〈技術報文〉

降雨-流出 模型化의 問題點과 方法들 (3)

金 再 韓*

3. 線形槪念的 模型의 媒介變數 適合化

3·1 積率과 累積

만약 槪念的 模型이 有效雨量에 對한 集水面積의 作用을 나타내기 위하여 使用되어진다면, 槪念的 模型과 이 模型을 위한 媒介變數들의 값을 選定하는 것이 必要하게 된다. 模型이 無作爲로 擇하여지고, 媒介變數들을 流出에 適合하도록 맞춘다는 基準下에서 試行錯誤的으로 選擇되어진다면 이 近似方法은 古典的 單位圖보다 훨씬 더 主觀的이 될 것이다. 이 章의 3節에서 言及되겠지만, 選擇된 模型으로부터의 單位圖가 出力의 模型과의 符合에 의하여 實際單位圖에 가깝다는 어떤 保障도 갖지 못한다. 만약 信賴할 수 있는 方法論들이 開發될 수 있다면, 過程의 모든 段階는 可能한 限 客觀的으로 이루어져야 한다.

考慮되어야 할 첫번째 問題는 어떠한 方法으로 單位圖가 描寫될 수 있느냐 하는 것이다. 이와 같은 方法들 가운데 하나가 任意持續期間에 對한 單位圖의 縱距들을 決定하여 이를 使用하는 것이다. 이와 같은 경우에 決定하여야 할 媒介變數들의 數는 特定點을 나타내는 時間幅과 이 點들을 連結하였을 때에 單位圖가 適切한 모양을 나타낼 수 있게 하기 위한 充分한 縱距들의 數値이다. 合成單位圖의 경우에는 이와 같은 縱距들을 流域特性値들과 相關시키는 것이 必要하게 된다.

描寫될 수 있는 媒介變數들로서 統計學의 積率(Moment)과 累積(Cumulant)을 들 수 있으며(Kendall과 Stuart, 1958), 만약 이들을 使用한다면 媒介變數들의 數는 상당히 줄어들 수 있다. Nash(1960)는 完全한 單位圖를 誘導하는 것 없이도, 有效雨量과 直接豪雨流出에 該當되는 積率들로부터 瞬間單位圖의 統計學的 積率들이 決定될 수 있음을 證明하였다. 積率들은 槪念的 模型들의 媒介變數들에 對한 適切한 값의 決定을 위하여서나, 模型들의 比較를 위한 土臺로서 使用될 수 있는 利點을 지니고 있다. 水文系에서 使用되는 積率들은 時間에 關한 여러 函數들의 積率이다. 時間原點에 對한 積率은 식(15)와 같이 表現된다.

$$U'_R(f)=\int_0^\infty f(t)t^R dt \quad \cdots\cdots(15)$$

또한 分布函數의 重心에 對한 積率은 식(16)과 같이 된다.

$$U_R(f)=\int_0^\infty f(t)(t-U_1')^R dt \quad \cdots\cdots(16)$$

原點과 重心에 關한 積率 사이의 相關性을 式(16)의 $(t-U_1')^R$의 項을 展開하므로써 찾아낼 수 있다.

線形時不變系에 對하여 入力과 衝擊應答 및 出力의 積率 사이에는 特別한 相關性이 있다(Nash, 1960). 이와 같은 系에 對하여 入力 $x(t)$와 出力 $y(t)$를 알 때, 單位圖 $h(t)$의 積率이 計算될 수 있는 식(17)을 생각할 수 있다.

$$U'_R(y)=\sum_{k=0}^{R}\binom{R}{k}U_k'(x)U'_{R-k}(h) \quad \cdots\cdots(17)$$

식(17)에서 $R=1$인 特別한 경우의 單位圖의 1次積率은 入力과 出力의 各 重心 사이의 거리, 卽 流域의 遲滯時間과 같으며, 식(18)과 같이 주어진다.

$$U_1'(y)=U_1'(x)+U_1'(h) \quad \cdots\cdots(18)$$

原點에 關한 2次積率들 사이의 相關性은 式(19)와 같이 되며, 重心에 關하여는 식(20)과 같이 이루어진다.

$$U_2'(y)=U_2'(x)+2U_1'(x)U_1'(h)+U_2'(h) \quad \cdots\cdots(19)$$

$$U_2(y)=U_2(x)+U_2(h) \quad \cdots\cdots(20)$$

3次積率에 對하여는 식(18)과 식(20)에 簡單히 加法化하여 方程式을 얻을 수 있으나, 더 高次積率에 對하여는 이 加法的 相關性이 상당히 複雜하게 된다.

