
 論 文

大韓造船學會誌
 第22卷 第1號 1985年 3月
 Journal of the Society of
 Naval Architects of Korea
 Vol. 22, No. 1, March 1985

圓孔을 갖는 圓筒 Shell의 挫屈解析

林 莊 根* · 姜 秉 植**

Buckling Analysis of Cylindrical Shells with a Hole

by

J.K. Lim* · B.S. Kang**

Abstract

The buckling characteristics of cylindrical shells with a circular hole, under axially compressed loads, have been analyzed and the results have been compared with existed experimental results. Deflection function with decay factor is assumed, and stress distribution around a circular hole in tensioned infinite plate is used for formulating buckling energy function. Applying Rayleigh Ritz procedure to this energy function, characteristic equation of eigenvalue problem is determined.

Buckling load is defined by the minimum value of eigenvalues calculated according to several decay factors, and as the radius ratios of a circular hole (a/R) and shell thickness ratios (R/t) are varied, the reducing characteristics of buckling load are studied. As a result, buckling loads are reduced by about 50% according to some radius ratios ($a/R \geq 0.15$) of circular hole and are not nearly affected by shell thickness ratio (R/t).

記 號 說 明

a : 圓孔의 半徑

B : 감쇠계수(decay factor)

A_0, A_2, C_0, C_2 : 變位函數를 定義한 常數

$D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$: 板의 굽힘剛性

$N_r, N_\theta, N_{r\theta}$: 應力 resultants

E : 彈性係數

R : 圓筒 shell의 半徑

S : 挫屈應力

$S_{ci} = \frac{1}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} \cdot \frac{Et}{R}$: 圓孔이 없는 圓筒 shell의 挫
 屈應力

r, θ : 圓孔의 中心을 原點으로 한 極座標系

t : 圓筒 shell의 두께

w : 圓筒 shell의 橫變位

w_H : 圓孔境界에서의 最大橫變位

U : 全 potential 에너지

U_b : 굽힘에 의한 變形에 너지

U_m : 初期荷重에 의한 membrane 變形에 너지

U_w : 挫屈로 增加되는 membrane 變形에 너지

ν : Poisson's ratio

ϕ : Airy의 應力函數

ϕ_h : ϕ 의 homogeneous solution

ϕ_p : ϕ 의 特異解

$\mu = \frac{1}{2} [12(1-\nu^2)]^{\frac{1}{2}} \left(\frac{a^2}{Rt} \right)^{\frac{1}{2}}$: 圓筒 shell의 曲率定數

接受日字 : 1985年 1月 5日, 再接受日字 : 1985年 3月 12日

* 正會員, 漢陽大學校 理工大學

** 漢陽大學校 大學院

1. 緒 論

圓孔을 갖는 圓筒의 挫屈問題는 平板에서와 마찬가지로 圓孔에 의해 挫屈荷重이 어느程度 減少될 것인가에 關心을 가지고 많은 研究가 되어왔다[8].

1968年 Tennyson[1]은 원심주조법을 應用하여 epoxy로 圓筒 shell을 製作하고 光彈性實驗을 通하여 圓孔의 크기가 挫屈荷重에 미치는 영향을 實驗式으로 提示하였다. 그러나 이 實驗에서는 圓孔의 加工에 따른 初期不整의 영향을 排除할 수 없었고 試驗片의 制限으로 一般의인 資料로는 未洽하였다. 이 問題의 理論的인 接近은 1970年 Starnes[2]에 의해 이루어 졌으며 圓孔周圍의 局部挫屈을 위한 變位函數를 假定하여 Rayleigh-Ritz法으로 解析하고 방대한 實驗을 通하여 明快한 結果를 提示하였으나 理論値는 實驗에서 얻은 結果와 比較的 큰 차이를 보이고 있다. 이와 같은 理論値와 實驗値의 接近을 위하여 1973年 Brogan과 Almroth[3,4]는 有限差分法으로 數值解析하여 比較的 좋은 結果를 얻었으나 要素分割法의 複雜性과 計算量이 방대하여 大型電算機를 利用한 package program이 없으면 解析이 不可能하다. 1979年 Toda[6,7]는 대칭으로 2개의 圓孔을 갖는 圓筒의 挫屈實驗에서 1개의 圓孔이 있을 때와 그 特性이 같다는 事實을 確認하고 1개의 圓孔을 갖는 圓筒 shell의 挫屈問題로 理論解析하였으나 變位函數를 너무 簡單히 假定하여 實驗値와 큰 차이를 나타내었다. 本 論文은 1개의 圓孔을 갖는 圓筒 shell의 挫屈荷重값을 實驗値에 좀더 接近시키기 위하여 Lekkerkerker[5]의 假定에 準하여 變位函數를 設定하고 Rayleigh-Ritz法으로 解析하여 既存의 實驗結果와 比較하였으며 實驗에서 提案된 挫屈特性을 보다 一般化시

$$U_b = \frac{D}{2} \iint \left\{ \left[w_{,rr}^2 + \frac{2}{r^2} w_{,r\theta\theta} + \frac{1}{r^2} (w_{,r})^2 + \frac{1}{r^4} (w_{,\theta\theta})^2 \right] + 2(1-\nu) \left[\frac{1}{r^2} (w_{,r\theta})^2 - \frac{2}{r^3} w_{,r\theta} w_{,\theta} + \frac{1}{r^4} (w_{,\theta})^2 \right] \right. \\ \left. + 2\nu \left[\frac{1}{r} w_{,rr} w_{,r} + \frac{1}{r^2} w_{,r\theta\theta} \right] \right\} r dr d\theta \quad (3)$$

