유한구간 추정법 개관

權 五 圭
(仁荷大 工大 助教授)

■ 차　례 ■

1. 서　론
2. 유한구간 추정법
3. 유한구간 필터
3·1 유한기억필터
3·2 순환형 유한기억필터
3·3 이동구간 필터
3·4 이동윈도우 필터
3·5 통계적 FIR필터
4. 결　론
참고문헌

1. 서　론

필터란 잡음이 섞인 신호로 부터 참신호를(또는 참신호에 근사한 신호를) 추출해내는 장치(앨고리즘)를 일컫는다. 이 필터는 주파수 선택형 필터와 통계적 필터의 두가지로 대별할 수 있다. 주파수 선택형 필터란 신호와 잡음의 주파수 대역이 분리가 가능할 경우에, 원하는 주파수 성분만을 여과시킴으로써 신호를 추출해내는 장치로서, 저역필터, 고역필터, 밴드필터, Butterworth 필터, Chebisheff 필터 등이 이에 속하며, 통신 및 각종 신호처리 분야에 이용되고있다. 이에 반해, 통계적 필터는 잡음이 광대역에 걸쳐 존재하기 때문에 신호와 잡음이 주파수성분 분리가 불가능할 경우에, 신호와 잡음의 통계적 정보를 이용하여 신호를 추정해내는 장치로서, 칼만필터와 위너필터 등이 이에 속하며, 추정 및 계측·제어 분야에 많이 이용되고 있다. 본고에서는 이 통계적 필터 가운데 유한구간필터에 대해서 다루고자 한다.

통계적필터중에 칼만필터[1]는 R.E.Kalman에 의해 제시된 이후로 비행체의 유도제어, 화기제어, 공정제어등 공학의 여러 분야에 널리 응용되고 있다. 이 필터는 신호가 상태공간 모델로 표시되고 신호와 잡음의 통계적분포가 정규적인 경우에 최적의 성능을 보이고 있으며, 또한 필터의 앨고리즘이 간단하여 실현이 용이하기 때문에 광범위하게 응용되고 있는 것이다. 그러나 칼만필터를 포함하여 통계적필터를 실제 응용하는 데에는 두가지 문제점이 발생된다.

첫째, 계산상의 오차문제가 있다. 칼만필터를 계산기로 실현시킬 때, 대상 시스템의 차수가 클 수록 계산량이 크게 증가하고 또 계산상의 오차도 커지게 되는 것이다. 이러한 문제를 해결하기 위해 정보필터(information filter), 제곱근필터(square-root filter), Chandrasekhar형 앨고리즘, 이중 앨고리즘(doubling algorithm)등의 여러가지 방법이 제시되고 있다.[2]

둘째로, 필터의 발산문제가 있다. 칼만필터는 대상시스템과 관측과정의 정확한 모델이 주어진 조건하에서 적용 된다. 그런데 실제의 시스템을 모델링함에 있어서 모델링오차는 불가피한 것이며, 이로 인해 필터에 의한 추정신호와 실제 시스템의 신호간의 추정오차가 발산하게 되는 문제가 생기는 것이다. 이러한 현상을 요약하면 그림1과 같다. 이 발산문제를 해결하기 위해서도 많은 방법이 제시되었다. 대표적인 방법으로는 모델링오차를 보상해주기 위해 시스템 입력잡음의 상호분산을 증가시키는 방법, 입력잡음의 분산을 적응 조절하는 적응 잡음추정법, 필터의 이득행렬에 적절한 하한치를 주는 방법, 관측치에 지수적 가중을 행하는 방법, 그리고 추정시점으로부터 유한한 시간이내의 관측치들만을 사용하여 추정을 행하는 유한구간 추정법 등이 있다.[3]

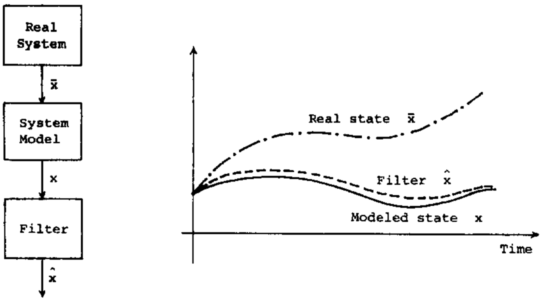

그림 1. 필터의 발산문제

본고에서는 통계적필터의 발산문제의 해결책 중의 하나인 유한구간 추정법에 초점을 두어, 이 접근법의 개념 및 이 방법에 의해 제시되고 있는 필터에 관한 연구동향등을 소개하고자 한다.