積率만이 函數를 決定짓기 위하여 使用될 수 있는 有一한 媒介變數는 아니다. 어떤 點에서는 이들만이 가장 便利한 方法이라고 볼 수 없으며, 이를 위하여 統計學에서 使用된 또 다른 媒介變數들이 累積, 卽 半不變係數(Semi-invarient)들이다(Kendall과 Stuart, 1958). 이 媒介變數들에 對한 Fourier 變換이 母函數(Generating function)가 된다. 1次를 除外한 모든 累積들은

* 忠南大 工大 土木工學科(工博)

原點을 變化시키드라도 전혀 영향을 받지 않는다. 線形時不變系의 경우에 對하여 식(21)과 같이 됨을 證明할 수 있으며, 이 式은 累積의 경우에의 모든 次數들에 對하여 式(18)과 式(20)의 簡單한 加法的 相關性을 얻을 수 있음을 提示한다.

$$k_R(y)=k_R(x)+k_R(h) \cdots\cdots (21)$$

1次累積은 原點에 關한 1次積率과 같고, 또한 2次와 3次累積은 重心에 關한 2次와 3次積率과 같다. 따라서, 식(18)과 식(20)이 證明될 수 있다. 4次累積은 重心에 關한 4次積率에서 重心에 關한 2次積率에 自乘에 3倍한 값을 빼준 것과 같다. 이 量은 統計學에서 超過尖度(Excess kurtosis)라고 알려져 있다. Gauss分布는 2次 以上의 모든 累積들이 0인 分布型이라고 알고 넘어 가는 것이 이와 같은 問題의 興味의 對象이 된다.

離散型 資料들의 경우에 該當되는 定義나 相關式들이 있다. 原點에 關한 離散分布型의 R次積率은 식(22)와 같이 定義되며, 이는 連續型의 경우에 對한 식(15)에 該當된다.

$$U_R'(f)=\sum_{s=0}^{\infty} f(S)S^R \cdots\cdots (22)$$

따라서, 이것으로부터 離散型인 경우의 累積들에 對한 加法的 定理를 誘導할 수 있다. 時不變系에 對한 簡單한 加法的 相關性은 連續型의 경우에서와 같이, 原點에 關한 1次積率과 重心에 關한 2次와 3次積率에 對하여 取하여짐을 證明할 수 있다.

3.2 模型의 媒介變數들에 對한 最適化

水文學的 觀點에서 概念的 模型의 媒介變數들이 最適化되어야 한다. 이를 위하여 降雨와 流出資料들로부터 誘導한 바와 같은 概念的 模型의 積率과 單位圖의 算定積率을 같게 하므로써 遂行되어질 수 있다. 비록 積率結付(Moment matching)方法의 使用이 批判을 받을지도 모르나, 이의 使用의 첫번째 理由로서는 大部分의 線形概念的 模型들의 경우에 있어서 極히 便利하기 때문이다. 앞에서도 言及되었던 것처럼, 單位圖의 積率算定을 降雨와 流出資料들로부터 얻을 수 있다. 두번째 理由로서는 3.1에서 言及된 積率相關性이 共通된 多少의 概念的 模型들의 累積을 위한 式들의 誘導를 簡便化하는데 利用될 수 있기 때문이며, 세번째로서는 模型의 選擇을 위한 客觀的인 方法의 土臺로서 積率을 利用할 수 있기 때문이다.

