〈講 座〉

貯水池 操作(Ⅱ)

權 五 憲*

4. 시스템 解析技法

4.1 定義 및 最適化 基礎

1) 用語의 定義

"시스템 工學"이란 各種 規約, 즉 法律, 道德, 經濟, 資源, 政治社會的 壓力 및 物理的, 生態的 支配規則 또는 기타 自然科學의 法則等의 制約 속에서 意思決定者의 目標를 가장 훌륭하게 充足시킬 수 있도록 여러가지의 妥當한 代案中에서 最適案을 가려내는 技術, 科學, 또는 工學等으로 定義 될 수 있다. 다시 말하면, 自由度의 數가 1보다 큰 問題를 取扱하는 學問이라고 할 수 있다.

"目的函數 또는 評價函數"란 狀態變數의 初期條件, 시스템의 媒介變數, 運營政策이 주어진 가운데 시스템으로부터 決定되는 成果 即, "利益이나 損失"을 말한다.

"決定(制御)變數"란 그림 3과 같은 시스템에서 完全 또는 部分的으로 制御 可能한 變數를 말하며 貯水池 模型에서는 흔히 貯水池 放流量을 이것으로 取扱하지만 放流量과 貯溜量은 1對1 寫像일경우 貯溜量을 決

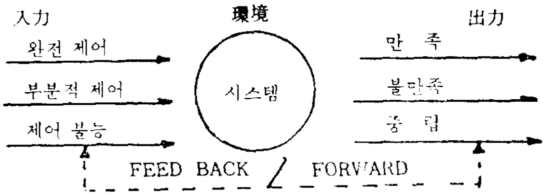

그림 3. 시스템의 개념

定變數로 할 수도 있다.

"政策, 方針, 운영률(Policy)"이란 各 決定變數에 特定의 값이 賦與된 일련의 決定事項을 말한다.

"妥當解(feasible solution)"란 시스템의 制約條件을 모두 만족하는 政策을 말하며 반드시 最適解일 필요는 없다.

"convexity, nonconvexity"란 最適化의 充分條件의 必要性에 直接 關係되는 것으로 그 幾何學的 概念은 2次元 平面일 경우 그림 4와 같이 한 개의 直線이 항상 2點만을 交叉하면 convex, 그 이상이면 nonconvex 라고 한다.

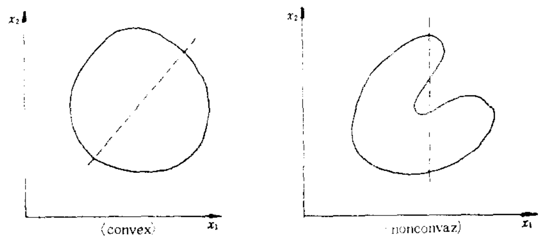

그림 4. convexity의 幾何學的 說明

多次元 函數 $y(x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n)$에 對한 convex 函數의 數學的 定義는 식(21)과 같다.

$$y\{ax_1+(1-a)x_2\} \leq ay(x_1), +(1-a)y(x_2), \quad \forall a(0,1) \cdots\cdots (21)$$

여기서 x_1와 x_2는 n-次元空間上의 점

식(21)에서 相對不等號대신 絶對不等號이면 $y(x)$는 strictly convex라 하며, convex함수란 직관적으로 볼때 오직 하나의 最小値만을 갖이므로 最適化問題에서 매우 번거로운 充分條件의 제시가 필요없게 되며,

* 忠南大學校 工科大學 副敎授(工博)

convex 와 부호가 다른 함수를 concave 라고 한다. "unimodal 함수"는 convex 또는 concave 와 유사하게 정의되지만 그 차이점은 다음과 같다. convex 와 concave 함수는 미분가능일 필요는 없지만 반드시 連續이어야 한다. 반면에 unimodal 함수는 연속적일 필요마저 없다.

"停滯點(stationary point)"이란 最大 또는 最小値에 대한 必要條件을 만족하는 점으로서 여기에는 최대, 최소 이외에도 水平點(Horizontal inflection point)이나 또는 saddle point 도 포함되므로 1계 도함수를 영으로 하는 것은 최대 또는 최소치의 充分條件은 될 수 없다.