2 유한구간 추정법

그림2에서 보는 바와 같이, 필터는 추정하고자 하는 대상 시스템의 신호 x를 관측과정을 통하여 측정한 뒤에, 이 관측치 z를 사용하여 신호 x에 근사한 추정신호 $\hat{x}$을 얻어내는 장치이다. 이 때, 대상 시스템과 관측과정에 존재하는 외란은 각각 시스템잡음 w와 관측잡음 v로써 표현되며, 이 잡음들의 통계적 성질은 적절히 가정한다. 관측과정은 보통 신호 x와 잡음 v의 가산형으로 표시된다. 그리고 신호 x와 $\hat{x}$간의 차를 추정오차라고 부른다.

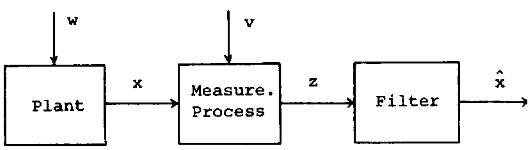

그림 2. 필터와 대상시스템 및 관측과정

이와 같은 추정문제에서 대상 시스템은 신호 x에 대한 상태공간모델이나 상호분산모델로써 표현되며, 추정에 사용하는 관측치로는 측정초기에서부터 추정시점 현재까지의 모든 측정값을 쓰거나, 그 중 일부만을 사용하거나 한다. 필터의 최적성의 기준으로는 평가함수를 사용하는데, 추정오차의 상호분산을 평가함수로서 많이 사용하며, 확률밀도함수를 쓰기도 한다. 이 평가함수를 최소 또는 최대화시킴으로써 얻어지는 최적필터의 구조는 선형일 수도 있고 비선형일 수도 있는데, 필요에 따라서는 필터의 구조를 선형으로 미리 가정할 수도 있다. 칼만필터의 경우에서, 신호 x는 상태공간모델로 표현되고, 관측치는 초기시간부터 추정시점 현재까지의 모든 값을 쓰며, 평가함수로는 추정오차의 상호분산을 사용하며, 필터의 구조에 사전 가정은 두지않는다. 반면에 위너필터에서는 관측치와 평가함수의 사용은 칼만필터의 경우와 같지만, 대상시스템은 상호분산모델로 표현되며, 필터의 구조는 선형으로 가정한다.

본고에서 살펴보고자 하는 유한구간 추정법의 기본개념은 추정시점 현재에서의 추정에 도움이 안 되는 오래된 과거의 관측치들을 쓰지않고, 적당한 유한구간 내의 관측치들만을 사용하여 추정을 행한다는 데에 있다. 그림3에 따라 이를 설명하면, 시점 t_1에서의 추정에는 구간 $[t_1-T,\ t_1]$에서의 관측치들을, 시점 t_2에서의 추정에는 구간 $[t_2-T,\ t_2]$에서의 관측치들을, 임의시점 t에서의 추정에는 구간 $[t-T,\ t]$에서의 관측치들을 사용한다는 것이다.

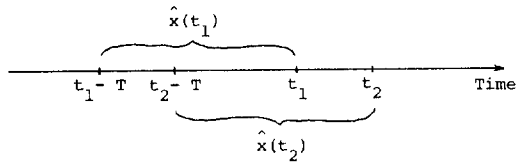

그림 3. 유한구간 추정법

이 추정법에 의한 유한구간 필터로 제시되고 있는 것으로는 Jazwinski의 유한기억필터(Limited memory filter)[4), 5)], Schweppe의 순환형 유한기억필터[6)], W. H. Kwon의 이동구간필터(Receding horizon filter)[7), 8)], Bruckstein의 이동윈도우필터(Sliding window filter)[9), 10)], 그리고 통계적 FIR (Finite impulse response)필터[11), 12), 13)] 등이 있다. 그러면, 이 유한구간 필터들의 적용조건과 특성등에 대해 살펴보기로 한다.

