〈講　座〉

KALMAN FILTERING 技法 (1)

徐　炳　夏*

1. 서　론

Kalman filtering 技法은 1960年에 Kalman이 그 理論을 전개한 이래로 制御通信분야는 물론 經濟學 및 地球物理學에 이르기까지 광범위하게 응용되고 있으며 특히 최근에는 水文學과 水資源工學분야에 활발히 적용되고 있다[O'Connell and Clarke, 1980]. 이 技法이 연속적 最適推定(optimal sequential estimator)의 성질을 가지고 있으며 狀態空間概念(state-space concept)을 도입하여 時間領域에서 模型形成하므로 수학적으로 다루기 쉬운점 등 많은 장점을 가지고 있기 때문에 널리 활용되고 있다[Szöllösi-Nagy, 1976; Weiss, 1980].

최초로 소개된 Kalman filter이론[Kalman, 1960; Kalman and Bucy, 1961]은 시스템 및 計測誤差의 統計値들이 事前에(a priori) 알려져 있다고 가정하고 있다. 그러나 실제문제에서는 시스템의 복잡한 動的擧動과 變化때문에 이들 統計値들을 파악하기가 쉽지 않다. 그러므로 그들이 時不變하다는 가정하에 經驗的資料의 分析이나 컴퓨터 시뮬레이션을 행하여 事前統計値(a priori statistics)들을 결정한다. 이 경우를 非適應(non-adaptive) filtering이라고 하며 誤差가 時不變한 시스템에만 적용할 수 있다. 한편 事前統計値들이 時間에 따라 變한다고 알려져 있을 때에는 이 filter의 성취도는 만족할 수 없다. 그래서 원래의 Kalman filter 理論을 확장하여 filter의 誤差統計値들을 recursive하고 adaptive하게 계산하고 동시에 시스템의 狀態를 推定할 수 있는 適應 Kalman filter 알고리즘이 개발되었다. 여기에서는 Kalman filtering 技法의 基本的인 理論을 전개하고 離散分布를 이루며 推計動的擧動을 가진 線型시스템(discrete, stochastic dynamic, linear systems)의 狀態推定과 制御問題를 위하여 수년동안 개발된 filtering 알고리즘을 소개하고저 한다.

2. Kalman Filter 理論

2.1. 狀態空間 模型形成

離散型이고 線型이며 動的인 시스템의 特性을 시스템의 狀態로 나타내고 벡터 X_t로 표시하자. 시간($t-1$)에서의 상태벡터 X_{t-1}의 값을 알면 현재시간 t에서의 X_t의 값을 결정할 수 있다고 가정하면 그러한 시스템은 다음과 같은 數式으로 표시할 수 있다[Kalman, 1960].

$$X_t=\Phi_{t-1}X_{t-1}+\Gamma_t\, w_t \cdots\cdots(1)$$

여기서 X_t=상태벡터($n\times1$)

Φ_{t-1}, Γ_t=遷移行列($n\times n$)

w_t=模型誤差($n\times1$)

시스템의 狀態가 時間에 따라 변하는 確定成分벡터 u_t에 의하여 勵起(excite)될 때에는 (1)식은 다음과 같이 고쳐 쓸 수 있다[Gelb, 1974].

$$X_t=\Phi_{t-1}X_{t-1}+\Lambda_t u_t+\Gamma_t\, w_t \cdots\cdots(2)$$

여기서 u_t=확정성분벡터($s\times1$)

Λ_t=遷移行列($n\times s$)

이들 (1)식이나 (2)식을 소위 시스템 혹은 過程 模型方程式이라고 한다.