概念的 模型의 積率誘導를 一連의 同等한 線形貯水池의 경우에 對하여 提示할 수 있다. 貯溜遲滯時間 K를 가진 단 하나의 線形貯水池에 對한 衝擊應答은 식(23a)와 같이 된다.

$$h(t)=\frac{1}{K}exp\left[-\frac{t}{K}\right] \cdots\cdots (23a)$$

위 식을 便利하게 식(23b)와 같이 나타낼 수 있으며, 여기서 a는 K의 逆數이다.

$$h(t)=a\ exp(-at) \cdots\cdots (23b)$$

따라서, 原點에 關한 $h(t)$의 R次積率은 식(24)와 같이 됨을 證明할 수 있다.

$$U_R'=R!K^R \cdots\cdots (24)$$

또한 R次累積은 식(25)와 같이 된다.

$$k_R=(R-1)!K^R \cdots\cdots (25)$$

上記 식들은 단 하나의 貯水池의 경우에 該當되는 것일지라도, 一連의 n個의 貯水池들에 對한 積率과 累積을 誘導할 경우에 식(17)과 식(21)에 依하여 크게 簡便化할 수 있다. 따라서, 이와 같은 경우에 先行 貯水池의 出力은 다음 段階의 貯水池의 入力이 되므로, 식(21)의 使用에 依하여 一連의 n個의 同等線形貯水池의 R次累積을 식(26)과 같이 나타낼 수 있다.

$$k_R=n/(R-1)!K^R \cdots\cdots (26)$$

위 식의 $R=1\sim4$의 特殊한 경우를 나타내어 보면 식(27)과 같다.

$$k_1=U_1'=nK \cdots\cdots (27a)$$

$$k_2=U_2=nk^2 \cdots\cdots (27b)$$

$$k_3=U_3=2nK^3 \cdots\cdots (27c)$$

$$k_4=U_4=3(U_2)^2=6nK^3 \cdots\cdots (27d)$$

概念的 模型의 媒介變數 n과 K를 決定하기 위하여 上記 式들 가운데 식(27a)와 식(27b)만이 必要하게 된다. 식(27c)와 식(27d)는 媒介變數들의 誘導에서 使用되지 않았던 高次積率이 概念的 模型에 어느 程度까지 符合되는지를 檢討하는데 使用될 수 있을 것이다. 이와 같은 觀點에서 만약 그 結果들이 상당한 不一致點을 나타낸다면 選擇된 概念的 模型이 適合치 못함을 示唆한다고 하겠다.

時間一面積一到達曲線이 幾何學的 圖形에 依하여 나타내어지고, 또한 一連의 線形貯水池를 通하여 追跡되어지는 경우에 그 結果로서 發生되는 概念的 模型의 累積들은 時間一面積一到達曲線을 나타내는 幾何學的 圖形의 累積들과 線形貯水池의 累積들을 더하므로써 얻어진다. 그런고로, 追跡코자 하는 二等邊三角形의 경우에 對하여 三角形의 基底時間 T와 線形貯水池의 遲滯時間 K가 주어지면, 그 結果로서 發生되는 模型의 累積들은 다음과 같다.

$$k_1=U_1'=\frac{T}{2}+K \cdots\cdots (28a)$$

$$k_2=U_2=\frac{T^2}{24}+K^2 \cdots\cdots (28b)$$

$$k_3 = U_3 = 2K^3 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (28c)$$

$$k_4 = U_4 - 3(U)^2 = 6K^4 - \frac{T^4}{960} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (28d)$$

만약 槪念的 模型의 各 積率 및 累積들을 誘導된 經驗的 水文曲線의 積率 및 累積들과 같다고 놓으면, 積率結付의 意味에서의 最適인 媒介變數値를 算定할 수 있다.

槪念的 模型의 媒介變數들을 積率結付에 依하여 最適化하는데 있어서, 最適化하여야 할 媒介變數들이 있는 만큼의 積率이 單位圖에 對하여 必要하게 된다. 이와 같은 目的을 爲하여 實際的으로는 보다 低次數의 積率을 使用하게 된다. 이는 다음과 같은 두가지 觀點에서 正當化될 수 있다 : (1) 低次數積率들이 高次數들에 比하여 보다 正確하게 算定되어질 수 있고, (2) 積率의 次數가 Fourier 또는 Laplace 變換의 多項式 展開에서 이에 該當되는 項의 幕數와 같다.