2) 最適化 基礎

① 最大 및 最小値의 相應性

최소화문제는 1對1로 相應하는 최대화문제로 변환되며 그 반대도 마찬가지이다. 저수지조작에서 用水나 水力에 의한 利益을 最大化하는 問題는 저수지 시스템의 損失을 最小化하는 것과 同一한 解를 얻게된다. 이를 1차원 함수로 표시하면 式(22) 및 그림 5와 같다

$$min.\{y(x)\} = -max.\{-y(y)\} \quad \cdots\cdots(22)$$

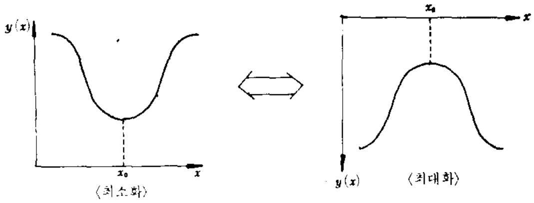

그림 5. 최대/최소 문제의 변환

② 1차원 함수의 최적조건

열린 區間 $a<x<b$에서 $Y(x)$가 정의될 때 한 내부점 x_0에 대하여; ⓘ $Y'(x_0)=Y''(y_0)=\cdots\cdots=Y^n(x_0)=0$이고 $Y^{(n+1)}(x_0)>0$ 일 때 n이 홀수이고 $y^{(n+1)}(x_0)<0$이면 $y(x)$는 x_0에서 相對最大(Relative maximum)이고; ⓘⓘ n이 홀수이고 $y^{(n+1)}(x_0)>0$이면 相對最小이다. ⓘⓘⓘ n이 짝수이면 $y(x)$는 x_0에서 水平點을 갖게 된다.

③ 多次元 函數의 최적조건

다차원 함수 $y(\underline{x})$를 $\underline{x}_0$에 대하여 테일러 급수로 전개하게 되면,

$$y(\underline{x}) = y(\underline{x}_0) + \nabla y|\underline{x}_0(\underline{x}-\underline{x}_0) + \frac{1}{2}(\underline{x}-\underline{x}_0)^T H x_0 (\underline{x}-\underline{x}_0) + \cdots\cdots(23)$$

여기서 H는 Hessian matrix 로서,

$$H = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots\cdots & \frac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 y}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2} & \cdots\cdots & \frac{\partial^2 y}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial^2 y}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 y}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots\cdots & \frac{\partial^2 y}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$$

한점 $\underline{x}_0$가 정체점일 경우 $\nabla y|\underline{x}_0 = \theta$이므로 式(23)에서 高階項을 무시하면,

$$y(\underline{x}) = y(\underline{x}_0) + \frac{1}{2}(\underline{x}-\underline{x}_0)^T H|\underline{x}_0(\underline{x}-\underline{x}_0) \quad \cdots\cdots(24)$$

따라서

ⓘ $(\underline{x}-x_0)'H|\underline{x}_0(\underline{x}-\underline{x}_0) \leq 0 \ \forall x \neq x_0$일 경우 $y(\underline{x}_0)$는 最大이며,

ⓘⓘ $(\underline{x}-\underline{x}_0)^T H|\underline{x}_0\ (\underline{x}-\underline{x}_0) \geq 0 \ \forall x \neq x_0$인 경우에 $y(x_0)$는 最小이다.

④ 制約條件 시스템의 最適化(라그랑즈 승수).

목적함수가 $y(x_1, x_2)$이고 제약조건이 $g(x_1, x_2)=0$일 때 Lagrange multiplier λ를 도입하여 다음과 같이 새로운 無制約 函數式으로 변환할 수 있다.

$$z(x_1, x_2, \lambda) = y(x_1, x_2) + \lambda g(x_1, x_2) \quad \cdots\cdots(25)$$

여기서 λ는 常數로서 未知임.

식(25)의 최적화를 위한 필요조건은,

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial x_1} &= \frac{\partial y}{\partial x_1} + \lambda \frac{\partial g}{\partial x_1} = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial x_2} &= \frac{\partial y}{\partial 4x_2} + \lambda \frac{\partial g}{\partial x_2} = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial \lambda} &= g = 0 \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots(26)$$

식(26)에서 λ를 소거하면

$$\frac{\partial y}{\partial x_1}\ \frac{\partial g}{\partial x_2} - \frac{\partial y}{\partial x_2}\ \frac{\partial g}{\partial x_1} = 0 \quad \cdots\cdots(27)$$

식(27)은 y와 g를 代置法으로 최적화한 조건식과 같다. 다시말하면 $g(x_1,x_2)$에서 $x_2=h(x_1)$으로 하고 $y(x_1,x_2)$를 $y(x_1,h)$로 대치하였을 때 $dy=0$일 조건식과 同一하다. 이는 라그랑즈 승수에 의한 擴張式의 최적화에 대한 妥當性을 직관적으로 이해할 수 있도록 증명한 것이다. 이상을 다차원 공간에서의 일반식으로 나타내면,

$$z(x_1, x_2 \cdots\cdots x_n, \lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_m) = y(\underline{x}) + \underline{\lambda}^T g(\underline{x}) \cdots(28)$$

식(28)에서 $\underline{\lambda}$는 라그랑즈 승수의 벡터로서 상태변수 $\underline{x}$에 對比하여 공액상대벡터(Costate vector)라고도 불리며 그 차원은 m이고 $m \leq n$이다.