水資源問題에서 洪水豫報와 같이 實時間(real-time)으로 처리되는 경우에는 벡터 X_t를 직접 관측할 수 없으므로 그 代身에 벡터 X_t와 計測誤差를 표시하는 벡터 v_t의 線型結合으로 나타낼 수 있는 計測벡터 Z_t를 도입한다. 이를 數式으로 표시하면 다음과 같은 計測 혹은 觀測方程式이 얻어진다.

$$Z_t=H_tX_t+v_t \cdots\cdots(3)$$

여기서 Z_t=計劃벡터($m\times1$)

H_t=計劃遷移行列($m\times n$)

v_t=計測誤差벡터($m\times1$)

어떤 시스템을 전술한 시스템 方程式과 計測 方程式으로 模型化할 경우를 狀態空間 模型形成(state-space formulation)이라고 부른다[O'Connell and Clarke, 19

* 本學會 代議員 仁荷工業專門大學 副教授(工博)

80]. 이와 같은 시스템 模型의 形成이 가능할 경우 計測值 $Z_1, Z_2, \cdots, Z_t$ 가 주어지면 시스템의 狀態 X_t 의 推定이 가능하며 計測誤差 때문에 X_t 의 측정이 불가능할때에 적용하고져 개발된 것이 바로 Kalman filtering 技法이다[Kalman, 1960].

2.2. Kalman filter 問題

計測誤差가 있기 때문에 시스템 狀態 X_{t-1} 은 시간 $(t-1)$까지의 計測值 $Z_1, Z, \cdots Z_{t-1}$ 이 주어질 때에만 그 값을 얻을 수 있다[Weiss, 1980]. 그리고 전술한 (1)식에 의하여 X_{t-1} 을 근거로 하여 X_t 를 豫測할 수 있다.

지금 시간 $t=0$ 에서의 X_0 의 추정치를 $\hat{X}_{0|0}$ 라고 한다면 (1)식에 의하여 시간 $t=1$ 에서의 X_1 의 예측치 $\bar{X}_{1|0}$ 를 다음식으로 나타낼 수 있다.

$$\bar{X}_{1|0}=\Phi_0\hat{X}_{0|0}+\Gamma_1\bar{w}_1.$$

여기서 $\bar{w}_1=(t=1)$에서의 平均模型誤差

그리고 $t=1$ 에서의 計測值 z_1 을 얻을 수 있다고 하면 (3)식은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$Z_1=H_1\bar{X}_{1|0}+\bar{v}_1$$

여기서 $\bar{v}_1=(t=1)$에서의 平均計測誤差

이식의 관계를 이용하여 X_1 의 豫測值 $X_{1|0}$ 를 수정하거나 filtering할 수 있는 관계식을 유도할 수 있다. 즉 X_1 의 예측치를 수정한 推定值를 $X_{1|1}$ 이라고 하면,

$$\hat{X}_{1|1}=\bar{X}_{1|0}+K_1(Z_1-H_1\bar{X}_{1|0}-v_1)$$

혹은,

$$\hat{X}_{1|1}=(I-K_1H_1)\bar{X}_{1|0}+K_1(Z_1-v_1)$$

로 쓸 수 있다.

여기서 K_1=加重因子(weighting factor)

I=單位行列

이상에서 시간 $t=0$ 에서의 情報만을 이용하여 시간 $t=1$ 에서의 시스템의 상태 X_1 의 豫測值 $X_{1|0}$ 를 얻을 수 있으며 시간 $t=1$ 에서의 計測值 z_1 을 추가적으로 얻게 되면 X_1 의 수정된 推定值 $\hat{X}_{1|1}$ 을 계산할 수 있다.

위의 관계들을 (1)식과 (3)식을 이용하여 시간 $(t-1)$에서의 X_t 의 豫測值와 시간 t 에서의 推定值를 각각 $\bar{X}_{t|t-1}$, $\hat{X}_{t|t}$ 라고 표시하여 一般化할 수 있다. 즉,

$$\bar{X}_{t|t-1}=\Phi_{t-1}\hat{X}_{t-1|t-1}+\Gamma_t\bar{w}_t \quad \cdots\cdots(4)$$

$$\hat{X}_{t|t}=\bar{X}_{t|t-1}+K_t(Z_t-H_t\bar{X}_{t|t-1}-\bar{v}_t) \quad (5a)$$

$$\hat{X}_{t|t}=(I-K_tH_t)\bar{X}_{t|t-1}+K_t(Z_t-\bar{v}_t) \quad (5b)$$

여기서 K_t 는 $\hat{X}_{t|t}$ 의 最良推定值(best estimate)를 얻을 수 있도록 주어지는 加重因子行列로서 filter 혹은 Kalman 利得(gain)이라고 불리워지는 것으로 Kalman filter 의 알고리즘을 전개하므로서 그의 最適值를 계산하는 식을 얻을 수 있다.