이고 U_w 는 外力에 依한 變形에너지로 다음과 같이 表示된다.

$$U_w = -\frac{1}{4} S t \iint \left\{ \left[2 \sin^2 \theta - \frac{3a^4}{r^4} \cos 2\theta + \frac{a^2}{r^2} (4 \cos 2\theta - 1) \right] (w_{,r})^2 + \left[\left(\frac{2}{r} - \frac{6a^4}{r^5} + \frac{4a^2}{r^3} \right) \sin 2\theta \right] w_{,r} w_{,\theta} \right. \\ \left. + \left[\frac{2}{r^2} \cos^2 \theta + \frac{3a^4}{r^6} \cos 2\theta + \frac{a^2}{r^4} \right] (w_{,\theta})^2 \right\} r dr d\theta \quad (4)$$

한편 U_m 는 膜應力의 變化에 따른 變形에너지로써 Airy의 應力函數 ϕ 로 다음과 같이 表示할 수 있다.

$$U_m = \frac{1}{2Et} \iint \left\{ \left[\frac{1}{r} \phi_{,r} + \frac{1}{r^2} \phi_{,\theta\theta} \right]^2 + (\phi_{,rr})^2 - 2\nu \left[\frac{1}{r} \phi_{,r} + \frac{1}{r^2} \phi_{,\theta\theta} \right] \phi_{,rr} + 2(1+\nu) \left[\left(\frac{1}{r} \phi_{,\theta} \right)_{,r} \right]^2 \right\} r dr d\theta \quad (5)$$

2.3. 應力函數

一般 quasi-shallow shell의 適合方程式은 다음과 같이 表示된다[11].

키고자 하였다.

2. 理論 解析

2.1. 基本假定 및 變位函數

圓孔을 갖는 圓筒 shell의 挫屈은 圓孔周圍에서 局部挫屈로 생각하여 다음과 같은 假定을 할 수 있다.

○ 圓筒 shell에서 膜應力의 分布는 圓孔이 있는 平板의 應力分布와 같다.

○ 圓孔周圍를 除外한 部分에서 挫屈에 대한 變位와 膜應力의 變動은 無視할 수 있고 圓孔으로 부터 거리가 增加함에 따라 0에 接近한다. 이와 같은 假定에 따라서 Fig. 1과 같이 座標系를 定하고 變位函數 w 를 다음과 같이 假定하였다.

$$w(r, \theta) = e^{-Br} [(A_0 + rC_0) + (A_2 + rC_2) \cos 2\theta] \quad (1)$$

B 는 局部挫屈에 依한 變位の 감쇄를 나타내는 常數이고 A_0, C_0, A_2, C_2 는 未定係數이다. 式 (1)로 表示된 變位 w 는 圓孔에서 거리 r 가 增加함에 따라서 0에 接近하고 x 軸에 대칭인 條件을 만족한다.

2.2. 挫屈 Energy

挫屈의 全 potential 에너지는 極座標로 다음과 같이 表示할 수 있다.

$$U = U_b + U_m + U_w \quad (2)$$

이 式에서 U_b 는 굽힘에너지로

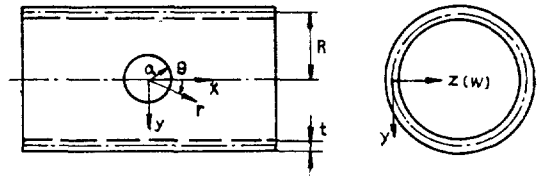


Fig. 1 Cylindrical shell geometries and coordinates.

$$r^4 \phi = -\frac{Et}{R} w_{,zz} \tag{6}$$

(6)式의 제차方程式의 解는 極座標로

$$\begin{aligned} \phi_h = & a_0 \ln r + b_0 r^2 + c_0 r^2 \ln r + d_0 r^2 \theta + a_0' \theta + \frac{1}{2} a_1' r \theta \sin \theta + (a_1 r + b_1 r^3 + a_1' r^{-1} + b_1' r \ln r) \cos \theta + \frac{1}{2} c_1' r \theta \cos \theta \\ & + (c_1 r + d_1 r^3 + c_1' r^{-1} + d_1' r \ln r) \sin \theta + \sum_{m=2}^{\infty} (a_m r^m + b_m r^{m+2} + a_m' r^{-m} + b_m' r^{-m+2}) \cos m\theta \\ & + \sum_{m=2}^{\infty} (c_m r^m + d_m r^{m+2} + c_m' r^{-m} + d_m' r^{-m+2}) \sin m\theta \end{aligned} \tag{7}$$

이 되고 [10] 特異解는 다음 式으로 表示할 수 있다 [2].