확장함수 z가 極値(최대 또는 최소)를 갖일 必要條件은

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x_k}=\dfrac{\partial y}{\partial x_k}+\sum_{i=1}^{m}\lambda i\dfrac{\partial gi}{\partial x_k}=0, \quad k=[1,n] \cdots\cdots(29) \\ \dfrac{\partial z}{\partial \lambda_i}=g_i=0, \qquad i=[1,m] \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(30) \end{cases}$$

식(29), (30)은 $(n+m)$개의 방정식이고 未知數의 수효 역시 $(n+m)$이므로 풀 수 있다. 다만 이 식은 y의 값이 極値이라는 보장은 없으며 더구나 라그랑즈 함수는 原函數가 주어진 제약조건에서 極値를 나타낼 때 식(31)과 같이 saddle point를 나타낸다.

$$\max_{\underset{\sim}{x}} z(\underset{\sim}{x},\underset{\sim}{\lambda}_0)=\min_{\underset{\sim}{\lambda}} z(\underset{\sim}{x}_0,\underset{\sim}{\lambda}) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(31)$$

즉 $z(\underset{\sim}{x}_0,\underset{\sim}{\lambda}_0)$는 $\underset{\sim}{x}$에 관해서는 最大値, $\underset{\sim}{\lambda}$에 대해서는 最小値이므로 이를 雙對性(dual)이라 한다.

라그랑즈 함수의 최적화에 대한 必要 및 充分條件과 수학적 근거는 여러 참고문헌에서 찾아볼 수 있다.

⑤ 추적법에 의한 1차원 함수의 최적화

제약조건이 없는 1차원 함수의 최적치를 발견하는 방법은 크게 sequential method와 random-search technique로 나눌 수 있으며 이 방법은 함수의 unimodal을 전제하고 있으므로 multi-model인 경우에는 小區間으로 구분하여 적용해야 한다. 여기서는 가장 흔히 쓰이는 Fibonacci search만을 간단히 소개한다. 그림 6은 unimodal 함수에서 극치를 포함하는 구간 L_n을 표시하며, 조사구간은 $L_1=b-a$라고 할 때 최대치 $y(x_i)$를 포함하는 조사구간 L_n을 좁혀가는 기법으로서 편익과 비용차에 의한 댐의 최적규모결정에 이용할 수 있는 기법이다. 수렴조건은 L_n의 폭이나 또는 $|y(x_i)-y(x_{i-2})|$의 값으로 한다.

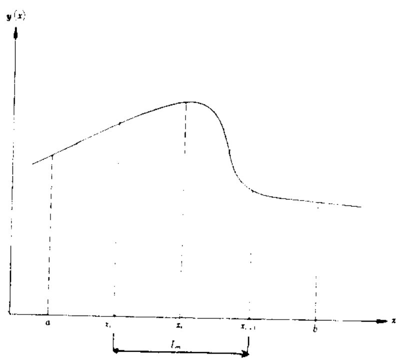

그림 6. 조사구간의 분할

조사구간의 축소는 식(32)와 같다.

$$L_n=\frac{1}{F_n}L_1 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(32)$$

여기서 F_n은 피보나치수로서, 식(33)과 같다.

$$\left.\begin{aligned} &F_0=1 \\ &F_1=1 \\ &F_n=F_{n-1}+F_{n-2}, \quad n\geq 2 \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(33)$$

⑥ 傾斜法에 의한 多次元 最適化 : Steepest Ascent

그림 7과 같은 2차원 문제에서 무제약조건으로 초기점에서 極値點을 추적하는 길을 S라고 할 때 정점에 가장 빨리 도달하는 과정은 dy/ds가 최대인 길을 선택하는 것이다. 즉 등고선(목적함수)에 직각방향으로 경로를 선택하면 된다.