2.3. 模型誤差와 計測誤差

Kalman filter 를 전개하기전에 먼저 전술한 模型誤差 w_t 와 計測誤差 v_t 의 성질을 구명하기로 한다. 時間$(t-1)$까지의 狀態 $X_0, X_1, X_2, \cdots, X_{t-1}$ 과 計測值 $Z_1, Z_2, \cdots, Z_{t-1}$ 이 주어졌다고 가정하면 (1)식과 (3)식에서 誤差項들은 다음식으로 계산된다[Weiss, 1980].

$$\left.\begin{aligned} w_k&=(\Gamma_k^T\Gamma_k)^{-1}\Gamma_k^T(X_k-\Phi_{k-1}X_{k-1})\\ v_k&=Z_k-H_kX_k \end{aligned}\right\}$$

$$\text{for } k=1,2,\cdots,t-1$$

그러나 $k=t$ 일때의 w_t 와 v_t 는 아직 末知數이기 때문에 이들 w 와 v 의 값들은 여기서 無作爲 獨立系列이라고 볼 수 있다. 또한 w_t 와 v_t 가 서로 獨立이고 $k<t$ 일 때 w_t 는 X_k 및 Z_k 와 獨立이라고 가정하고 v_t 는 $k\le t$ 일때 X_k 와 獨立이며 $k<t$ 일때 Z_k 와 獨立이라고 가정한다[Jazwinski, 1970]. 그러면 w_t 와 v_t 를 나타내는데 사용되는 統計的인 量들은 다음과 같이 주어질 수 있다.

$$E[w_t]=\bar{w}_t$$

$$E[v_t]=\bar{v}_t$$

$$V_{ar}[w_t]=E[(w_t-\bar{w}_t)(w_t-\bar{w}_t)^T]=Q_t \quad \cdots\cdots(6)$$

$$V_{ar}[v_t]=E[(v_t-\bar{v}_t)(v_t-\bar{v}_t)^T]=R_t$$

여기서 $\bar{w}_t$ 와 $\bar{v}_t$ 는 平均值이고 Q_t 와 R_t 는 각각 w_t 와 v_t 의 共分散(covariance) 行列이다.

最適한 filter 를 얻기 위하여는 誤差系列 w_t 와 v_t 의 分布型이 주어져야만 한다. 위에서 주어진 假定條件과 統計值들로 부터 w_t 와 v_t 가 Gaussian 分布를 이룬다고 假定할 수 있으며 이러한 假定下에서 filter 를 最適化시킬 수 있는 $\bar{w}_t$, $\bar{v}_t$, Q_t 및 R_t 의 값들을 얻을 수 있게 된다[Jazwinski, 1970].

2.4. Kalman filter 의 誘導

시스템의 狀態空間 模型形成은 전술에서와 같이

$$X_t=\Phi_{t-1}X_{t-1}+\Gamma_tw_t \quad \cdots\cdots(1)$$

$$Z_t=H_tX_t+v_t \quad \cdots\cdots(3)$$

의 模型 및 計測方程式으로 주어진다. 그리고 前節에서 論한 誤差項 w_t 와 v_t 의 性質을 이용하면 그들의 統計值들은 아래와 같다.

$$E[w_t]=\bar{w}_t$$

$$E[v_t]=\bar{v}_t$$

$$E[(w_t-\bar{w}_t)(w_k-\bar{w}_k)^T]=Q_t\delta_{t,k}$$

$$E[(v_t-\bar{v}_t)(v_k-\bar{v}_k)^T]=R_t\delta_{t,k}$$

$$E[(w_t-\bar{w}_t)(v_k-\bar{v}_k)^T]=0$$

여기서 $\delta_{t,k}$ 는 Kronecker Delta 函數로서

$$\delta_{t,k}=1 \quad \text{for } t=k$$

$$\delta_{t,k}=0 \quad \text{for } t\neq k$$

로 정의된다.