$$\phi_p = h_0(r) + h_2(r) \cos 2\theta + h_4(r) \cos 4\theta \tag{8}$$

但,

$$\begin{aligned} h_0(r) = & -\frac{Et}{8R} \left\{ A_0 \left[\frac{4}{B^2} e^{-Br} - \frac{4}{B^2} \int \frac{e^{-Br}}{r} dr \right] - A_2 \left[e^{-Br} \left(\frac{r}{B} + \frac{1}{B^2} \right) + r^2 \int \frac{e^{-Br}}{r} dr \right] \right. \\ & \left. + c_0 \left[e^{-Br} \left(\frac{4r}{B^2} + \frac{12}{B^3} \right) - \frac{8}{B^3} \int \frac{e^{-Br}}{r} dr \right] - c_2 \left[e^{-Br} \left(\frac{2r}{B^2} + \frac{2}{B^3} \right) \right] \right\} \\ h_2(r) = & \frac{Et}{8R} \left\{ A_0 e^{-Br} \left[\frac{4}{B^2} + \frac{12}{B^3 r} + \frac{12}{B^4 r^2} \right] - A_2 e^{-Br} \left[\frac{r}{B} + \frac{3}{B^2} + \frac{6}{B^3 r} + \frac{6}{B^4 r^2} \right] \right. \\ & \left. - A_2 r^2 \int \frac{e^{-Br}}{r} dr + c_0 e^{-Br} \left[4 \frac{r}{B^2} + \frac{20}{B^3} + \frac{48}{B^4 r} + \frac{48}{B^5 r^2} \right] - c_2 e^{-Br} \left[4 \frac{r}{B^2} + \frac{12}{B^3} + \frac{24}{B^4 r} + \frac{24}{B^5 r^2} \right] \right\} \\ h_4(r) = & \frac{Et}{4R} \left\{ A_2 e^{-Br} \left[\frac{1}{B^2} + \frac{7}{B^3 r} + \frac{27}{B^4 r^2} + \frac{60}{B^5 r^3} + \frac{60}{B^6 r^4} \right] \right. \\ & \left. + c_2 e^{-Br} \left[\frac{r}{B^2} + \frac{9}{B^3} + \frac{48}{B^4 r} + \frac{168}{B^5 r^2} + \frac{360}{B^6 r^3} + \frac{360}{B^7 r^4} \right] \right\} \end{aligned}$$

그러나 圓孔境界 ($r=a$)와 $r \rightarrow \infty$ 에서 自由境界條件

$$\begin{aligned} N_r |_{r=a, \infty} &= \left[\frac{1}{r} \phi_{,r} + \frac{1}{r^2} \phi_{,\theta\theta} \right]_{r=a, \infty} = 0 \\ N_{r\theta} |_{r=a, \infty} &= \left[-\left(\frac{1}{r} \phi_{,\theta} \right)_{,r} \right]_{r=a, \infty} = 0 \\ N_\theta |_{r=\infty} &= [\phi_{,rr}]_{r=\infty} = 0 \end{aligned} \tag{9}$$

을 만족해야 하므로 式 (7)의 제차方程式의 解는

$$\phi_h = a_0 \ln r + \left(a_2' - \frac{1}{r^2} + b_2' \right) \cos 2\theta + \left(a_4' - \frac{1}{r^4} + b_4' - \frac{1}{r^2} \right) \cos 4\theta \tag{10}$$

로 된다. 但,

$$\begin{aligned} a_0 = & -\frac{Et}{4R} \left\{ 2A_0 a^2 e^{-q} \left[\frac{1}{q^2} + \frac{1}{q} \right] - A_2 a^2 E_1(q) + 2c_0 a^3 e^{-q} \left[\frac{1}{q} + \frac{2}{q^2} + \frac{2}{q^3} \right] - c_2 a^3 e^{-q} \left[\frac{1}{q} \right] \right\} \\ a_2' = & \frac{Et}{4R} \left\{ -A_0 a^4 e^{-q} \left[\frac{1}{q} + \frac{3}{q^2} + \frac{6}{q^3} + \frac{6}{q^4} \right] + \frac{1}{2} A_2 a^4 \left[E_1(q) + 2e^{-q} \left(\frac{1}{q} + \frac{3}{q^2} + \frac{6}{q^4} + \frac{6}{q^5} \right) \right] \right. \\ & \left. - c_0 a^5 e^{-q} \left[\frac{1}{q} + \frac{4}{q^2} + \frac{12}{q^3} + \frac{24}{q^4} + \frac{24}{q^5} \right] + c_2 a^5 e^{-q} \left[\frac{1}{q} + \frac{2}{q^2} + \frac{6}{q^3} + \frac{12}{q^4} + \frac{12}{q^5} \right] \right\} \\ b_2' = & \frac{Et}{4R} \left\{ A_0 a^2 e^{-q} \left[\frac{1}{q} + \frac{1}{q^2} \right] - A_2 a^2 E_1(q) + c_0 a^3 e^{-q} \left[\frac{1}{q} + \frac{2}{q^2} + \frac{3}{q^3} \right] - c_2 a^3 e^{-q} \left[\frac{1}{q} \right] \right\} \\ a_4' = & -\frac{Et}{8R} \left\{ A_2 a^6 e^{-q} \left[\frac{1}{q} + \frac{5}{q^2} + \frac{20}{q^3} + \frac{60}{q^4} + \frac{120}{q^5} + \frac{120}{q^6} \right] \right. \\ & \left. + c_2 a^7 e^{-q} \left[\frac{1}{q} + \frac{6}{q^2} + \frac{30}{q^3} + \frac{120}{q^4} + \frac{360}{q^5} + \frac{720}{q^6} + \frac{720}{q^7} \right] \right\} \\ b_4' = & \frac{Et}{8R} \left\{ A_2 a^4 e^{-q} \left[\frac{1}{q} + \frac{3}{q^2} + \frac{6}{q^3} + \frac{6}{q^4} \right] + c_2 a^5 e^{-q} \left[\frac{1}{q} + \frac{4}{q^2} + \frac{12}{q^3} + \frac{24}{q^4} + \frac{24}{q^5} \right] \right\} \\ q = & Ba, \quad E_1(q) = -\int_q^\infty \frac{e^{-r}}{r} dr \end{aligned} \tag{11}$$