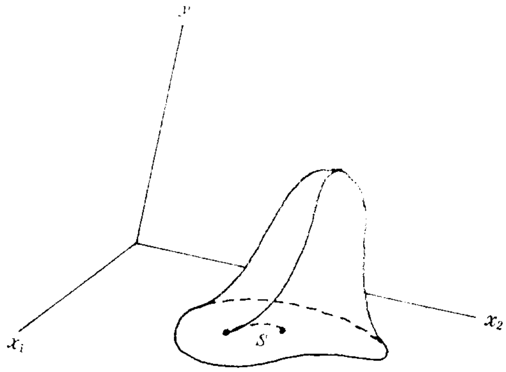

Fig 7. Shortest Payh to Maximum

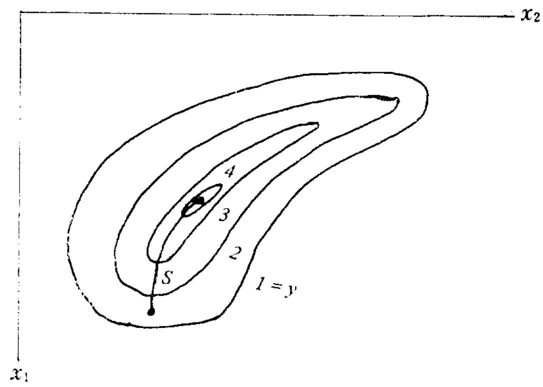

Fig 8. Projection of Shortest Path in the x_1-x_2 Plane

이를 다차원 공간에서 수학적으로 나타내면 연쇄법칙(Chain rule)에 의하여,

$$\max\frac{dy}{ds}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial y}{\partial x_i}\frac{dx_i}{ds} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(34)$$

제약조건으로는 피타고라스정리를 일반화하면 $(ds)^n$

$=\sum_{i=1}^{n}(dx_i)^2$ 이므로 식(35)와 같다.

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{dx_i}{ds}\right)^2=1 \quad \cdots\cdots\cdots(35)$$

이를 라그랑즈 함수로 확장하면,

$$Z\left(\frac{dx_1}{ds},\ \frac{dx_2}{ds},\ \cdots\cdots,\ \frac{dx_n}{ds},\ \lambda\right)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial y}{\partial x_i}$$

$$\frac{dx_i}{ds}+\lambda\left\{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{dx_i}{ds}\right)^2-1\right\} \quad \cdots\cdots\cdots(36)$$

식(36)을 $\dfrac{dx_i}{ds}$ 에 관하여 편미분을 하여 영으로 놓고 정리하면,

$$\frac{dx_i}{ds}=\pm\left\{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial y}{\partial x_i}\right)^2\right\}^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial y}{\partial x_i},\ i=[1,n] \quad \cdots(37)$$

이 식에서 陽의 부호를 택하여 식(34)에 대입하면,

$$\frac{dy}{ds}=\left\{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial y}{\partial x_i}\right)^2\right\}^{-\frac{1}{2}} \quad \cdots\cdots\cdots(38)$$

식(37)에서 陰의 부호를 택하면 最小化 問題에 대한 下降率이 된다. 식(37)을 差分化하여 최대화 문제를 定式化하면 식(39)와 같다.

$$\underset{\sim}{x}^*_{k+1}=\underset{\sim}{x}_k+\{(\nabla y)^T(\nabla y)\}^{-\frac{1}{2}}\nabla\underset{\sim}{y}\triangle s \quad \cdots\cdots\cdots(39)$$

여기서

$$\underset{\sim}{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix},\quad \nabla\underset{\sim}{y}=\begin{pmatrix}\partial y/\partial x_1\\\partial y/\partial x_2\\\vdots\\\partial y/\partial x_n\end{pmatrix}$$

식(39)를 더 단순화하면,

$$x^*_{k+1}=\underset{\sim}{x}_k+\nabla y\triangle\tau \quad \cdots\cdots\cdots(40)$$

여기서 $(\nabla y)^T(\triangleleft y)$는 $\triangle\tau$로 압축되었으며 任意의 크기를 갖는다. 그림 9는 式(40)에 의하여 초기점 X_0로 부터 출발하여 等高線의 직각방향으로 진행하여 극치점 $\underset{\sim}{x}_7$에 이르는 추적과정을 나타내고 있으며 最小化 問題는 $\nabla\underset{\sim}{y}\triangle\tau$의 부호를 陰으로 한다. 이 方法에서 step size $\triangle\tau$는 任意로 결정하는데 이를 약간 개선하기 위하여 1次元 함수의 최적화 기법인 fibonnaci search 기법을 응용하는 optimal steepest ascent 기법이 그림 10에 표시된다.