시간 t 에서의 시스템 狀態의 filtering 된 推定值 $\hat{X}_{t|t}$

는 전술한 (5b)式에서와 같이 $(t-1)$에서의 狀態推定値 $\bar{X}_{t|t-1}$과 計測値 Z_t가 주어지면 얻어질 수 있다. $\hat{X}_{t|t}$가 最少分散(minimum variance)과 不偏(unbiased) 推定値가 되도록 加重因子 K_t를 구하기 위하여 (5b)식을 다음과 같이 변형한다[Todini, et al., 1980].

$$\hat{X}_{t|t}=K_t'\bar{X}_{t|t-1}+K_t(Z_t-\bar{v}_t)\cdots\cdots(7)$$

狀態 X_t에 대한 推定誤差를

$$\left.\begin{aligned}\tilde{X}_{t|t}&=\hat{X}_{t|t}-X_t\\ \tilde{X}_{t|t-1}&=\bar{X}_{t|t-1}-X_t\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(8)$$

라고 定義하면 (3),(7) 및 (8)식으로 부터

$$\tilde{X}_{t|t}+X_t=K'_t[\tilde{X}_{t|t-1}+X_t]+K_t[H_tX_t+v_t-\bar{v}_t]\cdots\cdots(9)$$

을 얻을 수 있고 이식은 정리하여 期待値(expectation)를 취하면,

$$E[\tilde{X}_{t|t}]=(K_t'+K_tH_t-I)E[X_t]+K_t'E[\tilde{X}_{t|t-1}]+K_tE[v_t-\bar{v}_t]$$

이고 이식에서 $E[v_t-\bar{v}_t]=0$이며 推定値가 不偏하기 위하여 $E[\tilde{X}_{t|t-1}]=E[\tilde{X}_{t|t}]=0$이어야 한다 그래서 윗식에서 $\hat{X}_{t|t}$가 不偏推定値가 되기 위한 조건으로,

$$K_t'+K_tH_t-I=0$$

이 얻어진다. 이것을 (7)식에 代入하여 정리하면,

$$\hat{X}_{t|t}=(I-K_tH_t)\bar{X}_{t|t-1}+K_t(Z_t-\bar{v}_t)\quad(10a)$$

혹은,

$$\hat{X}_{t|t}=\bar{X}_{t|t-1}+K_t(Z_t-H_t\bar{X}_{t|t-1}-\bar{v}_t)\quad(10b)$$

로 되고 또한 (9)식으로 부터 推定誤差는,

$$\tilde{X}_{t|t}=(I-K_tH_t)\tilde{X}_{t|t-1}+K_t(v_t-\bar{v}_t)\quad\cdots(11)$$

로 표시된다. 또한 (10b)식에서

$$\nu_t=Z_t-H_t\bar{X}_{t|t}-\bar{v}_t$$

라 놓으면 이 ν_t가 filtering결과에서 얻어지는 filter誤差(innovation)가 된다. 이를 이용하면 (10b)식은

$$\hat{X}_{t|t}=\bar{X}_{t|t-1}+K_t\nu_t\cdots\cdots(12)$$

로 쓸 수 있다.

다음에는 最少分散推定의 基準에 따라 Kalman 利得 K_t의 最適推定式을 전개하기로 한다[Jazwinski, 1970] (11)식의 양변을 제곱하여 期待値를 취하면,

$$E[\tilde{X}_{t|t}\tilde{X}^T_{t|t}]=[I-K_tH_t]E[\tilde{X}_{t|t-1}\tilde{X}^T_{t|t-1}][I-K_tH_t]^T+K_tE[(v_t-\bar{v}_t)(v_t-\bar{v}_t)^T]K_t^T\cdots\cdots(13)$$

이 되고 여기서,

$$E[\tilde{X}_{t|t-1}(v_t-\bar{v}_t)^T]=E[(v_t-\bar{v}_t)\tilde{X}^T_{t|t-1}]=0$$

이다. (13)식에서,

$$\hat{P}_{t|t}=E[\tilde{X}_{t|t}\tilde{X}^T_{t|t}]\cdots\cdots(14)$$

$$\bar{P}_{t|t-1}=E[\tilde{X}_{t|t-1}\tilde{X}^T_{t|t-1}]$$

라 놓고 (6)식에서 R_t를

$$R_t=E[(v_t-\bar{v}_t)(v_t-\bar{v}_t)^T]$$

라 하면,

$$\hat{P}_{t|t}=(I-K_tH_t)\bar{P}_{t|t}(I-K_tH_t)^T+K_tR_tK_t^T\cdots(15)$$

의 관계식을 얻는다.