따라서 식 (6)의 일반해는 식 (10)과 식 (8)에서

$$\phi(r, \theta) = \phi_h + \phi_p \quad (12)$$

로求解된다.

2.4. Rayleigh-Ritz法

식 (2)로表示된 全 potential energy는 未定係數 A_0, A_2, C_0, C_2 의 2次式으로表示되고 이 에너지 U 를 最少로 하기 위한 條件은

$$\frac{\partial U}{\partial A_0} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial A_2} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial C_0} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial C_2} = 0 \quad (13)$$

이 되어 4行 4列의 固有值問題의 特性方程式이 얻어진다.

$$([K] - S[G])[C] = 0 \quad (14)$$

但, $[C] = [A_0, A_2, C_0, C_2]^T$ 이고 行列 $[K], [G]$ 要素의 表現式은 附錄에 提示하였다. 式 (14)의 固有值中에서 最少값이 問題의 挫屈應力이 되며 이에 따른 固有vector가 挫屈 mode가 된다.

3. 結果 및 檢討

解析結果를 Starnes[2]의 實驗値와 比較하기 위해서

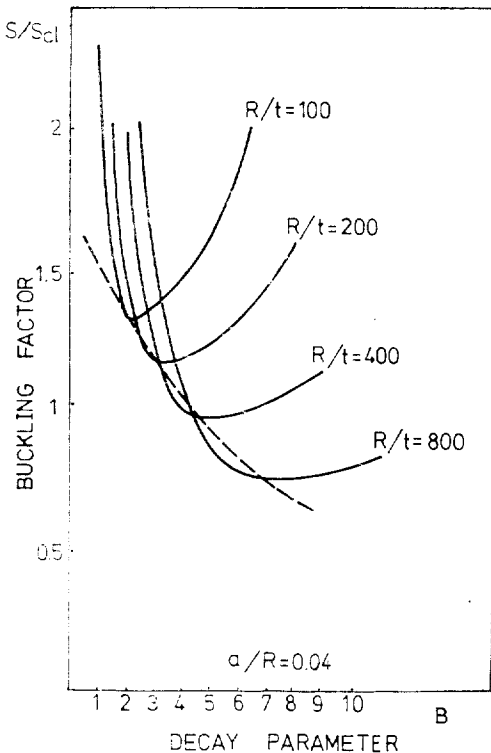


Fig. 2 Variation of critical stresses due to decay parameter ($a/R=0.04$)

圓筒 shell의 半徑과 彈性特性値를 $R=4$ in., $E=10^7$ psi, $\nu=0.3$ 으로 固定시키고 各 圓孔의 크기에 대해서 B 를 變化시켜 挫屈荷重의 最少値를 찾아 臨界挫屈荷重을 求하였고 圓孔이 없는 境遇의 圓筒 shell의 挫屈荷重値[11] S_{c1} 과 比較하였다.

$$S_{c1} = \frac{1}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} \cdot \frac{Et}{R} \quad (15)$$

이 結果는 Fig. 2, 3과 같이 B 의 增加에 따라서 挫屈荷重의 현저한 變化를 보이며 B 의 最適値를 提示해 주고 있다.

B 의 最適値는 Fig. 4와 같이 圓孔의 半徑比 a/R 에 대해서는 큰 變化가 없지만 圓筒의 두께比 R/t 에 따라서 크게 달라진다.

Fig. 5는 이와 같은 最適값에비에 따라서 圓筒의 橫變位 w 가 圓孔으로 부터의 거리 r 가 增加함에 따라 감소되는 特性을 보이며 局部挫屈의 領域을 決定하는 重要資料가 된다. 이와 같이 求한 B 의 最適値로써 a/R 및 R/t 의 變化에 따른 挫屈係數 S/S_{c1} 의 값은 表 1과 같다.