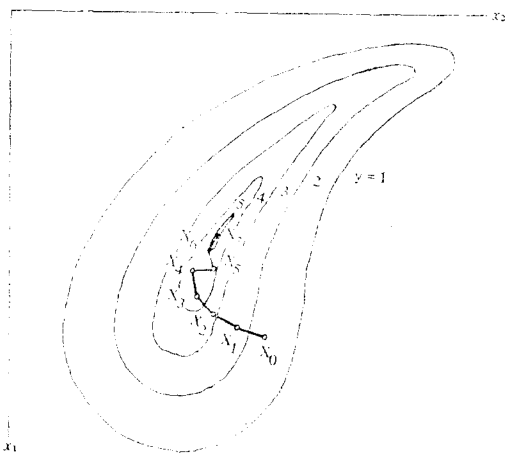

Fig 9. Schematic Representation of Steepest Ascent Procedure

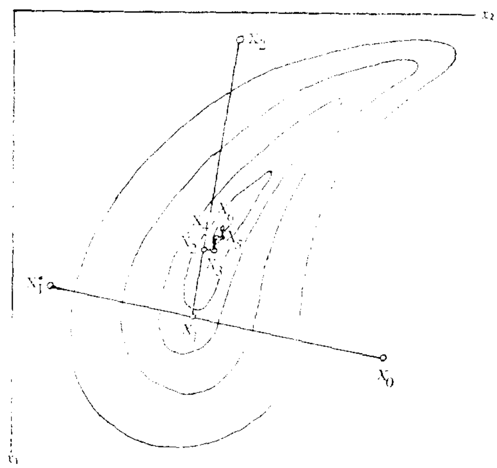

Fig 10. Schematic Representation of Optimal Steepest Ascent Procedure

7. 其 他

多次元 問題의 最適化 技法의 기본개념은 앞에 설명한 steepest ascent(descent)이지만 이 방법은 계산량으로 볼때 非効率的이다. 이를 보다 改善한 技法으로는 Hestenes 等[13]이 최초로 제시한 공액경사법(Conjugate gradients)으로서 추적벡터(Search vector)를 현

13) Hestenes M.R., and Steifel E., "Method of Conjugate Gradients for solving Linear systems, "Nat, Bur. Std. Report, No. 1659(1952).

재의 경사벡터와 前段階의 경사벡터의 함수로 나타내었다. 傾斜法 중 매우 우수한 기법으로서 Davidon[14]이 최초로 제안한 variable matric algorithm이 있으며 2階函數(Quadratic function)일 경우 *n-step* 以內에서 최적점을 찾게 된다. 이 技法을 뒤에 Flecher and powell[15]이 더욱 개량하였으며, 無制約의 連續, 微分可能함수의 최적화에 가장 효과적으로, 할 수 있으며 전산 프로그램 팩케이지로 쉽게 이용할 수 있다. 그 밖에도 quasi-Newton method, pattern search, randon search. 등의 여러 기법등이 있다.

4.2. 線型計劃(Linear Programming)

1) 問題의 定式化

선형계획기법은 목적함수나 제약조건이 모두 線型이어야 한다. 저수지 조작문제는 일반적으로 비선형적이므로 이를 선형적으로 나타내기가 용이하지는 않으나 그 해법이 단순하므로 實時間 操作問題에 적용되기도 한다. 선형적인 목적함수나 제약조건을 벡터로 표시하면,

$$O.F.\quad y = \underset{\sim}{c}^T \underset{\sim}{x} \qquad \cdots\cdots(41)$$

$$s.t.\quad \left.\begin{aligned} A\underset{\sim}{x} &= \underset{\sim}{b} \\ \underset{\sim}{x} &\geq \theta \end{aligned}\right\} \qquad \cdots\cdots(42)$$

여기서

$$\underset{\sim}{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad \underset{\sim}{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \qquad \underset{\sim}{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

식(41), (42)에서 $\underset{\sim}{x}$, $\underset{\sim}{c}$ 벡터는 n차원으로 변수의 數와 같으며 $\underset{\sim}{b}$는 m차원으로 제약조건식의 數이며, A는 $m \times n$ 行列이다. $(n > m)$

식(42)의 제약조건식은 일반적으로 不等號로 표시되는 식을 흔히 포함하게 되는데 假想의 변수(Slack and surplus variable)을 넣어 等式化한 것이다.

