

기준 모델을 이용한 디지털 최소-시간 제어기 및 디지털 적응 제어기의 설계

(The Designs of the Digital Minimum-Time Controller and the Digital Adaptive Controller Using Reference Model)

金 鍾 煥*, 崔 桂 根*

(Jong Hwan Kim and Keh Kun Choi)

要 約

본 논문은 단일 입·출력 선형 시불변 공정의 전달함수를 안다는 가정하에 기준모델을 이용한 디지털 최소-시간 제어기 및 디지털 적응 제어기의 설계를 제안하였다. 기준모델을 이용한 디지털 최소-시간 제어기는 제어계의 전달함수가 기준모델의 전달함수와 같게 되도록 설계되었으며, 이는 데드비트 응답을 갖는다. 기준모델을 이용한 디지털 적응 제어기는 기준모델을 이용한 디지털 최소-시간 제어기에 적응 제어 이론을 적용하여 설계되었다.

이 두 제어기는 모두 설계가 용이하며, 모든 입력신호와 어떤 기준모델을 설정하여도 제어 목적을 이룰 수 있다. 3 차 공정에 대하여 컴퓨터 시뮬레이션을 수행한 결과 이 두 제어기가 매우 유효함을 알 수 있다.

Abstract

This paper presents novel designs of a digital minimum-time controller and a digital adaptive controller using reference model for single input-single output linear time-invariant plants with known parameters.

The proposed digital minimum-time controller which has a deadbeat response is designed to make the transfer function of this controller equal to that of reference model, and the proposed digital adaptive controller is designed by applying the adaptation method to the proposed digital minimum-time controller.

The designs of these two controllers are very simple and easy, and all types of input signal with any reference models are controllable. These *effectivenesses* have been demonstrated by computer simulations carried out for a third-order plant.

I. 序 論

디지털 제환 제어기에 관하여는 이미 많은 연구^[1]가 되어있다.

이러한 제어기는 원하는 제어목적을 이루기 위하여 기준점을 설정하여, 이 기준점과 공정의 출력의 차이가 최소가 되도록 제어기를 설계하였다.

이러한 디지털 제환 제어기중 대표적인 것은 PID 제환 제어기^[2,3]이며, 최소의 overshoot와 빠른 rise time을 갖게하기 위해서는 최소-시간 제어기^[4]의 하나인 데드비트(deadbeat) 제어기^[4]가 사용된다. 본 논문은 기준모델을 이용하여 데드비트 응답을 갖는 디

*正會員, 서울大學校 工科大學 電子工學科
(Dept. of Electronic Eng., Seoul National Univ.)
接受日字: 1984年 9月 19日

지탈 최소-시간 제어를 설계하였으며, 공정의 시간 지연도 함께 고려되었다.

기준모델을 이용하여 제어를 구현하였으므로 기준 모델을 원하는 제어목적에 따라 다양하게 설정할 수 있으며, 입력으로 어떤 입력을 인가하여도 원하는 출력을 바로 얻을 수 있다.

그러나 이 제어기는 데드비트 제어기와 마찬가지로 공정의 정확한 수학적 모델이 필요하게 되며, 공정의 파라미터가 변하는 경우는 원하는 제어 목적을 이룰 수 없다.

또한, 이와같은 디지털 최소-시간 제어기에 적응 제어 이론을 적용하여 디지털 적응 제어를 설계하였다.

디지털 최소-시간 제어기에서는 제어기의 파라미터를 제어기의 방정식으로 부터 구하여 사용하였으나,

디지털 적응 제어기에서는 이러한 제어기의 파라미터를 지수함수적 가중 최소 자승법¹¹⁾을 사용하여 반복적으로 추정하였다.

그 결과 제어하고자 하는 공정의 동특성을 정확히 모르더라도 제어 목적을 이룰 수 있으며, 마찬가지로 공정의 시간지연도 제어기 설계에 문제가 되지 않으며, 또한 공정의 파라미터가 변하더라도 공정의 전달함수의 근사화법¹¹⁾을 적용하여 원하는 제어 목적을 달성할 수 있다.