이 表에서 μ 는 圓筒의 曲率定數로써 다음과 같이 定

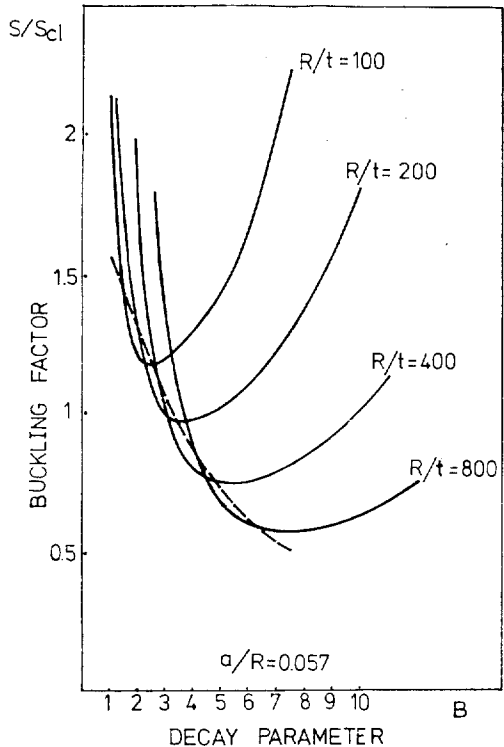


Fig. 3 Variation of critical stresses due to decay parameter ($a/R=0.057$)

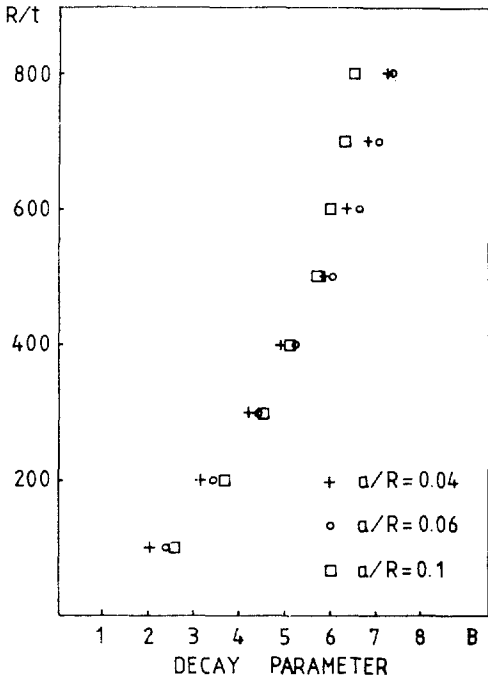


Fig. 4 Optimized value of decay parameter

義된 값이다.

$$\mu = \frac{1}{2} [12(1-\nu^2)]^{\frac{1}{4}} \cdot \left(\frac{a^2}{Rt} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (16)$$

圓筒의 曲率定數 μ 에 따른 挫屈荷重 값은 Fig. 6과 같이 한개의 曲線을 形成하며 이 結果를 Tennyson[1], Starnes[2]의 實驗値와 比較하였다. $\mu < 1$ 인 경우는 圓

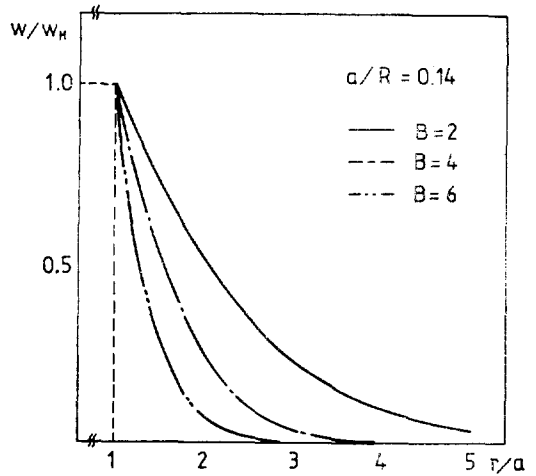


Fig. 5 Lateral deflection mode of shell

筒의 半徑에 比해 圓孔의 半徑이 매우 작은 경우로써 變位 w 가 局部挫屈特性에 맞도록 假定된 것이므로 理論的으로 局部挫屈荷重이 급격히 커지고 있으며 이는 局部挫屈이 생기기 前에 圓筒 shell의 全體挫屈이 먼저 생기므로 圓孔이 全體挫屈荷重에 미치는 영향은 거의 無視할 수 있다. $1 \leq \mu \leq 2.5$ 인 경우에 解析結果는 Starnes[2] 實驗의 上界値에 近接하고 있으며 지금까지 다른 어떤 理論値보다 相當히 接近하여 變位函數 w 의 假定이 適當함을 보여준다. 이 範圍에서 挫屈荷重 값은 圓孔이 없는 경우에 比해서 거의 50%까지 減少된다. $\mu > 2.5$ 인 경우에는 圓筒의 半徑 R 에 比해서