3.3 資料의 誤差結果

單位圖의 誘導는 必然的으로 逆過程이기 때문에, 資料의 誤差效果는 誘導된 單位圖에서 크게 擴大되어 나타날 수 있다. 이와 같은 誤差는 制約條件을 解에 附加시키므로써 多少 除去되어질 수 있다. 制約條件에 對한 Black-box 解析을 Natale 와 Todini(*1977, pp. 190~147)가 잘 나타낸 바 있으나, 이의 說明은 後章에서 論하여질 것이므로 여기서는 槪念的 模型들의 使用時 惹起될 수 있는 誤差들에 關해서만 論하여질 것이다.

單位圖誘導에 對한 資料의 誤差效果는 時間別 總 出力을 나타내기 위하여 適用되는 時間別 入力과 合成單位圖를 結合시키고, 이때 規則的(Systematic) 또는 不規則的(無作爲, Random)으로 주어진 誤差를 入力과 出力에 附加시키므로써 逆過程에 依하여 再現된 單位圖를 旣知의 單位圖(例를 들면, 上記 合成單位圖)와 比較檢討하므로써 論하여질 수 있다. 이와 같은 系的問題의 硏究에서 Laurenson 과 O'Donnell(1969)는 使用된 入力과 出力型에 對한 10%의 資料誤差의 效果를 提示하였으며, 그 結果를 나타낸 것이 表 1과 같다.

一般的으로 2.4의 식(14)에 依하여 주어진 線形方程式의 直接的 解(核)가 入力과 出力의 誤差에 對하여 상당히 敏感하다는 것은 이미 잘 알려진 事實이다. 表 1에서 A 의 경우는 單位圖에 附加된 制約條件이 降雨와 流出의 時間길이 사이의 差로서만 이루어진다면, 資料에 內包된 10%誤差의 경우에 誘導된 單位圖의 誤差는 天文學的 숫자가 된다는 것을 나타내고 있다. B 의 경우는 直接解法에 依하여 求하여진 單位圖面積을 1로 正規化시킨다면 誤差를 多少 줄일 수 있으나, 아직도 發生되는 誤差는 엄청남을 提示해 주고 있다. C 의 경우는 單位圖의 모든 縱距가 陰의 값을 갖지 않도록 制約條件을 附加한 것이며, 만약 陰의 縱距가 發生할 때는 이 값을 0이 되도록 한 것이다. 이와 같은 경우에 誤差를 前者들에 比하여 훨씬 더 줄일 수 있으나, 實際 使用面에서 採擇될 수 있는 基準에는 아직도 못미친다고 하겠다. 最小自乘法의 경우에서는 誤差를 훨씬 더 줄일 수 있으나, 아직도 無作爲誤差에 對해서 상당히 敏感함을 보여 주고 있다. 制約條件이 附加된 最適化技法의 調整法(Regularization method)은 비록 컴퓨터 所要時間을 상당히 增加시킬지라도 前者들에 比하여 많이 改善된 것이다. 直交多項式의 切斷級數(Truncated series)로서 入力, 衝擊應答 및 出力을 展開한 調和 및 Meixner 多項式解析과 같은 方法은 代數學的 方法中 가장 좋은 結果를 준다.

