Backwater at Open Channel Constrictions,' J. of Hydraulics Div. ASCE., Vol.99, No. HY7, July, 1973.
10. Ippen, A.T., Estuary and Coastline Hydrodynamics, McGraw Hill, N.Y., 1966.
11. Kuipers, J., Vreugdenhill, C.B., 'Calculations of Two Dimensional Horizontal Flows, Research Report SI 63-1, Delft Hydraulics Laboratory, Oct, 1973.
12. Lamb, H., Hydrodynamics, Dover, N.Y., 1932.
13. Lean, G.H. and Weare, T.J., 'Modeling Two-Dimensional Circulating Flow' J. of Hydraulics Div. ASCE., Vol. 105, No. HY1, Jan, 1979.
14. Novak, P., Cabelka, J., Models in Hydraulic Engineering, Pitman, 1981.
15. Phillips, N.A., 'An Example of Non-linear Computational Instability,' The Atmosphere and Sea in Motion, Rockefeller Institute Press, N.Y., 1959.
16. Ponce, V.M., 'Modeling Circulation in Depth-Averaged Flow, J. of Hydraulics Div. ASCE, Vol.107, No.HY11, Nov. 1981.
17. Richtmyer, R.D., and Morton, K.W., Difference Methods for Initial Value Problem, Interscience Publishers, 1967.
18. 徐承源, 林定應, 尹泰勳, '흐름단면의急變化에 의한 循環의 數值模型', 大韓土木學會誌, 第3卷 第4號. 1983年 12月.
19. Skogerboe, G.V., and Hugh Barrett, J.U., 'Comparison of Bridge Backwater Relations, J. of Hydraulics Div. ASCE. Vol.99, No. HY6, June, 1973.
20. Smith., G.D., Numerical Solution of Partial Differential Equations, Oxford University Press, 1975.
21. U.S. Department of transportation, Bureau of Public Roads, Hydraulic Design Series, No.1 Hydraulics of Bridge Waterways., 1970.
22. Yevjevich, V., Unsteady Flow in Open Channel, Vol. I, Water Resources Publications, Fort Collins, Col, 1975.