Table 1 Values of parameter μ and buckling factor S/Scl

| R=4(inch) | R/t=100 | | R/t=200 | | R/t=400 | | R/t=533 | | R/t=800 | |
|-----------|---------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------|
| | a/R | μ S/Scl | μ S/Scl | μ S/Scl | μ S/Scl | μ S/Scl | μ S/Scl | μ S/Scl | μ S/Scl | |
| 0.01 | 0.091 | 1.923 | 0.129 | 1.757 | 0.182 | 1.600 | 0.210 | 1.537 | 0.257 | 1.453 |
| 0.02 | 0.182 | 1.600 | 0.257 | 1.453 | 0.364 | 1.318 | 0.420 | 1.258 | 0.514 | 1.164 |
| 0.03 | 0.273 | 1.430 | 0.386 | 1.294 | 0.545 | 1.134 | 0.630 | 1.054 | 0.771 | 0.929 |
| 0.04 | 0.364 | 1.318 | 0.514 | 1.164 | 0.727 | 0.966 | 0.840 | 0.876 | 1.028 | 0.746 |
| 0.06 | 0.545 | 1.134 | 0.771 | 0.929 | 1.091 | 0.712 | 1.259 | 0.633 | 1.542 | 0.546 |
| 0.08 | 0.727 | 0.966 | 1.028 | 0.747 | 1.454 | 0.567 | 1.679 | 0.517 | 2.057 | 0.475 |
| 0.1 | 0.909 | 0.824 | 1.285 | 0.623 | 1.818 | 0.496 | 2.099 | 0.473 | 2.571 | 0.467 |
| 0.12 | 1.091 | 0.712 | 1.543 | 0.545 | 2.181 | 0.469 | 2.519 | 0.466 | 3.085 | 0.492 |
| 0.14 | 1.273 | 0.628 | 1.800 | 0.499 | 2.545 | 0.467 | 2.939 | 0.483 | 3.599 | 0.534 |
| 0.16 | 1.454 | 0.567 | 2.057 | 0.475 | 2.909 | 0.481 | 3.359 | 0.513 | 4.113 | 0.587 |
| 0.18 | 1.636 | 0.525 | 2.314 | 0.466 | 3.272 | 0.506 | 3.778 | 0.552 | 4.628 | 0.647 |
| 0.20 | 1.818 | 0.496 | 2.571 | 0.468 | 3.636 | 0.538 | 4.198 | 0.597 | 5.142 | 0.712 |
| 0.22 | 2.000 | 0.478 | 2.828 | 0.477 | 3.999 | 0.575 | 4.618 | 0.646 | 5.565 | 0.779 |

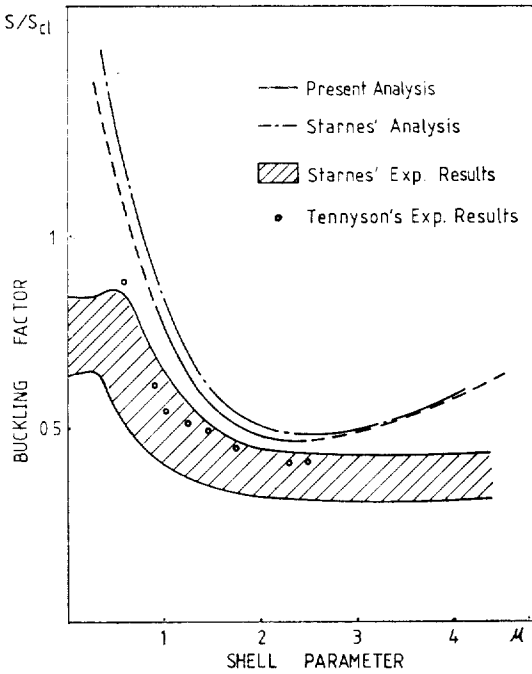


Fig. 6 Comparison with experimental results

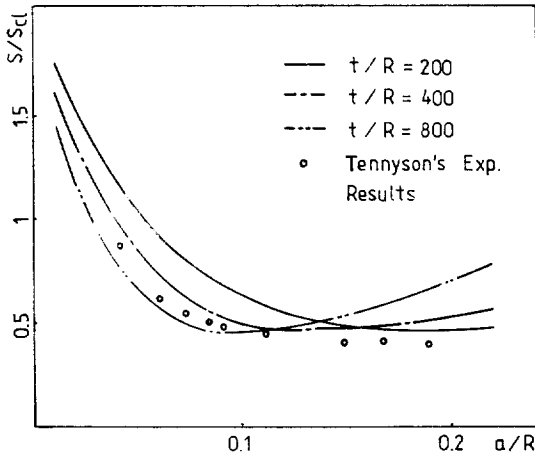


Fig. 7 Buckling stresses according to hole size and shell thickness.

圓孔의 半徑 a 가 比較的 큰 경우로서 quasi-shallow shell 理論의 適用限界[1] ($a/R \leq 0.15$)와 圓孔周圍에서 初期應力分布의 變動 等의 原因으로 挫屈荷重은 理論的으로 다시 增加하지만 實際로는 實驗結果와 같이 圓孔의 크기에 關係없이 거의 一定한 값을 가지게 된다[1, 4]. Fig. 7은 圓孔의 크기 a/R 및 圓筒 shell의 두께 R/t 가 挫屈荷重에 미치는 影響을 보이며 R/t 의

영향은 거의 無視할 수 있는 反面에 a/R 에 따라서 挫屈荷重은 크게 變化하고 있다. a/R 의 어느 값에서 挫屈荷重이 增加하는 理由는 Fig. 6에서 $\mu > 2.5$ 인 경우와 같이 說明할 수 있으며 이 限界領域은 μ 의 값보다는 R/t 의 값에 따라서 달라진다.

4. 結 論

圓孔을 갖는 圓筒 shell에 軸壓縮荷重이 作用할 때 감쇄계수가 導入된 變位函數를 假定하여 Rayleigh-Ritz 法으로 挫屈解析을 하였으며 圓孔의 크기 (a/R)와 圓筒의 두께 (R/t)가 挫屈荷重에 미치는 影響을 shell의 曲率定數 μ 에 關해 檢討한 結果 다음과 같은 結論을 얻었다.