2) 線型計劃法의 幾何學的 特性

간단한 2次元 문제를 예로 하여 최대화할 경우를 생각하여보자.

$$\begin{aligned} max\quad & y = x_1 + x_2 \\ s.t.\quad & x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ & 2x_1 + x_2 \geq 8 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

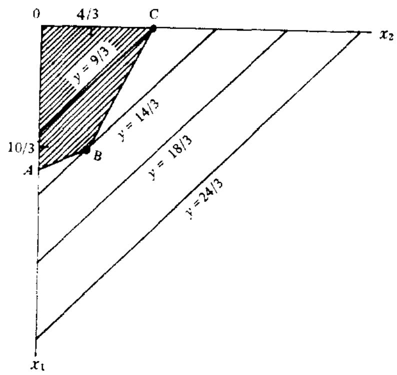

Fig 11. Graphical Solution of Two-Dimensional Linear Program

이 식들을 그림 11에서 살펴보면 斜線部分(OABC)이 제약조건을 만족하는 妥當域(Feasible region)으로서 그 解는 일반적으로 꼭지점(O,A,B,C) 이나 또는 경계직선에 存在하게 된다. 이 문제에서는 꼭지점 $B\left(\frac{10}{3}, \frac{4}{3}\right)$에서 목적함수 $y = \frac{14}{3}$가 最大値를 갖게 된다.

3) Simplex Algorithm

선형계획문제에서 最適解(Optinal feasible Solution)는 타당역의 경계선이나 꼭지점에 존재한다는 것을 앞의 예에서 직관적으로 알 수 있었다.

多次元 空間上에서 가장 빠르게 極點을 찾는 技法으로서의 Dantzig[16]의 Simplex 해법이 있다. 그 概要는 다음과 같다. 선형계획문제를 標準型(Standard form)으로 표시하면,

$$\begin{aligned} min\ z &= d + \underset{\sim}{C}^T \underset{\sim}{x} \cdots\cdots(\text{最小化}) \\ s.t.\quad A\underset{\sim}{x} &= \underset{\sim}{b} \cdots\cdots(\text{等號制約}) \\ \underset{\sim}{x} &\geq \theta \cdots\cdots(\text{non-negative}) \end{aligned}$$

여기서 A, $m \times n$ 行列인데 임의의 j번째 列(Column)을 Aj로 표시하면, Aj는 m-벡터가 된다.

$s = [s_1, s_2, \cdots\cdots, s_k)$를 整數(Integer)의 系列로 표시할 때, As 行列은 As_1, $As_2, \cdots$, As_k의 列로 構成된다. 다시말하면,

14) Davidon, W.C., "Variable Metric Method for Minimization," A.E.C. Research and Development, ANL-5990(1959).

15) Fletcher R., and powell M.J.D., "A Rapidly Convergent Deccent Method for Minimzation," Computer J., 6(1963-1964).

16) Dantzig G.B., *Linear Programming and Extension*, Princeton University Press, Princeton, N.J. (1963).

$$A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 4 & 7 & 0\\ 3 & 5 & 8 & 1 & 1\\ 0 & 3 & -4 & -1 & 3\end{pmatrix}$$ 이고 $S=[3, 1, 4]$ 일 경우,

$$As=\begin{pmatrix}4 & 1 & 7\\ 8 & 3 & 1\\ -4 & 0 & -1\end{pmatrix}$$ 을 뜻한다.

선형계획법에서 基本系列(Basic sequence)에 대한 Canonical form이란 다음 조건을 충족함을 말한다.

ⓘ 標準型일 것.

ⓘⓘ 行列 A_S는 $m\times m$ 單位行列 (Identity matrix)일 것.

ⓘⓘⓘ 費用係數 C_S는 모두 零일 것.

ⓘⓥ 右邊項 b는 영보다 작지 않아야 함.

變數中 영이 아닌(non-zero) 변수를 basic variable, 영인 변수를 non-basic variable이라고 부른다. m개의 未知數를 갖는 m個의 方程式을 풀기 위하여 비용행렬 A,에서 m個의 列을 필요로 하는데 이 변수는 線型的으로 獨立이어야 한다. 즉 이러한 m벡터는 m次元의 유크리드 공간, E^m,을 설정하기 위한 기본좌표축(Basic, nonzero)이 되어야 한다.

이상에서 설명한 것을 토대로 심프렉스 해법을 간단한 數值列[17]로서 살펴본다.

i) 原問題

$$max\ z=25x_1+5x_2$$

$$\begin{aligned} s.t.\quad & x_1+2x_2\leq 10\\ & x_1-x_2\leq 3\\ & 3x_1+2x_2\leq 14\\ & x_1, x_2\geq 0\end{aligned}$$

ii) 標準型化

$$min\ Z'(=-Z)=-25x_1-5x_2$$

$$\begin{aligned} s.t.\quad & x_1+2x_2+x_3 &&=10\\ & x_1-x_2 \quad +x_4 &&=3\\ & 3x_1+2x_2 \quad +x_5 &&=14\end{aligned}$$

여기서 x_3, x_4, x_5는 slack variable 임.