본 논문은 디지털 최소-시간 제어기와 디지털 적응 제어기에 대하여 각각 기준모델로의 추적과, 공정의 파라미터가 변한 경우, 그리고 레플레이션에 대하여 그 특성을 컴퓨터 시뮬레이션으로 나타내었다.

II. 기준모델을 이용한 디지털 최소-시간 제어기 설계

제어하려는 공정이 다음과 같이 단일 입력, 출력의 선형 시불변 차분방정식으로 표시된다고 하자.

$$A(q^{-1}) Y(k) = q^{-d} B(q^{-1}) U(k) ; d > 0 \quad (1)$$

$$A(q^{-1}) = 1 + a_1 q^{-1} + \dots + a_n q^{-n}$$

$$B(q^{-1}) = b_0 + b_1 q^{-1} + \dots + b_n q^{-n} ; b_0 \neq 0$$

여기서 $\{Y(k)\}$ 는 공정의 출력이고, $\{U(k)\}$ 는 공정의 입력이다.

$\{q^{-1}\}$ 은 backward shift operator 이고, $\{d\}$ 는 공정의 시간지연을 나타낸다.

이 공정은 minimum phase 이라고 가정한다.

추적하려는 기준모델은 다음과 같은 차분방정식으로 표시된다고 하자.

$$A_M(q^{-1}) Y_M(k) = q^{-d} B_M(q^{-1}) U_M(k) \quad (2)$$

$$A_M(q^{-1}) = 1 + a_{m1} q^{-1} + \dots + a_{ma} q^{-ma}$$

$$B_M(q^{-1}) = b_{m0} + b_{m1} q^{-1} + \dots + b_{mb} q^{-mb}$$

여기서 $\{Y_M(k)\}$ 와 $\{U_M(k)\}$ 는 모델의 출력과 입력을

나타내며 bound 되어있고, $\{A_M(q^{-1})\}$ 은 asymptotically stable polynomial 이다.

식(1)의 공정에 대한 제어기는 페루우프가 기준모델의 추적이 이루어 지도록 설계되어야 한다.

기준모델의 추적은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$A_M(q^{-1}) Y(k) = q^{-d} B_M(q^{-1}) U_M(k) \quad (3)$$

기준모델을 추적하는 제어기는 공정의 출력이 위의 (3)식을 만족시키면 된다. 즉, 공정의 출력이 기준모델의 출력과 같게 되면 제어목적이 이루어 진다. 공정의 시간지연 $\{d\}$ 를 포함한 공정의 전달함수를 알고 있으므로 이로부터 그림 1의 디지털 제어를 설계할 수 있다.

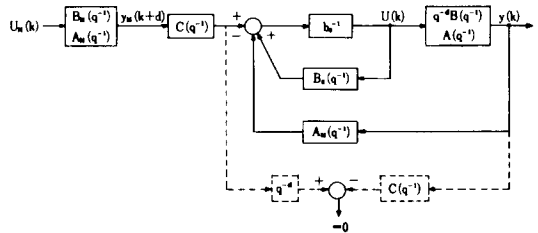


그림 1. 선형 제어기
Fig 1. Linear controller.

공정의 제어입력은 그림 1로부터 다음과 같이 구할 수 있다.

$$U(k) = \frac{1}{B(q^{-1}) S(q^{-1})} [C(q^{-1}) Y_M(k+d) - A_M(q^{-1}) Y(k)] \quad (4)$$

또는,

$$U(k) = \frac{1}{b_0} [C(q^{-1}) Y_M(k+d) - A_M(q^{-1}) Y(k) + B_s(q^{-1}) U(k)] \quad (5)$$

여기서,

$$B_s(q^{-1}) = b_0 - B(q^{-1}) S(q^{-1})$$

$$S(q^{-1}) = 1 + S_1 q^{-1} + \dots + S_n q^{-n}$$

기준모델을 추적하기 위해서는 다음의 방정식이 성립되어야 한다.

$$C(q^{-1}) = A(q^{-1}) S(q^{-1}) + q^{-d} A_M(q^{-1}) \quad (6)$$

$$C(q^{-1}) = 1 + C_1 q^{-1} + \dots + C_{nc} q^{-nc}$$

여기서 $C(q^{-1})$ 은 monic asymptotically stable polynomial 이다.