- 1) 局部挫屈과 quasi-shallow shell 理論이 適用되는 區間 ($1 \leq \mu \leq 2.5$)에서 挫屈荷重은 從來의 解析方法에 比하여 既存 實驗値에 보다 더 近似한 값을 얻었다.
- 2) 圓孔의 크기 (a/R)에 따라 挫屈荷重은 圓孔의 半徑比가 0.15가 될 때까지 급격히 減少하여 約 50%가 되며 그 以上에서는 크기에 關係없이 거의 一定한 값을 갖는다.
- 3) 圓筒두께의 비 (R/t)가 挫屈荷重에 미치는 影響은 無視할 程度로 작다.
- 4) 變位函數 w 의 감쇄계수 B 는 圓孔의 크기에 의한 影響보다는 圓筒의 두께에 따라 달라지며 두께가 얇을 수록 커진다.

參 考 文 獻

- [1] R.C. Tennyson, "The Effects of Unreinforced Circular Cutouts on the Buckling of Circular Cylindrical Shells under Axial Compression", *Trans. ASME J. of Engineering for Industry*, Nov., 1968, pp. 541-546.
- [2] J.H. Starnes, *The Effect of a Circular Hole on the Buckling of Cylindrical Shells*, Ph.D. Thesis, California Institute of Technology, 1970.
- [3] F.A. Brogan and B.O. Almroth, "Buckling of Cylinders with Cutouts", *AIAA J.*, Vol. 8, No. 2, 1970, pp. 236-240.
- [4] B.O. Almroth et al., "Stability Analysis of Cylinders with Circular Cutouts", *AIAA J.*, Vol. 11, No. 11, 1973, pp. 1582-1584.
- [5] J.G. Lekkerkerker, *On the Stress Distribution Journal of SNAK*, Vol. 22, No. 1, March 1985

in *Cylindrical Shells Weakened by a Circular Hole*, Ph.D. Thesis, Technological University, Delft, 1965.

- [6] S. Toda, "Experimental Investigation on the Effects of Elliptic Cutouts on the Buckling of Cylindrical Shells Loaded by Axial Compression", *Trans. Japan Soc. Aero. Space Science*, Vol. 23, No. 59, 1979, pp. 57-63.
- [7] S. Toda, "Buckling of Cylindrical Shells with Circular Cutouts under Axial Compression", *Trans. of JSME*, Ser. A, Vol. 46, No. 403, 1980, pp. 329-336.
- [8] J. Pattabiraman, et al., "Statics and Dynamics

of Elastic Shells with Cutouts—A Review", *J. of Ship Research*, Vol. 18, No. 2, 1974, pp. 113-126.

- [9] P. Van Dyke, "Stresses about a Circular Hole in a Cylindrical Shell", *AIAA J.* Vol. 3, No. 9, 1965, pp. 1733-1742.
- [10] Y.C. Fung, *Foundations of Solid Mechanics*, Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1965.
- [11] D.O. Brush and B.O. Almroth, *Buckling of Bars, Plates, and Shells*, McGraw-Hill Inc., 1975.

附 錄

式 (14)의 $[K]$, $[G]$ 行列의 要素:

$$k_{ij} = k_{ji}, \quad g_{ij} = g_{ji} \quad (i, j = 1, 2, 3, 4)$$

$$k_{11} = \frac{Ea^2}{R^2} e^{-2q} \left(\frac{3}{8} \cdot \frac{1}{q} + \frac{3}{16} \cdot \frac{1}{q^2} \right) + \frac{Et^2}{6(1-\nu^2)} \cdot \frac{1}{a^2} \left[e^{-2q} \left(\frac{1}{2} q^3 + \frac{1}{4} q^2 - \nu q^2 \right) + q^2 E_1(2q) \right]$$

$$k_{12} = -\frac{Ea^2}{R^2} e^{-2q} \left(\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{q} + \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{q^2} + \frac{\nu}{16} \cdot \frac{1}{q^2} \right) + \frac{Ea^2}{R^2} e^{-q} E_1(q) E_1(q) \left(\frac{5}{8} + \frac{\nu}{8} \right) \cdot \left(\frac{1}{q} + \frac{1}{q^2} \right) \\ - \frac{Ea^2}{R^2} \cdot \frac{1}{q^2} E_1(2q) \left(\frac{5}{8} + \frac{\nu}{8} \right) + \frac{E}{R^2} \cdot \frac{a^2}{q^2} \left(\frac{3}{8} - \frac{\nu}{8} \right) \int_q^\infty r e^{-r} E_1(r) dr$$

$$k_{13} = \frac{Ea^2}{R^2} e^{-2q} \left(\frac{3}{8} \cdot \frac{1}{q} + \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{q^2} + \frac{3}{16} \cdot \frac{1}{q^3} \right) + \frac{Et^2}{6(1-\nu^2)} \cdot \frac{1}{a} \left\{ e^{-2q} \left[\frac{1}{2} q^3 - \frac{1}{2} q^2 + \frac{1}{4} q - \nu(q^2 - q) \right] - q E_1(2q) \right\}$$

$$k_{14} = \frac{Ea^3}{R^2} e^{-2q} \left(-\frac{1}{4q} + \frac{1}{4q^2} + \frac{1}{8q^3} \right)$$

$$k_{22} = \frac{Ea^2}{R^2} e^{-2q} \left(\frac{7}{32q} + \frac{7}{64} \cdot \frac{1}{q^2} \right) + \left(\frac{3}{2} - \frac{\nu}{2} \right) \frac{Ea^2}{R^2} [E_1(q)]^2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{Ea}{R^2 q^2} \int_q^\infty r e^{-r} E_1(r) dr$$

