

論 文
34~9~1

표면전하법을 이용한 일반 3 차원 전기해석

Analysis of 3-Dimensional Electric Fields with Surface Charge Method

朴 鍾 根* · 金 光 洙**
(Jong-Keun Park · Kwang-Soo Kim)

Abstract

This paper deals with a surface charge simulation method of calculating three-dimensional electric fields and capacitance. The principle is to divide the electrode surface into rectangular or triangular elements of which charge density is the linear function of the electrode coordinate and to formulate a linear equation for the coefficients of charge density function and to determine those coefficients by boundary conditions. It has been shown that the method can give satisfactory results for thin rectangular plates where the other methods is difficult to be applied

1. 序 論

高電壓機器의 絶緣設計 및 高電壓現象의 解析에 대한 理論的 뒷받침을 위해 電界解析이 중요한 문제로 登場한다. 數值電界解析 方法으로는 領域分割法인 有限要素法(FEM), 差分法(FDM)이 있고, 境界分割法인 電荷重疊法(CSM), 表面電荷法(SCM)이 있으나 計算對象이 高電壓分野에서는 대부분 無限境界라는 特性때문에 領域分割法보다는 境界分割法을 주로 사용하며 이 중 表面電荷法은 電荷重疊法에 비해 計算時間과 精密度에서 뒤떨어지는 반면 電荷重疊法으로 다루기 곤란한 얇은 電極이나 복잡한 形狀이 包含된 場, 多媒質場을 解析할 수 있는 長點이 있다.^{1,9}

表面電荷法은 1970年代 初 獨逸의 H. Singer 가 回轉對稱場 解析方法을 제시한 以來 지금까지 여러 경우에 대한 表面電荷法이 개발되어 사용되고 있지만 對稱性이 전혀 없는 一般三次元에 대해서는 아직 具體的인 計算方法이나 計算上問題點이 報告되지 않고 있다.⁴ 그러나 架空送電線에 의한 靜電誘導問題를 解決하려면 一般三次元場의 電界分布가 解析 되어야 하고, 高壓送電이 人體에 미치는 影響을 研究하려면

一般三次元 導體의 靜電容量을 구할 수 있어야만 하므로¹¹ 一般三次元場을 解析할 수 있는 表面電荷法 개발이 시급하다.

여기서는 電極表面을 四角形 또는 三角形要素로 分割하여 一般三次元을 解析할 수 있는 方法, 未知數를 감소시키는 方法, 特異點 處理方法등에 대해 記述하였으며, 두 가지 要素分割方式의 長短點에 대하여 論하였다.

2. 一般三次元 解析

電極表面을 T개의 要素(三角形 또는 四角形)로 分割하면 空間上 또는 電極表面위의 點 P(x, y, z)의 電位 ϕ_p 는 單一要素에 의한 電位 ϕ^e 의 合 즉,

$$\phi_p = \sum_{e=1}^T \phi^e \quad (1)$$

로 주어지며, ϕ^e 는 電極表面을 X-Y 平面으로 하는 座標系를 形成했을 때 다음과 같다.

$$\phi^e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_R \frac{\sigma^e(X, Y)}{l} dXdY \quad (2)$$

여기서 l은 計算點과 電極表面의 微小要素 사이의 거리이며

$$l = \sqrt{(X-x)^2 + (Y-y)^2 + z^2}$$

이고 $\sigma^e(X, Y)$ 는 e 번째 要素의 電荷密度極數이며, 四角形要素일 경우에는

*正 會 員 : 서울大 工大 電氣工學科 助教授 · 工博
**正 會 員 : 일진전기개발부
接受日字 : 1985年 1月 26日

$$\sigma^e(X, Y) = \alpha_1^e + \alpha_2^e X + \alpha_3^e Y + \alpha_4^e XY$$

로 近似시키고 三角形要素일 경우에는

$$\sigma^e(X, Y) = \alpha_1^e + \alpha_2^e X + \alpha_3^e Y$$

로 近似시킨다.