$C(q^{-1})$ 과 $S(q^{-1})$ 의 최고차수 n_c 와 n_s 는 다음과 같이 결정된다.

i) 만일 $d+m_a \geq n_a$ 이면

$$n_s \geq d+m_a - n_a \text{ 이고, } n_c = n_a + n_s$$

ii) 만일 $n_a \geq d+m_a$ 이면

$$n_s \geq 0 \text{ 이고, } n_c = n_a + n_s$$

(6)식에서 $A(q^{-1})$, $A_M(q^{-1})$, d 를 알고있으므로, $S(q^{-1})$ 을 이용하여 asymptotically stable 한 $C(q^{-1})$ 을 설정할 수 있다.

공정-모델간의 오차는 다음과 같다.

$$e(k) = Y(k) - Y_M(k) \quad (7)$$

제어목적은 다음식이 만족되면 이루어진다.

$$C(q^{-1}) e(k+d) = 0 \quad (8)$$

(8)식은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} C(q^{-1}) e(k+d) &= C(q^{-1}) [Y(k+d) - Y_M(k+d)] \\ &= [A(q^{-1})S(q^{-1}) + q^{-d}A_M(q^{-1})] \\ &\quad Y(k+d) - C(q^{-1})Y_M(k+d) \\ &= B(q^{-1})S(q^{-1})U(k) + A_M(q^{-1})Y(k) \\ &\quad - C(q^{-1})Y_M(k+d) \\ &= b_0U(k) + P_0^T \phi_0(k) + A_M(q^{-1})Y(k) \\ &\quad - C(q^{-1})Y_M(k+d) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (9)$$

$$\phi_0^T(k) = [U(k-1)U(k-2)\cdots U(k-n_0-n_s)]$$

$$P_0^T = [b_0S_1 + b_1, b_0S_2 + b_1S_1 + b_2 \cdots b_{n_0}S_{n_0}]$$

(9)식으로부터 (5)식과 같은 다음의 제어입력으로 제어목적이 이루어진다.

$$U(k) = \frac{1}{b_0} [C(q^{-1})Y_M(k+d) - A_M(q^{-1})Y(k) - P_0^T \phi_0(k)] \quad (10)$$

입력으로 구성된 벡터 $\phi_0(k)$ 는 측정된 과거 입력데이터로부터 구할 수 있고, 파라미터벡터인 P_0 는 $B(q^{-1})$ 과 $S(q^{-1})$ 의 계수로부터 구할 수 있다.

이와같은 기준모델을 이용한 디지털 제어기는 선형 시불변 공정의 전달함수, 즉 공정의 파라미터를 알면 간단하고도 쉽게 설계할 수 있다. 그러나 공정의 파라미터가 부하 등에 의하여 동작중 변하는 경우나, 공정이 다소 비선형인 경우에는 기준모델의 추적특성이 떨어지게 된다. 이와같이 공정의 파라미터가 변하는 경우 적응제어이론을 적용하여 제어 목적을 이룰 수 있다.

III. 기준모델을 이용한 디지털 적응 제어기 설계

II 장에서와 마찬가지로 그림 1의 선형제어기를 이용하면 공정의 제어입력은 (4)식과 같으며, 제어계의 전달함수와 기준모델의 전달함수를 같게하는 (6)식이 같은 방법으로 유도된다.

II 장에서는, (6)식에서 다항식 $S(q^{-1})$ 의 계수를 직접 풀어서 그해를 사용하였으나, 여기서는 $S(q^{-1})$ 의 계수를 적응 알고리즘을 적용하여 반복적으로 추정하기로 한다.