表 1. 資料의 10%誤差가 單位圖에 미치는 效果

同定法	尖頭値의 %로서 나타낸 誤差의 絶對値 平均		
	誤差가 없는 資料	規則的 誤差	不規則的 誤差
直接解 경우 A	0.87×10^{-3}	1×10^{9}	2×10^{9}
〃 B	0.85×10^{-3}	251	964
〃 C	0.85×10^{-3}	27.0	45.5
最小自乘法	0.29×10^{-3}	6.6	21.15
調整法	3.1×10^{-3}	4.3	11.5
線形計劃法	0.48	11.6	23.1
多項式 :			
調和解析($n=9$)	3.4	5.3	7.8
Meixner($n=5$)	1.2	4.8	6.3
追跡法 :			
三角形	6.8	8.1	7.7
一連線形貯水池	2.8	6.0	5.2
擴散類推	7.0	8.0	7.4

여기서는 直交多項式에 依한 方法들을 除外한 모든 代數學的 方法들 中에서 많은 槪念的 方法들이 誤差를 除去하는데 상당히 좋은 結果를 줄 수 있다는 事實에 興味의 초점을 둘 것이다. 使用된 槪念的 模型들은 追跡된 二等邊三角形, 一連의 同等線形貯水池 및 擴散類推의 세가지이다. 이와 같은 槪念的 模型들이 誤差를 成功的으로 除去할 수 있는 것은 이 模型들이 지니고 있는 自動的 制約條件들 때문이다. 다시 말해서, 單位圖의 모든 面積은 1이 되어야 할 뿐만 아니라 尖頭値가 하나밖에 存在치 않는 單峯모양(Unimodal shape)을 이루고 있기 때문이다. 그러나 實際單位圖가 두개

의 尖頭値를 가지는 2峯모양(Bimodal shape)으로 이루어져 있다면 上記 세가지 槪念的 模型들이 調和 및 Meixner 多項式解析과는 匹敵될 수 있다는 것은 重要한 事實이다.

表 1에서 提示한 바와 같이, 誤差가 없는 資料들에 對하여 單位圖를 誘導했을 경우에 上記 言及된 多項式이나 追跡 및 擴散類推들과 같은 誤差除去方法들이 相對的으로 尖頭値의 誤差絶對값들의 平均値가 크게 나타나고 있다. 이는 濾過機構들이 誤差뿐만 아니라 信號의 部分도 除去해버리는 結果가 되기 때문이다. 이와 같은 現象은 實際的으로 그다지 重要한 것이라고 볼 수 없겠다. 왜냐 하면, 應用水文學者는 單位圖의 誤差를 어떤 採擇될 수 있는 基準下에 두고자 하는데 關心이 있지, 硏究者가 野外觀測이나 資料蒐集에서 얻기가 거의 不可能한 正確한 資料들에 對해서만 얻을 수 있는 高度의 正確性에는 그다지 關心이 없기 때문이다.

3.4 形狀係數圖의 使用

採擇된 槪念的 模型의 媒介變數들을 適正化하는 問題에서 資料誤差에 對한 安定性의 觀點에서 볼 때, 表 1의 結果들은 選擇된 모든 세가지 模型들이 合理的으로 이를 잘 遂行하고 있음을 提示하고 있다. 끝으로, 使用코자 하는 槪念的 模型을 選擇하는데, 있어서 어떤 法則이 있는지에 對하여 알아 본다.

따라야 할 첫번째 法則은 可能한 限 적은 媒介變數들을 使用하는 것이다. 媒介變數들을 可能한 限 적게 한다는 것은 媒介變數當 情報量을 增加시키게 될 것이므로 媒介變數値를 더욱 더 正確하게 決定할 수 있다는 것과, 또한 流域特性値들과 함께 얻어진 값들에 더 많은 信憑性 있는 關係를 주게 될 것이다. 本 討論에서는 媒介變數들의 數에 따라서 形狀係數圖(Shape facfor diagram) 上에서 集水擧動이 어떻게 模擬되어지느냐에 對하여 說明이 되어질 것이다.

하나, 둘 또는 세개의 媒介變數들을 가진 槪念的 模型들을 無次元 2次積率 S_2에 對하여 無次元 3次積率 S_3를 프랏트(Plot)한 形狀係數圖上에 便利하게 나타낼 수 있다. 따라서, 無次元積率 또는 形狀係數들을 式 (29)와 같이 定義할 수 있다.

$$S_R=\frac{U_R}{(U_1')^R} \quad\cdots\cdots(29)$$

위 式에서 U_R은 重心에 關한 R次積率이며, U_1'는 原點에 關한 1次積率이다. 1-媒介變數模型은 이 圖上에서 한 개의 點으로 나타나고, 2-媒介變數는 線으로, 또한 3-媒介變數는 面 또는 直線群으로 나타나게 될 것이다.