式(2)의 積分은 解析式으로 나타낼 수 있으므로 式(2)를 未知인 $\sigma^e(X, Y)$ 의 係數 α_i^e ($i = 1, 2, 3, 4$)로써 表現하면

$$\phi^e = [G^e] \cdot [\alpha^e] \quad (2')$$

로 되고, 여기서 $[G^e]$ 는 e 번째 要素의 電位係數 行列, $[\alpha^e]$ 는 e 번째 要素의 電荷密度係數行列이다.

$$[G^e] = [g_1^e \ g_2^e \ g_3^e \ g_4^e], [\alpha^e] = [\alpha_1^e \ \alpha_2^e \ \alpha_3^e \ \alpha_4^e]^T$$

式(2')를 T개의 全要素에 對해 適用하여 式(1)을 다시 쓰면

$$\phi_P = \left\{ [G^1] \ [G^2] \ \dots \ [G^T] \right\} \begin{Bmatrix} [\alpha^1] \\ [\alpha^2] \\ \vdots \\ [\alpha^T] \end{Bmatrix} \quad (1')$$

로 되고, 주어진 境界條件인 既知의 電位값을 利用하여 式(1')와 同一한 形態의 式을 N개 만들어 結合하면

$$[\phi] = [G] [\alpha] \quad (3)$$

의 線型方程式이 構成된다.

여기서 N은 未知數의 個수이고 $[\phi]$ 는 既知의 $N \times 1$ 電位行列, $[G]$ 는 $N \times N$ 電位係數行列, $[\alpha]$ 는 $N \times 1$ 電荷密度係數行列이다.

이 過程을 흐름도(flow chart)로 그려보면 그림 1과 같다.

計算過程은 有限要素法과 類似한 面이 있어도 有限要素法과는 根本上로 다른 方法이다. 一般三次元 空間일 경우나 開空間일 경우 空間을 分割해야하는 有限要素法으로는 그 分割이 상당히 까다로워 解析이 어렵지만 電極表面만 分割하는 表面電荷法은 보다 적은數의 要素로도 解析이 可能하고, 表面의 電荷密度를 近似的으로 구하여 이 電荷密度로써 電位, 電界를 구하는 方法이므로 導體의 靜電容量을 바로 구할 수 있는 長點이 있다. 要素에 의한 電位, 電界가 解析式으로 表現될 수 있어서 計算時間의 問題는 그리 크지 않지만, 表面의 電荷를 直接近似시키는 方法이므로 表面近處에서 電界誤差가 커질 수 있기 때문에 電界의 精密度를 높이기 위해서 補完이 需要하다.

지금까지 보고된 表面電荷法은 모두 輪郭點을 要素의 節點(node)에 두어 有限要素法과 같은 方式으로

線形方式을 構成하였으나^{4), 9), 7), 8)} 이 方法은 未知數의 個수만 줄일 수 있을 뿐 特異點인 節點을 어떻게 處理했는지가 不分明하고 또한 處理가 된다 하더라도 計算上 無理가 많아진다. 그러나 輪郭點을 要素의 內部에 適切히 配置하면 이러한 無理가 없으므로 여기서는 이 方法을 사용했다.

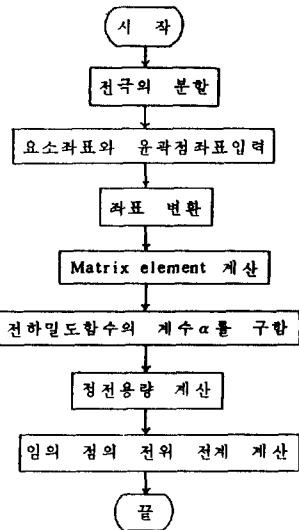


그림 1. 3차원 표면전하법의 간략한 흐름도
Fig. 1. Flow chart of 3-dimensional SCM.

(1) 座標變換

그림 2와 같이 \vec{AB}, \vec{AC} 가 이루는 平面이 X-Y 平面과 一致하도록 座標系의 基底(basis)를 變換한다.

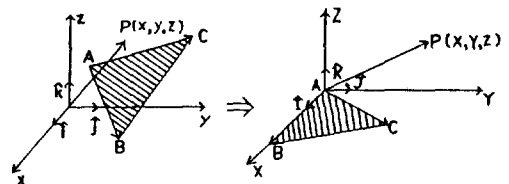


그림 2. 좌표계의 기저변환

Fig. 2. Transformation of coordinate's basis.