이를 표〈table〉로 만들면;

1	−25	5	0	0	0	0
0	1	2	1	0	0	10
0	1	−1	0	1	0	3
0	3	2	0	0	1	14

이 문제는 標準型으로서 基本行列 $S=[3,4,5]$에 대하여 canonical form을 이루고 있다. 즉 non-basic은 x_1, x_2이고 basic은 x_2, x_4, x_5이므로 기본적인 타당해는 $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)=(0, 0, 10, 3, 14)$임을 알 수 있다(標準型의 제약조건식 참조).

이렇게 결정된 한 점으로부터 최적해를 구하기 위하여 E^m 공간의 또 다른 꼭지점을 조사하는데는 목적함수를 가장 신속히 最小化하는 方向을 선택해야 한다. 다시 말하면 비용계수 C 가운데에서 가장 적은(Max negative) $C_1=-25$를 택한다(Entering). 여기서 C_i의 下添字를 $k=1$로 놓자. 다음에는 basic variable에 X_1이 들어오는 대신 버려야 할 변수를 x_3, x_4, x_5 중에서 발견해야 한다.

$$\min_i\{b_i/a_{ik}\,|\,a_{ik}>0\},\ i=1,2,3$$

$$=min\left\{\frac{10}{1},\ \frac{3}{1},\ \frac{14}{3}\right\}=\frac{3}{1}=3$$

x_1을 증가시키면 가장 큰 폭으로 목적함수가 감소하는데 x_1의 上限値는 3이며 두번째 行 $k=2$인 변수 $x_4=0$이 되어 non-basic이 된다(Leaving).

다음 $a_{ik}=a_{21}=1$에 대하여 pivoting(가우스의 소거법)으로 정리하면 다음 표가 된다.

1	0	−30	0	25	0	75
0	0	3	1	−1	0	7
0	1	−1	0	1	0	3
0	0	5	0	−3	1	5

이 표는 $s=[3,1,5]$에 대하여 canonical form이되며 타당해는$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)=(3, 0, 7, 0, 5)$이고 $Z'=-75$로서 먼저$(Z'=0)$보다 改善되었음을 알 수 있다. 다시 $C_2=-30$이므로 $X_2(k=2)$를 택하고(Entering),

$$\min_i\{b_i/a_{ik}\,|\,a_{ik}>0\}$$

$$=min\left\{\frac{7}{3},\ -,\ \frac{5}{5}\right\}=\frac{5}{5}=1$$ 이므로

$k=3$, x_5는 leving 이므로 $a_{ik}=a_{32}=5$에 대하여 pivoting 하면,

1	0	0	0	7	6	105
0	0	0	1	4/5	-3/5	4
0	1	0	0	2/5	1/5	4
0	0	1	0	-3/5	1/5	1

기본계열 $s=[3,1,2]$는 단위행렬로 basic이고 나머지는 nonbasic(즉 zero)이므로 타당해는$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)=(4, 1, 4, 0, 0)$이다. 이때 陰의 費用係數가 없으므로 $[c_j\geq 0,\ \forall j]$ 더 이상의 最小化는 없다. 따라서 이

17) Subelman, E.J., *Linear Programming*(Ⅰ), Lecture Note, UCLA(1982).

타당해는 최적해이고 그 값은 $z=-z'=105$이다.

以上은 심플렉스 해법을 간단히 살펴본 것이며, degenerate, 等號制約 問題에 대한 Phase Ⅰ, Ⅱ, multiple solution, lexicographic algorithm, 또는 post optimal analysis, dual 등 여러 문제가 언급되어야 하지만 이를 참고서적으로 미룬다. 다만 위의 계산과정에는 불필요한 연산이 많이 포함되어 있으므로 대형문제를 전산기로 풀기 위한 개선방법이 있는데 이를 修正 심프렉스 해법(Revised simplex algorithm)이라 하며 여러가지로 전산프로그램이 개발되어 있다.

4.3 非線型計劃(Nonlinear Programming)

비선형계획(NLP)이란 목적함수나 제약조건 중 비선형식이 포함된 문제를 말한다. 여기서는 제약조건의 비선형문제 해법을 살펴보기 위하여 부등호제약에 대한 1계 필요조건으로서 Kuhn-Tucker 조건과 傾斜投影法을 간단히 설명한다.