Kalman 利得 K_t의 最適値는 다음식으로 주어지는 費用函數(cost function)를 最少化시킴으로서 얻을 수 있다[Jazwinski, 1970].

$$J_t=E[\tilde{X}^T_{t|t}S\tilde{X}_{t|t}]$$

여기서 S는 임의의 양(+)의 行列이다. 일반적으로 最少値 J_t는 S에 따라 변하지 않기 때문에 最少値가 存在하는 充分條件으로 S를 單位行列로 취한다[Todini, et al., 1980]. 즉,

$$J_t=E[\tilde{X}^T_{t|t}I\tilde{X}_{t|t}]]$$

$$=\text{trace}[\hat{P}_{t|t}]$$

그러므로 J_t를 最少化하기 위한 조건은

$$\frac{\partial J_t}{\partial K_t}=\frac{\partial}{\partial K_t}\text{trace}[\hat{P}_{t|t}]=0$$

이 되고 (15)식으로 부터

$$\frac{\partial}{\partial K_t}\text{trace}[(I-K_tH_t)\bar{P}_{t|t-1}(I-K_tH_t)^T+K_tR_tK_t^T]=0$$

$$-2[I-K_tH_t]\bar{P}_{t|t-1}H_t^T+2K_tR_t=0$$

이 얻어지며 K_t에 대하여 풀면,

$$K_t=\bar{P}_{t|t-1}H_t^T[H_t\bar{P}_{t|t-1}H_t^T+R_t]^{-1}\cdots\cdots(16)$$

이 된다. (16)식을 (15)식에 代入하여 정리하면,

$$\hat{P}_{t|t}=(I-K_tH_t)\bar{P}_{t|t-1}\cdots\cdots(17)$$

이 얻어진다. 전술한 (12)식과 (17)식을 이용하면 filtering된 狀態推定値 $\hat{X}_{t|t}$와 그의 誤差共分散(error-covariance) $\hat{P}_{t|t}$를 計測値 Z_t가 주어지면 구할 수 있다.

한편 狀態를 豫測하는 方程式과 豫測誤差의 共分散行列을 계산하는 식은 아래와 같이 유도할 수 있다 [Todini, et al., 1980]. 전술한 (4)식에서 (1)식을 빼고 推定誤差를 표시하는 (8)식을 이용하면,

$$\tilde{X}_{t|t-1}=\Phi_{t-1}\tilde{X}_{t-1|t-1}+\Gamma_t(w_t-\bar{w}_t)\cdots\cdots(18)$$

이 얻어진다. 이식의 양변을 제곱하고 期待値를 취하면,

$$E[\tilde{X}_{t|t-1}\tilde{X}^T_{t|t-1}]=\Phi_{t-1}E[\tilde{X}_{t|t-1}\tilde{X}^T_{t|t-1}]\Phi^T_{t-1}+\Gamma_tE[(w_t-\bar{w}_t)(w_t-\bar{w}_t)^T]\Gamma_t^T\cdots\cdots(19)$$

이 되며 여기서,

$$E[\tilde{X}_{t-1|t-1}(w_t-\bar{w}_t)^T]=E[(w_t-\bar{w}_t)\tilde{X}^T_{t-1|t-1}]=0$$

이다. (6)식과 (14)식을 이용하고 (19)식을 변형하면,

$$\bar{P}_{t|t-1}=\Phi_{t-1}\hat{P}_{t-1|t-1}\Phi^T_{t-1}+\Gamma_tQ_t\Gamma_t^T\cdots\cdots(20)$$

을 얻을 수 있다. 여기서,

$$Q_t=E[(w_t-\bar{w}_t)(w_t-\bar{w})^T]$$

이와 같이 하여 시간$(t-1)$에서의 $\hat{X}_{t-1|t-1}$과 $P_{t-1|t-1}$의 값이 주어지면 (4)식을 이용하여 시스템의 狀態豫

測値 $\bar{X}_{t|t-1}$ 을 계산할 수 있고 (20)식으로 부터 豫測誤差의 共分散行列 $\bar{P}_{t|t-1}$ 을 얻을 수 있다.