II 장에서 유도된 (10)식에서, 입력으로 구성된 벡터 $\phi_0(k)$ 는 측정된 과거 입력 데이터로 부터 구할 수 있으며, 제어기의 파라미터 벡터 P_0 는 적응 알고리즘에 의하여 반복적으로 구한 추정치 $\hat{P}_0(k)$ 를 사용하기로 하며, 공정의 파라미터가 변하는 경우를 위하여 계수 b_0 대신 이의 추정치 $\hat{b}_0(k)$ 를 사용하기로 한다. 그러면 제어입력 (10)식은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$U(k) = \hat{b}_0^{-1}(k) [C(q^{-1})Y_M(k+d) - A_M(q^{-1})Y(k) - \hat{P}_0^T(k)\phi_0(k)] \quad (11)$$

위식을 다시 쓰면,

$$\begin{aligned} C(q^{-1})Y_M(k+d) &= \hat{P}^T(k)\phi(k) + A_M(q^{-1})Y(k) \quad (12) \\ \hat{P}^T(k) &= [\hat{b}_0(k); \hat{P}_0^T(k)] \\ \phi^T(k) &= [U(k); \phi_0^T(k)] \end{aligned}$$

(12)식을 (9)식에 대입하면,

$$\begin{aligned} C(q^{-1})e(k+d) &= [P - \hat{P}(k)]^T \phi(k) \quad (13) \\ P^T &= [b_0; P_0^T] \end{aligned}$$

$$\phi^T(k) = [U(k); \phi_0^T(k)]$$

필터된 공정-모델 오차 $e_r(k)$ 를 다음과 같이 정의한다.

$$\begin{aligned} e_r(k) &= C(q^{-1})e(k) \\ &= [P - \hat{P}(k-d)]^T \phi(k-d) \end{aligned} \quad (14)$$

제어목적은 다음조건을 만족시키는 적응 메커니즘을 찾는 것이다.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} e_r(k) = 0 \quad Ae_r(0) \neq 0, \quad \hat{P}(0) \in R$$

$$\|\phi(k)\| \leq M < \infty \quad AK$$

이러한 문제는 공정의 시간지연 때문에 직접 해결할 수 없으므로 auxiliary 오차를 다음과 같이 정의한다.

$$\bar{e}(k) = [\hat{P}(k-d) - \hat{P}(k)]^T \phi(k-d) \quad (15)$$

또한, $e_r(k)$ 와 $\bar{e}(k)$ 를 합한 augmented 오차를 정의한다.

$$\begin{aligned} e^*(k) &= e_r(k) + \bar{e}(k) \\ &= [P - \hat{P}(k)]^T \phi(k-d) \end{aligned} \quad (16)$$

(16)식의 추정오차를 최소화시키는 알고리즘을 구하기 위하여 다음과 같은 평가함수를 둔다.

$$J(k) = \sum_{j=d}^k \lambda_1 \lambda_1^{k-j} [\bar{Y}(j) - \hat{P}^T(k)\phi(j-d)]^2 \quad (17)$$

단, $0 < \lambda_1 < 1$

(17)식을 $\hat{P}(k)$ 로 미분하여 이를 0으로 두면 $\hat{P}(k)$ 에 대한 관계식을 얻을 수 있고, 이를 matrix inversion lemma를 이용하여 반복식을 구하면 다음과 같은 지수

합수적 가중 최소화방법 알고리즘을 얻을 수 있다.

$$\hat{P}(k+1) = \hat{P}(k) + L(k+1) [Y(k+1) - \hat{P}^T(k) \phi(k-d+1)] \quad (18)$$

$$\Gamma(k+1) = \frac{1}{\lambda_1} [I - L(k+1) \phi(k-d+1)^T] \Gamma(k)$$

$$L(k+1) = \frac{\Gamma(k) \phi(k-d+1)}{\lambda_1 + \phi(k-d+1)^T \frac{\Gamma(k)}{\lambda_1} \phi(k-d+1)}$$

$$\bar{Y}(k) = P^T \phi(k-d) = C(q^{-1})Y(k) - A_M(q^{-1})Y(k-d)$$

(18)식을 이용하여 반복적으로 추정된 제어기의 파라미터를 (11)식에 대입하면 제어입력 $U(k)$ 를 구할 수 있다.

또한, 공정이 기준 모델로 수렴한 후 부하등에 의하여 공정의 파라미터가 변하여, 이때 (18)식에 의하여 추정된 파라미터가 (6)식과 (9)식을 만족시킨다고 가정하면, 이는 같은 차수에서 전달함수 근사화법^[7]이 성립되어 제어목적을 만족시킬 수 있다.