原座標系의 單位基底벡터를 $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ 라 하면 이 벡터를 基底로 하는 두 方向의 벡터 \vec{AB}, \vec{AC} 로써 새 座標系의 單位基底벡터 $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ 를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\hat{i} = \frac{\vec{AB}}{|\vec{AB}|}$$

$$\hat{j} = a \cdot \vec{AB} + b \cdot \vec{AC}$$

$$\hat{K} = \hat{i} \times \hat{j}$$

여기서 a, b 는 實數이며

$$a = 1 / \sqrt{|\vec{AB}|^2 \left(\frac{|\vec{AB}|^2 \cdot |\vec{AC}|^2}{\vec{AB} \cdot \vec{AC}} - 1 \right)}$$

$$b = \pm |\vec{AB}| / \sqrt{|\vec{AB}|^2 \cdot |\vec{AC}|^2 - (\vec{AB} \cdot \vec{AC})^2}$$

로 주어진다.

座標變換式은 基底벡터 $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ 를 모두 Column 行列로 나타내었을 때

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = [\hat{i} \hat{j} \hat{k}]^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (4)$$

이며, 여기서 $(x \ y \ z)^T$ 는 原座標系에서의 임의의 點의 座標이고, $(X \ Y \ Z)^T$ 는 $(x \ y \ z)^T$ 를 새 座標系로 表現한 座標이다.

(2) 四角形要素의 解析式

$$\phi^e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_R \frac{\alpha_1 + \alpha_2 X + \alpha_3 Y + \alpha_4 XY}{\sqrt{(X-x)^2 + (Y-y)^2 + z^2}} dX dY \quad (5)$$

이 積分의 最終式은 다음과 같다.

$$\phi^e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} I(X, Y) \begin{pmatrix} X_B \\ X_A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_B \\ Y_A \end{pmatrix}$$

$$I(X, Y) = \alpha_1 I_1 + \alpha_2 (I_2 + x I_1) + \alpha_3 (I_3 + y I_1) + \alpha_4 (I_4 + x I_3 + y I_2 + xy I_1)$$

$$I_1 = (Y-y)F_x + (X-x)F_y - z \cdot$$

$$\text{Sin}^{-1} \left(\frac{X_z + (X-x)D}{(D + (X-x) \cdot \sqrt{X_z^2})} \right)$$

$$I_2 = \left\{ (Y-y) \cdot D + X_z \cdot F_y \right\} / 2$$

$$I_3 = \left\{ (X-x) \cdot D + Y_z \cdot F_x \right\} / 2$$

$$I_4 = D^3 / 3$$

$$F_x = I_n (D + X - x), F_y = I_n (D + Y - y)$$

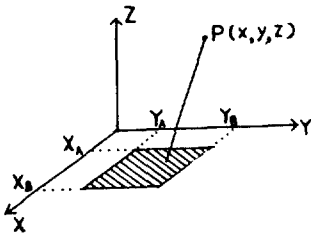


그림 3. 사각형 요소
Fig. 3. Rectangular element.

$$X_z = (X-x)^2 + z^2, \quad Y_z = (Y-y)^2 + z^2$$

$$D = \sqrt{(X-x)^2 + (Y-y)^2 + z^2}$$

式(5)의 二重積分은 積分過程에 積分項이 많이 發生하는 複雑한 形態이긴하나 右函數(even function) 꼴의 積分에만 有意하면 큰 問題가 없으므로 여기서는 그 結果만 적어 놓았으며, 計算點의 座標(x, y, z)가 ① z=0, y=Y, x > X ② z=0, x=X, y > Y 인 경우에는 無限대가 되는 項이 發生하므로 이러한 特異點을 處理하기 위해 그림 4 와 같이 特異點 近處 네 點의 平均으로 特異點의 電位, 電界를 決定했다.

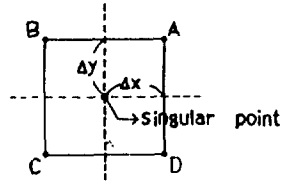


그림 4. 사각형 요소의 특이점처리
Fig. 4. Singular point of rectangular element.

(3) 三角形要素의 解析式

$$\phi^e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_R \frac{\alpha_1 + \alpha_2 X + \alpha_3 Y}{\sqrt{(X-x)^2 + (Y-y)^2 + z^2}} dX dY \quad (6)$$

Green's Theorem

$$\iint_R \left(\frac{\partial g}{\partial X} - \frac{\partial f}{\partial Y} \right) dX dY = \int_C (f dX + g dY)$$

을 이용해서 面積分(Surface Integral)을 線積分(Line Integral)으로 變換하여 積分하면 最終式은 다음과 같아진다.