3 유한구간 필터

3.1 유한기억필터(Limited Memory Filter)

이 필터는 1968년에 A. H. Jazwinski에 의해 제시되었으며, 인공위성 궤도결정문제에 응용되었다.[4), 5)] 대상시스템과 관측과정은 다음과 같은 이산형 상태공간모델이다.

$$x(k+1)=A_k x(k),\ k=0,1,2,\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$z(k)=C_k x(k)+v(k),\ k=1,2,3,\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

여기에서 초기상태 $x(0)$는 평균 $\overline{x_0}$, 상호분산 P_0

인 정규적 확률변수로, 관측잡음 $v_{(k)}$는 분산이 R_k인 영평균 백색정규잡음으로 통계적성질을 가정한다. 이 필터의 평가함수로는 유한구간 조건부 확률밀도함수 $p(x_{(n)}|z_{(n,n-N)})$를 사용하며, 이것을 최대화시키는 최대공산추정자(maximum likelihood estimator)로서 유도되는 유한기억필터의 구조는 다음과 같다.

$$\hat{x}_N(n)=P_N(n)[P^{-1}(n|n)\hat{x}(n|n) - P^{-1}(n|n-N)\hat{x}(n|n-N)] \quad (3)$$

여기에서 $\hat{x}_N(n)$, $\hat{x}(n|n)$, $\hat{x}(n|n-N)$는 각각 시점n에서의 유한기억필터, 칼만필터, 그리고 시점 n−N에서의 N단 예측자를 나타내며, $P_N(n)$, $P(n|n)$, $P(n|n-N)$는 각각 유한기억필터, 칼만필터, N단예측자의 추정오차 상호분산을 나타낸다.

식(3)에서 보는 바와 같이 유한기억필터는 칼만필터와 N단 예측자의 가중차로서 얻어진다. 그런데 서론에서 언급했듯이 칼만필터는 발산문제를 안고 있으며, 이러한 칼만필터를 그대로 사용한다는 점에서 유한기억필터는 문제시된다. 또한 이 필터는 대상 시스템이 이산형상태 공간모델로서 시스템 잡음이 없는 경우에만 적용된다는 제약조건이 있어 적용범위가 매우 제한된다. 시스템잡음이 있는 경우와 연속형의 경우, 그리고 상호분산모델의 경우에 대응되는 결과들은 과제로서 남아있다.

3.2 순환형 유한기억필터

이 필터는 Schweppe[6, 1973]에 의해 제시된 것으로서, 대상시스템과 평가함수는 앞절의 유한기억필터와 같다. 이 필터에서는 필터의 구조를 순환형으로서 다음과 같이 가정한 뒤,

$$\hat{x}_N(n+1)=\Psi_n\hat{x}_n(n)+K_n[z(n)-C_n\hat{x}_N(n)]+L_n[z(n-N)-C_{n-N}\hat{x}_N(n-N)] \quad (4)$$

평가함수를 최대화시키는 필터이득행렬 Ψ_n, K_n, L_n 등을 구함으로써 필터를 구성한다.

이 필터는 식(4)에서 보는 바와 같이 순환형으로서 비순환형인 전절의 유한기억필터에 비해 계산상의 문제점을 다소 해결되나, 대상시스템이 이산형 상태모간모델로서 시스템잡음이 없는 경우에만 적용이 가능하다는 제약성을 여전히 지니고 있다. 대상시스템이 연속형인 경우와 시스템잡음이 있는 경우의 대응되는 결과와 더불어, 필터의 안정도 판별등이 과제로 남아있다.

3.3 이동구간 필터(Receding Horizon Filter)

이 필터는 최적 선형조정기와 칼만필터 간의 쌍대성에 입각하여, 이동구간 조정기(receding horizon regulator)의 쌍대필터로서 제시된 것이다.[7),8)] 연속형 필터의 경우에 대상시스템은 다음과 같은 연속성 선형 상태공간모델로 표현된다.

$$x(t)=A_t x(t)+B_t w(t) \quad (5)$$
$$z(t)=C_t x(t)+v(t) \quad (6)$$

여기에서 시스템잡음 w(t)와 관측잡음 (t)는 영평균 백색잡음으로 상호분산이 각각Q_t, R_t로서 서로 상관관계가 없다고 가정하며, 초기상태는 평균 $\bar{x}_0$, 상호분산이 P_0인 불규칙변수로 가정한다. 이러한 가정하에서 이동구간조정기와의 쌍대성을 이용하여 필터를 구성하면 다음과 같은 형태가 된다.

$$\dot{\hat{x}}(t)=A_t\hat{x}(t)+\sum(t-T,t)C_t'R_t^{-1}[z(t)-C_t\hat{x}(t)] \quad (7)$$

여기에서 필터의 이득행렬 $\sum$는 유한구간 [t−T, t]에서 정의되는 리카티형 미분방정식을 만족시킨다.