VI. 시뮬레이션 결과

컴퓨터 시뮬레이션은 기준모델로의 추적과, 공정의 파라미터가 변한 경우와, 그리고 레귤레이션에 대하여 기준모델을 이용한 디지털 최소-시간 제어기와 기준모델을 이용한 디지털 제어기를 사용하여 각각 수행하여 그 결과를 그림 2 와 그림 3 으로 나타내었다.

추적해 나갈 기준모델을 다음과 같이 $A_M(q^{-1})$ 을 asymptotically stable 하게 하여 임의로 설정하였다.

$$Y_M(k) = q^{-d} \frac{(q^{-1})}{A_M(q^{-1})} U_M(k) = \frac{q^{-2}(1+0.4q^{-1})}{(1-0.5q^{-1})(1-(0.7+0.2j)q^{-1})(1-(0.7-0.2j)q^{-1})} U_M(k) \quad (19)$$

제어할 공정은 다음과 같다.

$$Y(k) = \frac{q^{-1}(1+0.4q^{-1})}{(1-0.5q^{-1})(1-(0.8+0.3j)q^{-1})(1-(0.8-0.3j)q^{-1})} U(k) \quad (20)$$

위의 공정이 $K=K_0$ 에서 파라미터가 변하여 다음의 전달함수로 표현된다고 하자.

$$Y(k) = \frac{q^{-2}(0.95+0.45q^{-1})}{(1-0.5q^{-1})(1-(0.85+0.4j)q^{-1})(1-(0.85-0.4j)q^{-1})} U(k) \quad (21)$$

II 장과 III 장의 제어기로 다음과 같이 똑같은 경우에 대하여 컴퓨터 시뮬레이션을 하였다. 모델의 입력을 $U_M(k) = 1$ 로하여 먼저 $K=105$ 까지 기준모델로의 추적을 보였고, $K=106$ 에서 공정의 파라미터가 변하였다가 (식21), $K=206$ 에서 원래의 공정의 파라미터(식20)로 되어 동작할 경우에 기준모델로의 추적을 보였고, $K=306$ 에서부터 끝까지는 $U_M(k) = 0$ 인 레귤레이션을 보였다.

먼저, 기준모델을 이용한 디지털 최소-시간 제어기에서 (6)식을 만족시키는 $S(q^{-1})$ 을 구하기 위하여, $C(q^{-1})$ 이 asymptotically stable 하기 위한 $S(q^{-1})$ 의 조건을 구하여, 이로부터 $C(q^{-1})$ 의 계수를 찾는 방법을 사용하였다. 공정의 차수가 더욱 커지면 이 방법이 매우 유효함을 알 수 있다. $n_s = 2$ 로하여, 위의 방법을 이용하여 $S_1 = 1, S_2 = -0.5$ 로 설정하여 $C(q^{-1}) = 1 - 1.18q^{-1} - 0.07q^{-2} + 0.315q^{-3} + 0.1q^{-4} - 0.0825q^{-5}$ (22)

으로 하였다.

S_1 과 S_2 를 결정하였으므로, (9)식에서 P_0 는

$$P_0^T = [1.4 \quad -0.1 \quad -0.2] \quad (23)$$

이다.

그리고, 기준모델을 이용한 디지털 적응제어기의 경우는, $C(q^{-1})$ 을 위의 제어기와 같이 (22)식으로 하여, $b_0 = 1$ 과 (23)식의 P_0 를 추정하기 위하여 $\Gamma(k)$ 의 초기치를 $\Gamma_0 = 10 I$, b_0 의 추정치의 초기치를 1로하였고, P_0 의 추정치의 초기치를 모두 0으로 하였으며, $\lambda_1 = 0.91, \lambda_2 = 0.09$ 로 하였고, 출력의 초기치는 위의 제어기와 마찬가지로 $Y(0) = 5$ 로 하였다. 이상의 각각의

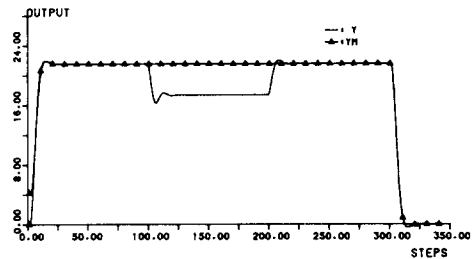


그림 2. 기준모델을 이용한 디지털 최소-시간 제어기의 출력

Fig. 2. Output of the digital minimum-time controller using referenic model.