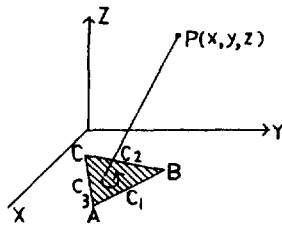


그림 5. 삼각형 요소
Fig. 5. Triangular element.

$$\phi^e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum \left\{ \alpha_1 \cdot S_1 + \alpha_2 (xS_1 + T_1) + \alpha_3 (yV_1 + U_1) \right\}_A^B$$

$$S_1 = (Y-y) \cdot F_x - (Y-y) - N_s \cdot Q_s + P_s$$

$$V_1 = -(X-x) \cdot F_y + (X-x) - S_i \cdot N_s \cdot Q_s - P_v$$

$$T_1 = S_m \cdot \left[\{X-x + S_m(Y-y)\} \cdot D + D_4 \cdot Q_s \right] / S^2 / 2$$

$$U_1 = -T_1 / S_m$$

$$F_x = I_n (D + X - x), F_y = I_n (D + Y - y) \quad (6-1)$$

$$Q_s = I_n \{X-x + S_m(Y-y) + S_s \cdot D\} \quad (6-2)$$

$$P_s = 2 \cdot S_i \cdot z \cdot \tan^{-1} \left\{ \frac{(S_s + 1)(D + X - x) + S_m(Y - y)}{|S_m| \cdot z} \right\} \quad (6-3)$$

$$P_v = 2 \cdot S_i \cdot z \cdot \tan^{-1} \left\{ \frac{(S_s + |S_m|)(D + Y - y) + S_i(X - x)}{z} \right\}$$

$$D_4 = S_s \cdot (N_s^2 + Z^2), N_s = (x \cdot S_m + S_n - y) / S_s$$

$$S_i = S_m / |S_m|, S_s = \sqrt{1 + S_m^2}$$

$$D = \sqrt{(X-x)^2 + (Y-y)^2 + z^2}$$

$$S_m = (Y_B - Y_A) / (X_B - X_A)$$

$$S_n = (Y_A X_B - X_A Y_B) / (X_B - X_A) \quad (6-4)$$

여기서 \sum 는 曲線 C_1, C_2, C_3 에 대한 合을 意味하며 特異點의 處理는 아래와 같다.

- ① $X_A = X_B$ 또는 $Y_A = Y_B$ 일 때는 四角形要素解析式을 使用한다. (式 6-4)
- ② F_x, F_y 가 無限大로 될 때는 四角形要素의 경우와 同一하다. (式 6-1)
- ③ $z = 0$ 이면 $P_s = P_v = 0$ 로 둔다. (式 6-3)
- ④ $Q_s \rightarrow \infty$ 일 때는 그림 6과 같이 特異點 近處 네點(A, B, C, D)의 平均으로 特異點의 電位, 電界를 決定한다.

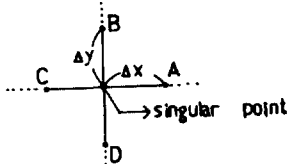


그림 6. 삼각형 요소의 특이점처리
Fig. 6. Singular point of triangular element.

(4) 電界計算

電界의 解析式은 $\vec{E} = -\text{grad}(\phi)$ 로 부터 求解될 수 있지만, 解析式의 項이 많고, 電界를 求하기 위한 새로운 서브루틴(Subroutine)이 必要하여 프로그램 길어질뿐 아니라 電荷密度의 影響을 크게 받는 電界를 近似的으로 求한 電荷密度로 부터 求하게 되면 誤差가 커질우려가 있으므로 다음과 같은 數值의 方法을 使用했다.

任意的 S 方向으로의 電位變化를

$$\phi(S) = a_0 + a_1 S + a_2 S^2$$

와 같은 2次函數로 近似시킨 후, 計算點의 電位를 ϕ_0 라 두고 $\Delta S, 2\Delta S$ 떨어진 點의 電位를 각각 ϕ_1, ϕ_2 라 두면 S 方向으로의 電界 式은

$$E = (3\phi_0 - 4\phi_1 + \phi_2) / 2 \cdot \Delta S$$

로 주어지게 된다.