지금까지 전개한 離散型 Kalman filter를 위한 方程式을 요약하여 정리하면 아래와 같고 그 關係를 그림-1에 나타내었다.

狀態豫測 方程式

$$\bar{X}_{t|t-1}=\Phi_{t-1}\hat{X}_{t-1|t-1}+\Gamma_t\bar{w}_t$$

豫測誤差 共分散式

$$\bar{P}_{t|t-1}=\Phi_{t-1}\hat{P}_{t-1|t-1}\Phi^T_{t-1}+\Gamma_tQ_t\Gamma_t^T$$

Filtering 誤差

$$v_t=Z_t-H_t\bar{X}_{t|t-1}-\bar{v}_t$$

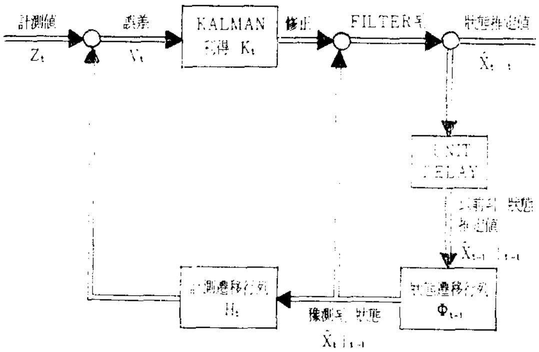

그림 1. Kalman Filter의 模型 構成

Kalman 利得

$$K_t=\bar{P}_{t|t-1}H_t^T[H_t\bar{P}_{t|t-1}H_t^T+R_t]^{-1}$$

Filtering된 시스템 狀態

$$\hat{X}_{t|t}=\bar{X}_{t|t-1}+K_tv_t$$

Filtering된 狀態誤差의 共分散式

$$\hat{P}_{t|t}=(I-K_tH_t)\bar{P}_{t|t-1}$$

以上의 Kalman filter理論의 展開過程에서 알 수 있듯이 狀態空間構成으로 形成된 確定論이나 推計學的 模型은 모두 시스템 및 計測誤差가 存在할 경우에 시스템의 狀態를 推定할 수 있도록 되어 있다. 그렇지만 만약 Kalman filter가 計測誤差만 存在하는 推定문제에 適用된다면 이 결과는 RLS技法(Recursive Least Square Method) [Young, 1974; Beck and Arnold, 1977]에 의한 것과 같다. 이러한 形態의 模型形成은 特히 線型模型의 媒介變數推定(parameter estimation) 문제에 適用된다. 이 경우를 살펴보기 위하여 전술한 시스템 方程式[식(1)]과 計測 方程式[식(3)]을 다시 써보면,

$$\theta_t=\theta_{t-1}$$

$$z_t=h_t\theta_t+v_t$$

여기서 θ_t, θ_{t-1}=推定될 媒介變數 벡터,

즉, $\theta_t^T=[\phi_1, \phi_2, \cdots\phi_p]_t$

$\phi_1, \phi_2, \cdots\phi_p$=線型模型의 媒介變數

z_t=스칼라(scalar)양인 縱屬變數

h_t=獨立變數 벡터

즉, $h_t=[z_{t-1}, z_{t-2}, \cdots, z_{t-p}]$

이 경우의 誤差項 v_t는 模型誤差와 計測誤差를 모두 포함하고 있다. 그리고 最少 自乘法에 의한 推定法에서 v_t는 一貫性있는 媒介變數 推定値를 얻기 위하여 반드시 獨立分布型 無作爲 變數(independently distributed random variable)이어야 한다[O'Connell and Clarke, 1980].