식(7)에서 볼 수 있듯이, 이동구간 필터는 구조가 표준형 칼만필터와 동일한 간단한 형태를 지니고 있으며, 이동구간 조정기와의 쌍대성으로부터 필터의 안정도가 보장되고, 이득행렬$\sum$의 계산이 용이하다는 장점을 갖고 있다. 이 필터는 대상시스템이 선형상태공간모델로 주어지면, 연속형이나 이산형의 모든 경우에 적용이 가능하며, 대상시스템이 시불변이면 이 필터도 시불변이 되어 구조가 더욱 간단해지는 장점도 지니고 있다. 그런데 이상과 같은 장점에도 불구하고 이 필터는 조정기와의 쌍대성으로부터 유도된 것으로서, 최적성을 지니지 못하는 것이 문제로 남아있다.

3.4 이동윈도우 필터(Sliding Window Filter)

이 필터는 최근에 제시된 것으로서, 앞절에서와 같은 식(5),(6)의 상태공간모델에 대해 추정오차의 상호분산, 즉 $J=E[x(t)-\hat{x}(t)]'[x(t)-\hat{x}(t)]$를 평가함수로 하여, 이 문제를 산란이론(scattering theory)을 이용하여 풂으로써 구해진다.[9),10)] 이 이론은 Hamiton방정식이라고도 불리우는 2점경계치문제에 적용되며, 분석과정 중에 리카티형 미분방정식이 자연 발생되는 까닭에, 이를 추정문제나 최적제어 문제등에 적용할 수 있는 것이다.[9),14),15),16)] 연속형 시스템의 경우 이 필터는 다음과 같은 형태가 된다.

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}\hat{x}(t)\\ \hat{x}_S(t-T)\end{bmatrix}=\Psi_T(t)\begin{bmatrix}\hat{x}(t)\\ \hat{x}_S(t-T)\end{bmatrix}+$$

$$K_T(t)\begin{bmatrix} z(t) \\ z(t-T) \end{bmatrix} \qquad (8)$$

여기에서 $\hat{x}(t)$는 이동윈도우필터, $\hat{x}_S(t-T)$는 상태 $x(t-T)$에 대한 이동윈도우평활기(smoother)이며, 필터의 이득행렬 $\Psi_T(t)$와 $K_T(t)$는 산란이론에서 나타나는 연산과정을 거쳐 얻어지는데 그 계산하중이 매우 큰 편이다.

이동윈도우 필터는 식(8)에서와 같이 순환형으로 주어지며, 대상시스템이 시불변이면 필터도 시불변이 되어 구조가 간단해지는 등의 장점을 지니고 있다. 그러나 이 필터는 안정도와 초기치 조건 및 최적성등이 문제시되며, 시변 시스템의 경우에는 계산하중이 너무 크다는 단점을 안고 있다. 실제로 시스템의 차수가 N이라하면, 식(8)의 이득행렬Ψ_T는 2N×2N행렬이 되어 이것을 산출하려면 막대한 계산량을 요하게 되는 것이다. 이산형 시스템의 경우에 대응되는 결과도 제시되고 있으나 앨고리즘이 상당히 복잡하다.

3.5 통계적 FIR필터

식(5), (6)으로 표시되는 대상시스템에 이동윈도우 필터에서와 같은 추정오차의 상호분산을 평가함수로 취하고, 더불어 필터의 구조를 다음과 같은 선형구조로 가정함으로써 얻어지기 것이 통계적 FIR 필터이다.

$$\hat{x}(t\,|\,T)=\int_{t-T}^{t} H(t,\tau;T)\,z(\tau)\,d\tau \qquad (9)$$

여기에서 T는 추정에 사용되는 관측치의 구간을 나타내며, H는 필터의 임펄스 응답인데, 이 응답이 유한구간[t-T, t]에서만 존재하기 때문에 이 필터를 FIR(finite impulse response)필터라고 부르는 것이다. 이 필터의 임펄스 응답 H는 리카티형 미분방정식을 풀음으로써 비교적 간단히 구해지는데, 그 유도과정은 적분방정식 이론에 근거할 해석법을 통해 전개된다.[11),12)]

이 필터는 식(9)의 FIR 구조로 인해, FIR필터의 일반적 특성으로서 유한입출력(BIBO) 안정도가 보장되며, 계수변화나 계산상의 오차에 대한 강인성(robustness)을 지니게 된다. 그리고 대상시스템이 시불변이면 이 필터도 시불변이 되어 구조가 매우 간단해지는 장점을 지니고 있다. 그런데 이 필터도 다른 유한구간 필터와 마찬가지로 시변 시스템에 대해서는 계산하중이 크다는 단점을 안고 있다.