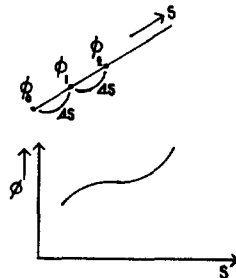


그림 7. 전위의 2차함수 근사화
Fig. 7. Second-order approximation of the potential function.

3. 計算結果 및 考察

一般的으로 얇은 誘電체가 包含된 場에서는 有限要素法이나 電荷重疊法보다 表面電荷法이 有利하다. 回轉對稱場에서 그림 8-a와 같이 誘電체가 配置되었을 경우를 모델로 하여 3方法을 比較해 본 結果 (<

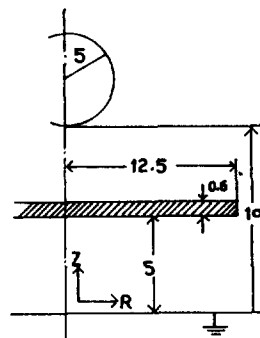


그림 8-a. 얇은 유전체를 포함한 형상
Fig. 8-a. Configuration with thin dielectrics.

그림 8-b, c) 과 < 표 1 >), 表面電荷法은 電荷重疊法에 비해 1/5 정도의 未知數를 使用했지만 計算된 값이 비슷하며 有限要素法은 全般的으로 다른 두 방법과 差異가 많음을 알 수 있다.

표 1. SCM, CSM, FEM 비교

Table 1. Comparison among SCM, CSM and FEM.

	SCM	CSM	FEM
未知數	50	238	304
計算時間	620 (ms)	100 (ms)	—

※ 계산시간은 한 점의 전위, 전계를 구하는 데 걸리는 시간

표 2. 사각형, 삼각형, 혼합법 비교

Table 2. Comparison among rectangular, triangular and combination method.

	사각형	삼각형	Combination	Analytic
정전용량(pF)	72.0	69.4	69.2	70.8
요소 수	24	32	24	
미 지 수	24	24	21	
계산시간(ms)	460	960	760	

※ 계산시간은 한점의 전위, 전계를 구하는데 걸리는 시간임. 단위는 msec.

그림 8-a 와 같은 모델에서 空氣層의 電界強度는 誘電체가 없을 때보다 세어진다는 事實¹⁰⁾로 미루어 보아 有限要素法보다는 表面電荷法, 電荷重疊法의 結果가 妥當性 있다. 誘電체의 두께가 더 얇아진다면 電荷重疊法은 未知數가 너무 많아져서 困難하지만 表面電荷法으로는 誘電체의 두께에 關係없이 相對的으로 적은 未知數로써 計算이 可能하므로 이러한 모델에 대해 아주 適合한 方法이라고 볼 수 있다.

一般三次元の 간단한 形狀인 平板導體에 表面電荷法을 適用해 본 結果가 그림 9, 10, 11 이다. 그림

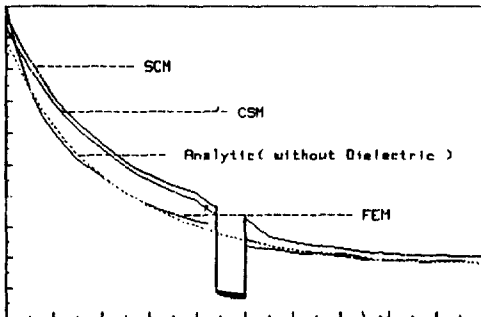


그림 8-b. Z 축상의 전기분포

Fig. 8-b. E-field distribution along Z-axis.

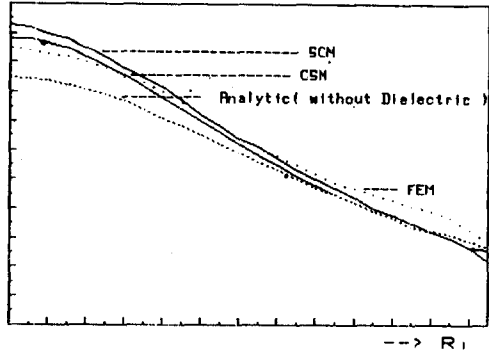


그림 8-c. 유전체위의 전기분포

Fig. 8-c. E-field distribution at the surface of dielectrics.