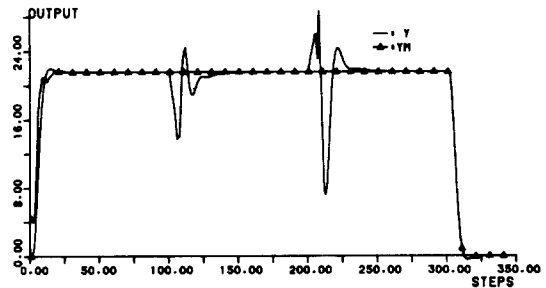


그림 3. 기준모델을 이용한 디지털 적응 제어기의 출력

Fig. 3. Output of the digital adaptive controller using reference model.

조건으로 컴퓨터 시뮬레이션하여 그림 2 에는 기준모델을 이용한 최소-시간 제어기의 출력을 기준모델의 출력과 함께 나타내었고, 기준모델을 이용한 디지털 적응 제어기의 출력과 기준모델의 출력을 함께 그림 3 에 나타내었고, 그림 4 는 기준모델을 이용한 디지털 적응 제어기의 추정된 파라미터를 나타낸 것이다.

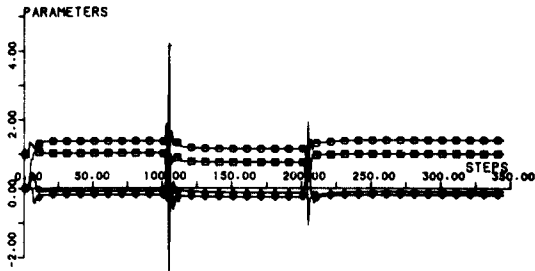


그림 4. 그림 3 의 제어기 파라미터
Fig. 4. Controller parameters of the Fig.3.

V. 結 論

기준모델을 이용한 디지털 최소-시간 제어기와 디지털 적응 제어기를 제안하였다.

기준모델을 이용한 디지털 최소-시간 제어기는 공정의 정확한 수학적인 모델을 알면 쉽게 설계될 수 있으며, 데드비트 응답을 갖으며, 공정의 시간지연이 있더라도 쉽게 설계할 수 있다.

기준모델을 이용한 디지털 적응 제어기는 디지털 최소-시간 제어기에 적응 이분을 적용하여 설계되었으

며, 이결과 제어하고자 하는 공정의 동특성을 정확히 모르더라도 제어목적은 이룰수 있으며, 디지털 최소-시간 제어기에서와 같이 제어기 파라미터를 직접 구할 필요가 없어 매우 편리하며, 공정의 시간지연이 있더라도 용이하게 설계할 수 있다. 컴퓨터 시뮬레이션 결과 이 두제어기가 모두 모든 입력 신호와 기준모델에 대하여 매우 유효함을 알 수 있다.

參 考 文 獻

- [1] B.C. Kuo, *Digital Control Systems*. Holt Rinehart and Winston, Inc. pp. 452-508, 1980.
- [2] T.J. Pemberton, *PID: The Logical Control Algorithm*, Control Engineering, pp. 66-67, May 1972.
- [3] P.D. Roberts and K.E. Dallard, *Discrete PID Controller with a Single Turning Parameter*. Measurement and Control, vol. 7, pp. 469-473, Dec. 1974.
- [4] B.C. Kuo, *Digital Control Systems*,. Holt Rinehart and Winston, Inc. pp. 514-526, 1980.
- [5] 金鍾煥, 朴俊烈, 崔桂根, "Explicit M. R. A. C. 알고리즘을 이용한 직류 전동기 속도제어", 전자공학회지, vol. 20, no. 6, pp. 11-17, 1983.
- [6] C.F. Chen, L.S. Shieh, *A novel Approach to Linear Model Simplification*. Int. J. Contr., vol. 8, no. 6, pp. 561-570, 1968.
- [7] 金鍾煥, 朴俊烈, 崔桂根, "기준모델 적응제어의 새로운 해석", 전자공학회지, vol. 22, no. 3, 1985 발표예정