식(9)로 표시되는 이 필터는 비순환형인데, 필요에 따라서는 식(8)과 유사한 형태의 순환형으로 바꿀 수도 있으나, 그 경우의 필터 이득행렬 계산은 상당히 복잡해지게 된다. 대상 시스템이 상호분산 모델로 주어지는 경우에, 앞서 살펴본 유한구간 필터들은 적용이 불가능한데 반해, 이 필터는 같은 유도과정을 거쳐 구해지는 것은 특기할 만하다. 이산형 시스템의 경우에 있어서도 상기한 것과 유사한 결과들이 제시된다.[12),13)]

4 결 론

이상으로 유한구간 추정법의 개념과 이 방법에 의한 유한구간 필터의 대표적인 예를 살펴 보았다. 유한구간 추정법은 통계적 필터의 발산문제에 대한 해결책의 하나로 제시된 것으로서, 이 추정법을 사용하는 필터로는 유한기억 필터, 순환형 유한구간 필터, 이동윈도우 필터, 이동구간 필터, 통계적 FIR필터 등이 있고, 각 필터들의 장단점은 3절에서 살펴본 바와 같다.

본고에서 개관한 유한구간 필터들은 표준형 칼만 필터의 발산문제의 대책으로서 제시된 것이나, 표준형 칼만필터에 비해 계산하중이 크다는 문제점을 공통적으로 지니고 있으며, 각 필터에 있어서의 모델링오차 해석과 계산기 모의실험 등에 의한 비교·검토, 그리고 이 필터들 간의 관계규명과 안정도 판별 문제등이 과제로 남아 있다.

이 분야에 관심을 갖고 있는 분들의 연구에 조금이나마 도움이 되길 바라면서 졸고를 맺는다.

참고문헌

1) Kalman, R. E., "A new approach to linear filtering and prediction problems", Journal of Basic Engineering(ASME), vol. 82, pp. 35-45, Mar.1960.
2) Anderson, B.D.O. and Moore, J.B., Optimal filtering , Prentice-Hall, Inc., New Jersey, pp. 129-164, 1979.
3) Gelb, A. ed., Applied optimal estimation. M. I. T. Press, pp. 277-314, 1974.
4) Jazwinski, A.H., "Limited memory optimal filtering". IEEE Transactions on Automatic Control, vol. AC-13, No. 5, pp. 558-563, Oct. 1968.
5) Jazwinski, A.H., Stochastic Process and Filtering Theory , Academic Press, New York, 1970.
6) Schweppe, F.C., Uncertain Dynamic System ,

prentice Hall Inc., NJ, 1973.

7) 권욱현, 고명삼, 박기헌, "Kalman fliter with moving horizon", 대한전기학회지, 제29권 7호, 1980.

8) Kwon, W. H., Bruckstein, A.M. and Kailath, T., "Stabilizing state-feedback design via the moving horizon method", Int. J. of Control, March 1983.

9) Bruckstein, A.M. and Kailath, T., "The scattering formulation for linear state-space estima tion and control problems", ISL Report, Stanford University, May 1982.

10) Bruckstein, A.M. and Kailath, T., "Recursive limited memory filtering and scattering theory", IEEE Trans. Inform. Theory, vol. IT-31, No. 3, pp. 440-443, May 1985.

11) Kwon W.H. and Know O.K., "Wiener FIR filters for continuous-time state-space models" '85 Proc. American Control Conference, vol. 1, pp. 189-194, June 1985.

12) Kwon O.K,. "Wiener FIR filters for linear systems", Ph. D. Dissertation, Dept. of Contr. and Instru. Engr., S. N. U., Feb. 1985.

13) Chen, C.T., One Dimensional Digital Signal Processing", Marcel Dekker, Inc., New York and Basel, pp. 408-430, 1979.

14) Ljung, L., Kailath, T. and Friedlander, B., "Scattering theory and linear least squares estimation-part 1: continuoustime problems", Proc. IEEE, vol. 64, no. 1, pp. 131-139, Jan. 1976.

15) Friedlander, B., Kailath, T. and Ljung, L., "Scattering theory and linebr least squares estimation - part II: discretetime problems," Journal of the Franklin Institute, vol. 301, Nos. 1 and2 pp. 71-82, Jan-Feb. 1976.

16) Verghese, G., Friedlander, B. and Kailath, T., "Scattering theory and linear least squares estimation — part III: the estimates", IEEE Transaction on Automatic Control, vol. AC-25, No. 4, pp. 794-802, Aug. 1980.