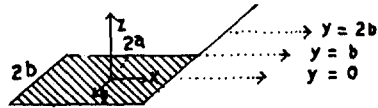


그림 9-a. 직사각형 (4.5×3) 모델

Fig. 9-a. Rectangular (4.5×3) model.

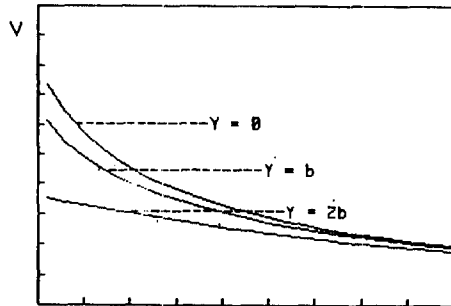


그림 9-b. Z=0에서의 전위분포

Fig. 9-b. Potential distribution at Z=0.

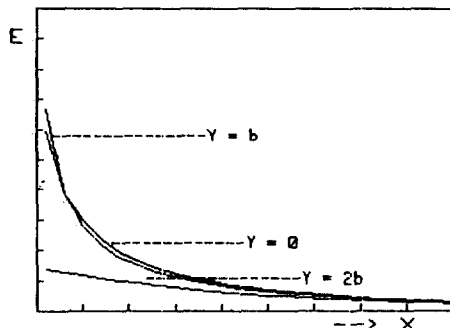


그림 9-c. Z=0에서의 전기분포

Fig. 9-c. E-field distribution at Z=0

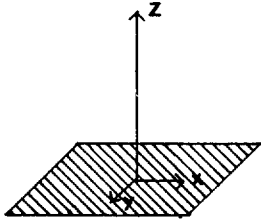


그림 9-d. 직사각형 모델
Fig. 9-d. Rectangular model.

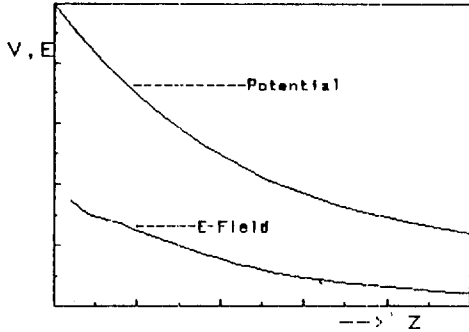


그림 9-e. 원점에서 Z 방향으로의 전위 및 전계분포
Fig. 9-e. Potential and E-field dist. along Z-axis at origin.

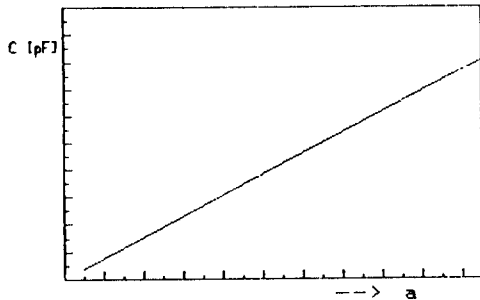


그림 10. 정사각형 평판의 정전용량
Fig. 10. Capacitance of square flat ($a \times a$).

9-a에서 $a=2.25$, $b=1.5$ 로 두고 6개의 사각형 요소 (未知數 24)로 分割하여 平面上 ($z=0$)에서 3개의 y 값에 대해 x -방향으로, 導體中心 ($x=y=0$)에서 z -방향으로의 電位, 電界를 計算한 것이 그림 9-b, c, e 이다.

그림 10은 정사각형 ($a \times a$)의 경우 a 에 대한 靜電容량의 變化를 나타낸 것으로 靜電容량은 幾何學的인 配置가 同一할때 導體面積의 平方根에 比例함을 알 수 있다. 여기서 $a=1$ 일때 靜電容량은 38.4 pF 이며, 그림 9-a의 경우는 141 pF 이다.

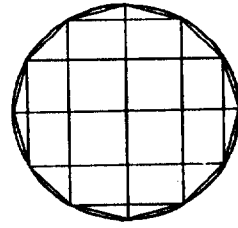


그림 11-a. 혼합법을 이용한 원판도체의 해석경우 분할상태

Fig. 11-a. Subdivision configuration to solve a disk problem with a combination method.