지금까지 水文學分野에서 實時間 洪水豫報問題의 應用에 많이 硏究되어온 Kalman filtering技法의 基本的인 理論을 전개하였다. 여기서 전개된 Kalman filter를 실제문제에 적용하기에는 많은 제약 조건이 있기 때문에 많은 학자들이 그의 성취도를 높이기 위하여 알고리즘(adaptive algorithm)을 개발하였다. 다음호에 그 중 4개를 택하여 Kalman filter 알고 리즘들[Yoshimura and Soeda, 1978; Sage and Husa 1969; Todini, 1978; Myers and Tapley, 1978]을 간단히 소개하고저 한다.

References

1. Conte, S.D. and C, de Boon (1972) *Elementary Numerical Analysis,* 2nd ed. McGraw-Hill, London.
2. Gelb, A. (1974) *Applied Optimal Estimation,* MIT Press, Cambidge, Massachusetts.
3. Jazwinski, A.H. (1970) *Stochastic Process and Filtering Theory,* Academic Press, New York.
4. Kalman, R.E. (1960) A new approach to linear filtering and prediction problems, *Journal of Basic Eng. Trans, ASME,* Vol. 82, No. 2. pp. 35~45.
5. Kalman, R.E. & R.S. Bucy (1961) New results in linear filtering and prediction theory, *Journal of Basic Eng., Trans. ASME,* Vol. 83, pp. 95~108.
6. Myers, K.A. and B.D. Tapley (1976). Adaptive sequential estimation with unknown noise statistics, *IEEE, Transactions on Automatic Control,* August, pp. 520~523.

7. Sage, A.P. and G.W. Husa (1969) Adaptive filtering with unknown prior statistics, *Proceedings of the Joint Automatic Control Conference,* pp. 760~769.
8. Szöllösi-Nagy, A. (1976) An adaptive identification and prediction algorithm for the real-time forecasting of hydrological time series, *Hydrological Science Bulletin,* XXI, 1, pp. 163~176.
9. Todini, E. (1978) Mutually interactive state-parameter(MISP) estimation, In *Applications of Kalman Filter to Hydrology, Hydraulics and Water Resources* (Chiu, editor). Univ. of Pittsburgh, Pennsylvania, pp. 135~151.
10. Weiss, G. (1980) Basic methodology: Kalman filter, In *Proceedings of Real-time Hydrological Forecasting and Contol* (D.E. O'Conell, editor), Institute of Hydrology, Wallingford, Oxon, United Kingdom, January, pp. 36~65.
11. Yoshimura. T. and T, Soeda(1978). A technique for compensating the filter performance by a fictitious noise, *Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control, Trans., ASME,* Vol. 100, June, pp. 154~156.

Additional References

1. Anderson, R.L. (1941) Distributions of the serial correlation coefficients, *Annals of Math. Statistics,* Vol. 8, No. 1, March, pp. 1~13.
2. Snedecer, G.W. and W.G. Cochron (1967). *Statistical Methods.* The Iowa State University Press, Iowa.
3. Beck, J.V. and K.J. Arnold (1977) *Parameter Estimation in Engineering and Science,* John Wiley and Sons, Jnc., New York.
4. Jenkins, G.M. and D.G. Watts (1969) *Spectral Analysis and its Applications,* Holden-Day, San Francisco, Calif.
5. Mehra, R.X(1970) On the identification of variances and adaptive Kalman filtering, *IEEE Trans. On Automatic Control.* Vol AC-15, No. 2, April, pp. 75~184.
6. O'Connell, D.E. and R.T. Clarke (1980). Adaptive hydrological forecasting-a review, *Hydrological Sciences Bulletin,* Vol. 26, No. 2, June, pp. 179~205.
7. Todini, E., D.E. O'Connell and D.A. Jones (1980). Basic methodology: Kalman filter estimation problems. In *Prceedings of Real-Time Hydrological Forecasting and Control* (D.E. O'Connell, editor), Institute of Hydrology, Wallingford, Oxon, United Kingdom, January, pp. 66~98.
8. Young, D.C. (1974) A recursive approach to time series analysis, *Bulletin Inst. Math, Applications.* Vol. 10, pp. 209~224.