$$k_{23} = -\frac{Ea^3}{R^2} e^{-2q} \left[\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{q} + \frac{9}{16} \cdot \frac{1}{q^2} + \frac{29}{32} \cdot \frac{1}{q^3} + \nu \left(\frac{1}{16} \cdot \frac{1}{q^2} + \frac{5}{32} \cdot \frac{1}{q^3} \right) \right] \\ + \frac{Ea^3}{R^2} e^{-q} E_1(q) \left[\frac{5}{8} \cdot \frac{1}{q} + \frac{5}{4} \cdot \frac{1}{q^2} + \frac{5}{4} \cdot \frac{1}{q^3} + \nu \left(\frac{1}{8q} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{q^2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{q^3} \right) \right] \\ - \frac{Ea^3}{R^2 q^3} E_1(2q) \left(\frac{5}{4} + \frac{\nu}{4} \right) + \frac{Ea^3}{R^2 q^3} \left(\frac{3}{8} - \frac{\nu}{8} \right) \int_q^\infty r^2 e^{-r} E_1(r) dr$$

$$k_{24} = \frac{Ea^3}{R^2} e^{-2q} \left(\frac{7}{32} \cdot \frac{1}{q} + \frac{3}{32} \cdot \frac{1}{q^2} + \frac{3}{64} \cdot \frac{1}{q^3} \right) - \frac{1}{2} \cdot \frac{Ea^3}{R^2 q} e^{-q} E_1(q) - \frac{1}{4} \cdot \frac{Ea^3}{R^2 q^3} \int_q^\infty r^2 e^{-r} E_1(r) dr \\ + \frac{1}{2} \cdot \frac{Ea^3}{R^2 q^3} \int_q^\infty r e^{-r} E_1(r) dr + \frac{1}{a} \cdot \frac{Et^2}{12(1-\nu^2)} \left\{ e^{-2q} \left[\frac{1}{2} q^3 - \frac{1}{2} q^2 + \frac{17}{4} q + 12 - \nu(q^2 + 7q) \right] - 9q E_1(2q) \right\}$$

$$k_{33} = \frac{Ea^4}{R^2} e^{-2q} \left(\frac{3}{8} \cdot \frac{1}{q} + \frac{9}{16} \cdot \frac{1}{q^2} + \frac{9}{16} \cdot \frac{1}{q^3} + \frac{9}{32} \cdot \frac{1}{q^4} \right) + \frac{Et^2}{6(1-\nu^2)} \left\{ e^{-2q} \left[\frac{1}{2} q^3 - \frac{5}{4} q^2 + \frac{5}{4} q \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{3}{8} + \nu(-q^2 + 2q - 1) \right] + E_1(2q) \right\}$$

$$k_{34} = \frac{Ea^4}{R^2} e^{-2q} \left(-\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{q} + \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{q^2} + \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{q^3} + \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{q^4} \right)$$

$$k_{44} = \frac{Ea^4}{R^2} e^{-2q} \left(\frac{7}{32} \cdot \frac{1}{q} - \frac{27}{64} \cdot \frac{1}{q^2} + \frac{21}{64} \cdot \frac{1}{q^3} + \frac{21}{128} \cdot \frac{1}{q^4} \right) + \frac{Et^2}{12(1-\nu^2)} \left\{ e^{-2q} \left[\frac{1}{2} q^3 - \frac{5}{4} q^2 + \frac{21}{4} q + \frac{45}{8} \right. \right.$$

$$\begin{aligned}
& -\nu(q^2+6q-3)]+9E_1(2q)\} \\
g_{11} &= e^{-2q}\left(\frac{1}{2}q+\frac{1}{4}\right)-q^2E_1(2q) \\
g_{12} &= e^{-2q}\left(\frac{3}{8}+\frac{3}{4}q+\frac{1}{4}q^2-\frac{1}{2}q^3\right)+E_1(2q)(q^4-2q^2) \\
g_{13} &= aqE_1(2q), \\
g_{14} &= ae^{-2q}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{q}\right) \\
g_{22} &= e^{-2q}\left(\frac{9}{8}-\frac{7}{4}q\right)+\left(\frac{7}{2}q^2+2\right)E_1(2q) \\
g_{23} &= ae^{-2q}\left(2q^2-q-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{q}\right)+4a(q-q^3)E_1(2q) \\
g_{24} &= ae^{-2q}\left(2+\frac{1}{q}\right)-\frac{7}{2}aqE_1(2q) \\
g_{33} &= a^2e^{-2q}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{q}+\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{q^2}\right)-a^2E_1(2q) \\
g_{34} &= a^2e^{-2q}\left(-\frac{3}{4}q+\frac{7}{8}-\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{q}-\frac{1}{16}\cdot\frac{1}{q^2}\right)+\frac{3}{2}a^2q^2E_1(2q) \\
g_{44} &= a^2e^{-2q}\left(\frac{1}{4}+\frac{9}{8}\cdot\frac{1}{q}+\frac{9}{16}\cdot\frac{1}{q^2}\right)+\frac{3}{2}a^2E_1(2q)
\end{aligned}$$