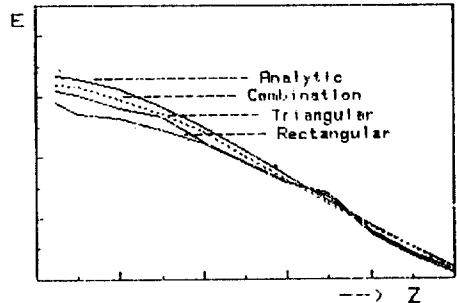


그림 11-b. 원점에서 Z 방향으로의 전계분포
Fig. 11-b. E-field distributions along Z-axis at origin.

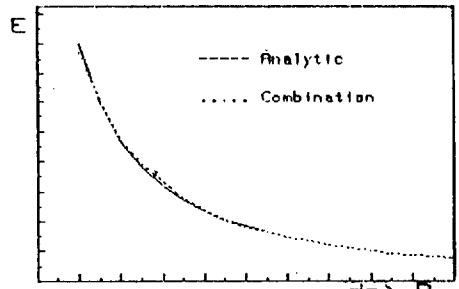


그림 11-c. $Z=0$ 에서 R 방향으로의 전계분포
Fig. 11-c. E-field distributions along R direction at $Z=0$.

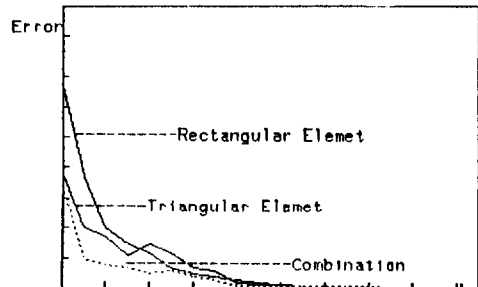


그림 11-d. 전계의 상대오차
Fig. 11-d. % errors of E-field.

그림 11 은 四角形과 三角形要素分割方式를 解析的인 解와 比較하기 위해 圓板導體를 모델로 한 結果이다. 座標의 原點을 圓板의 中心에 두었을때 電荷密度의 對稱性을 利用하면 第一四分面의 電荷密度만 未知數로 되어 未知數가 1/4 로 줄어들며, 또 四角形要素로만 分割할 경우 境界處理의 難點을 줄이기 위해 境界部分은 三角形要素로 分割하는 混合(Combination) 方式도 사용하여 보았다. 그림과 表로 부터 計算時間은 三角形分割이 四角形分割의 두 배이지만 境界部分에서의 誤差는 적고, 이 두 方式의 長點만 살린 混合法의 경우 精度가 앞의 두 方式보다 좋을 뿐 아니라 計算時間은 三角形分割보다 훨씬 줄어들었다. 混合法을 使用하더라도 境界面에 近接할 수록 誤差가 커지지만 이것은 境界部分을 더 細密하게 分割해 주므로써 充分히 補完할 수 있다.⁴⁾

4. 結 論

三角形要素로만 分割하면 計算量과 特異點이 많기므로 可能한 한 四角形要素로 分割하고 境界部分처럼 特殊한 部分만 三角形要素로 分割하는 方法을 使用하면 計算時間을 줄이면서 精密度를 向上시킬 수 있음이 比較計算의 結果로 나타났다. 또한 未知數가 電荷密度이므로 電荷密度分布의 對稱性을 利用하여 未知數를 1/2 또는 1/4 로 줄일 수 있었고, 輪郭點을 要素의 節點에 두지 않고 要素内部에 둬므로써 電荷密度를 구할 때 特異點 處理의 까다로움을 피할 수 있었다.

이와 같은 表面電荷法을 쓰면 對稱性이 없는 3次元場의 電界를 적은 時間과 적은 努力으로 구할 수 있을 뿐 아니라 解析式이 없는 경우의 靜電容量도 쉽게 구할 수 있다.