一旦 集水面積上의 어떤 特定豪雨의 單位圖에 對한 積率이 알려지기만 한다면, 이와 같은 單位圖의 積率이 形狀係數圖上에서 프랏트하여 表示할 수 있다. 만약 數 많은 流域들로부터의 資料蒐集이 可能하다면 形狀係數圖上에 그들을 프랏트할 수 있고, 그 結果들로부터 여러가지 槪念的 模型들의 適用可能性을 判斷할 수 있다. 만약 誘導된 單位圖의 積率에 對하여 프랏트된 모든 點들이 圖上의 한 點 周圍에 뭉쳐져 있다면, 바로 그 點에 依하여 推定된 1-媒介變數模型이 모든 單位圖를 나타내기에 充分할 것이다. 만약 點들이 線을 따라서 프랏트되어진다면, 모든 點들에 가깝게 通過하는 形狀係數圖上의 特性線(Characteristic line)의 槪念的 模型이 滿足할 만한 模型이 될 것이다. 만약 프랏트된 點들이 形狀係數圖上의 領域을 채운다면, 이 領域을 組成할 수 있는 단지 3-媒介變數가 모든 이와 같은 水文曲線들을 模型化하는데 適合할 것이다. .

實際的으로 비록 單位圖가 1-媒介變數槪念的 模型들에 依하여 滿足스럽게 나타내어질 수 없다고 할지라도 어느 程度까지는 流出이 1-媒介變數模型에 依하여 再現될 수 있다는 것은 特異할 만 하다. 1-媒介變數槪念的 模型들의 경우조차도 擇할 수 있는 여러가지 種類가 있다. 이에 關한 模型들 가운데 線形水路와 같은 純粹遷異(Pure translation)에 根據를 둔 槪念的 模型이나, 純粹貯溜擧動 및 擴散類推에 依한 槪念的 模型들을 생각할 수 있다.

有效雨量과 直接豪雨流出 사이에 關係를 맺는 2- 또는 3-媒介變數의 槪念的 模型들이 實測資料들을 서로 結合시키는 面에서 1-媒介變數模型보다 훨씬 더 柔軟하다는 것은 當然하다. 그러나 多數의 경우에 媒介變數를 增加시켜서 얻어진 改善點이 期待보다도 훨씬 못 미친다는 것을 Dooge와 O'Kane(*1977, pp. 277～293)가 Sherman(1932)과Nash(1960)의 資料들을 引用하여 提示하였다.

參 考 文 獻

1. Ciriani, T.A., U. Maione and J.R., Wallis(editors)(1977), *Mathematical Models for Surface Water Hydrology*, Proceedings of the Workshop at the IBM Scientific Center, Pisa, Italy, John Wiley & Sons
2. Kendall, M.G. and A. Stuart(1958), *The Advanced Theory of Statistics Vol.1*, Chapter Ⅲ, Moments and Cumulants.

3. Laurenson, E.M. and T. O'Donnell(1969), „*Data Error Effects in Unit Hydrograph Derivation,* "Proc. ASCE. 95, HY6, pp.1899—1917.

4. Nash, J.E. (1960), "*A Unit Hydrograph, with Particular Reference to British Catchments,* "Proc. the Institution of Civil Engineers, 17, pp·249～282.

5. Sherman, L.K. (1932), "*Stream Flow from Rainfall by the Unit-graph Method,*" Engineering News Record, 108, pp.501～505.

지난號 (18卷 3號)의 揭載內容中 誤字는 다음과 같이 바로 잡읍니다.

※ 欄의 指定은 上段에서부터

페이지 및 欄	誤	正
199, 左便 19줄	單位	單位圖
201, 左便 10줄	正義	定義
201, 右便 15줄	∝	i
199, 左便 29줄	單位 hp	單位圓 hp