1) Kuhn-Tucker Conditions[18]

만일 $\underset{\sim}{x}^*$가 다음 문제에 대한 相對最小이고,

$$\left.\begin{array}{ll} min.\ f(\underset{\sim}{x}) & \\ s.t.\ \ h(\underset{\sim}{x})=\theta & (m\ \text{차원}) \\ \quad\ \ g(\underset{\sim}{x})\leq\theta & (P\ \text{차원}) \end{array}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots(43)$$

그리고 또한 $\underset{\sim}{x}^*$가 제약조건에 대하여 regular point[19]이라면 다음을 만족하는 벡터 $\lambda\epsilon E^m$, $\mu\epsilon E^P$, $\mu\geq\theta$가 존재한다.

$$\left.\begin{array}{r} \nabla f(\underset{\sim}{x}^*)+\underset{\sim}{\lambda}\nabla h(\underset{\sim}{x}^*)+\mu'\nabla \underset{\sim}{g}(\underset{\sim}{x}^*)=\theta \\ \mu'\underset{\sim}{g}(\underset{\sim}{x}^*)=\theta \end{array}\right\} \cdots\cdots\cdots(44)$$

〔計算例〕

$$min.\quad 2x_1^2+2x_1x_2+x_2^2-10x_1-10x_2$$

$$s.t.\quad x_1^2+x_2^2\leq 5$$

$$3x_1+x_2\leq 5$$

제약조건 외에 1계 필요조건은,

$$4x_1+2x_2-10+2\mu_1x_1+3\mu_2=0$$

$$2x_1+2x_2-10+2\mu_1x_2+\mu_2=0$$

$$\mu_1\geq 0,\quad \mu_2\geq 0$$

$$\mu_1(x_1^2+x_2^2-5)=0$$

$$\mu_2(3x_1+x_2-6)=0$$

이를 여러가지 경우에 따라 풀면 $(x_1, x_2, \mu_1)=(1, 2, 1)$의 해를 얻게 되며 이때, 목적함수는 $3x_1+x_2=5$가 된다.

이와같은 최적화 조건식에 대한 幾何學的 說明은 다음의 경사투영법의 최적해에서 볼 수 있듯이 제약조건과 경사벡터가 直交性(Orthogonality)이라고 할 수 있다.

2) 傾斜投影法(Gradient projection method)[20]

다음의 계산 예에 대한 해법을 그림 11에서 살펴보자

$$O.F.\ \ min\, f(y_1, y_2)\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(45)$$

$$\left.\begin{array}{ll} s.t. & 2y_1-5y_2+10\geq 0 \\ & -4y_1-7y_2+22.5\geq 0 \\ & -9y_1-2y_2+26.5\geq 0 \\ & y_1\geq 0,\ \ y_2\geq 0 \end{array}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(46)$$

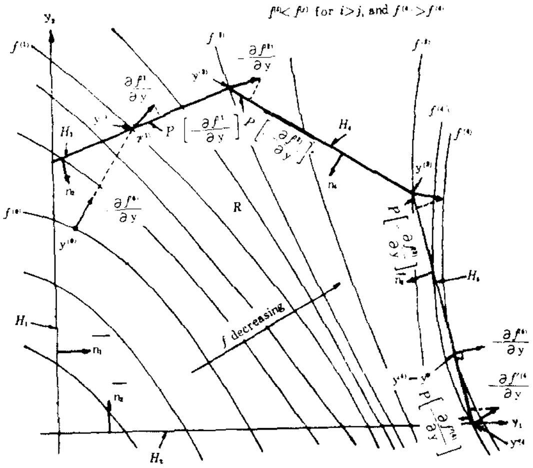

Fig 12. Gradient Projection Minimization of a Function of two Variables

그림 12에서 y_1, y_2축과 3개의 직선으로 싸인 부분은 제약조건식(46)을 만족하는 허용구역(Admissble region)이다.

초기점 $y^{(0)}$이 허용구역내에 존재한다면 이로부터 목적함수에 대한 경사벡터를 따라 경계면 H_3와의 교점 $y^{(1)}$을 구하고 여기서 다시 경사벡터(반대방향)를 H_3에 투영하여 진행하면 경계면 H_4에서 $y^{(2)}$에 도달한다. 이와같이 진행하여 경사벡터는 제약조건에 직교되는 $y^{(4)}$에서 최적치를 얻게된다. 여기서 목적함수가 선형(直線)이라면 선형계획문제로서 심프렉스해법은 비선형계획의 특수 경우임을 알 수 있다.

18) Kuhn, H.W., and Tucker, A.W., "Nonlinear Programming," in Proceed. of the Second Berkely Symposium on Mathematical Statistics and Probability, Neyman(ed.), Univ. of Calif. Press, Berkeley and Los Angeles, Calif. 481—492. (1961).

19) Luenberger, D.G., *Interoduction to Linear and Nonliner Programming*, Addison-Wesley Pub. Co., 1973. p. 223.

20) Kink, D.E., Optimal Control Theory, Prentice-Hall, 1970, 373—408.