參考文獻

- 1) H. Singer, "Berechnung von Hochspannungsfeldern mit Hilfe von Flächenladungen", Habilitations-Schrift, TU, München, pp. 6-13, 1973
- 2) Moon, Spencer, "Field Theory for Engineers" van Nostrand, London, pp. 267-298, 1961
- 3) Magnus et al, "Formulas and Theorems for the Special Functions of Mathematical Physics", Springer, Berlin
- 4) 宅間, 河本, "三角形表面電荷法による 三次元電

- 界の計算," 電中研, No, 180029, 1980
- 5) 河野, 宅間, "數值電界計算法," ユロナ社, 1980
- 6) 日本電氣學會技術報告, "最近の電界計算法(Ⅱ部)," 第 98 號, 1980
- 7) 大久保 外, "表面電荷法による電界計算とでの應用," HV-80-8, 1980
- 8) 村島定行, "代用電荷法とでの應用," 森北社, pp.28-39, 1983
- 9) 増田, 河野, "プリンシ電界計算法," 朝倉書店, 1969
- 10) 丁性桂, 李德出, "高電壓工學," 文運當, 1982
- 11) J.J. Laforest, "Transmission Line Reference Book, Electric Power Research Institute", pp. 329-380, 1982

< 付 錄 >

(1) 表面電荷法の 原理

電極表面을 여러 개로 分割하고 各分割片 表面의 電荷密度를 座標의 函數로 두어 境界條件 으로부터 이 電荷密度를 구하여 電極表面에 대한 面積分을 함으로써 任意點의 電位, 電界를 구하는方法이다. 대부분의 電界는 電極의 表面에 存在하는 表面電荷에 의해 形成되므로 表面電荷分布를 近似的으로 구하여 計算點의 電位, 電界를 구한다는 것은 電極内部에 假想電荷를 두는 電荷重疊法에 비해 物理的인 意味가 크다.^{1), 6)}

$$\begin{aligned} \phi(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\sigma(\vec{R})}{|\vec{r}-\vec{R}|} dS \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \int_{S_i} \frac{\sigma_i(\vec{R})}{|\vec{r}-\vec{R}|} dS \quad (A-1) \end{aligned}$$

\vec{r} : field 座標
 \vec{R} : source 座標

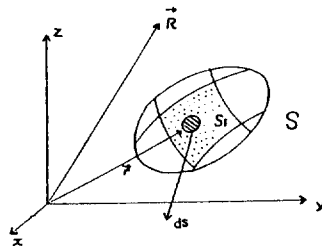


그림 A-1. 전극분할

Fig. A-1. Subdivision of electrode surface.

(2) 回轉對稱場

Ring 電荷에 의한 電位 ϕ_R 은

$$\phi_R = \frac{\sigma}{\pi \epsilon_0} R \frac{K(k)}{\sqrt{(z-Z)^2 + (r+R)^2}} \quad (A-2)$$

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\alpha}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \alpha}}$$

$$k = \sqrt{\frac{4rR}{(z-Z)^2 + (r+R)^2}}$$

電極이 回轉對稱일 경우에 있어서 分割片은 ring 電荷의 集合體로 볼 수 있으므로 分割片 T에 의한 電位 ϕ^T 는

$$\phi^T = \int_C \phi_R(t) dt \quad (A-3)$$

로 주어지며, 여기서 t 는 曲線 C^T의 媒變數 (parameter) 이다.

또한 電荷密度 σ^T 는 電極表面의 曲線를 따라 변하므로 σ^T 를 t 의 多項式으로 近似시키면 다음과 같다.

$$\sigma^T(t) = \sum_{m=0}^M \sigma_m^T t^m \quad (A-4)$$

여기서 σ_m^T 는 T번째 分割片의 電荷密度函數 $\sigma^T(t)$ 의 m次 係數이다.

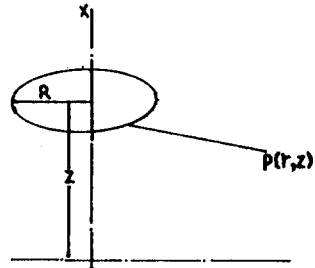


그림 A-2. Ring 전하
Fig. A-2. Ring charge.

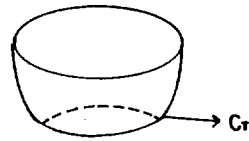


그림 A-3. 분할편
Fig. A-3. Subdivided electrode.

따라서 式(A-2), (A-3), (A-4) 로 부터 ϕ^T 는

$$\phi^T = \frac{1}{\pi \epsilon_0} \sum_{m=0}^M \left(\int_{C^T} R \cdot t^m \frac{K(k)}{\sqrt{(z-Z)^2 + (r+R)^2}} dt \right)$$

와 같이 주어진다.