

입출력지연을 이용한 다중입출력계의 디지털제어에 관한 연구

論 文
34~2~3

Study on Digital Control of MIMO Dynamic Systems Using I/O Delay

朴 良 培* · 金 映 權**
(Yang-Bae Park · Young Kwon Kim)

Abstract

The existing methods of pole assignment were reviewed in this paper, a digital control method for MIMO dynamic systems was developed based on pole assignment using I/O delay. The underlined concept of the derived control law was that the poles corresponding to the order of a system can be assigned on the desired positions via output delay, and the poles of the order incremented by output delay were forced to be placed on zero positions by way of input delay when applied to an actual MIMO system, the present scheme was shown to be more effective than the conventional state feedback scheme with observer in that the former was simpler than the latter, while they performed well.

1. 서 론

극점배치 방법의 하나인 모든 상태궤환은 제어 가능한 모든 극점을 임의의 위치에 배치시킬 수 있으나 감지기가 고가이거나 측정이 불가능한 상태변수가 있을 수 있으므로 실제 적용에는 한계가 있다. 이에 대한 해결책으로 관측자를 이용한 상태궤환을 들 수 있는데 이 방법은 설계 과정과 프로그래밍이 복잡하다. 이 방법에 대해서는 새로운 알고리즘과 그 성능을 비교하기 위하여 2장에서 다시 다루었다.

한편 이용가능한 출력정보만을 사용하여 다음과 같은 제어법칙을 구성할 수 있다.

$$U(k) = V(k) - K y(k) \quad (1)$$

여기서 U , V , y 는 각각 제어대상의 입력, 기준 입력, 출력이고 K 는 적절한 차원을 갖는 출력궤환 이득행렬이다.

Davison은 제어 가능하고 관측 가능한 시스템의 출력에 의해서만 배치가능한 극점의 갯수를 다음과 같이 제시하였다¹⁾.

$X \in R^n$, $U \in R^m$, $y \in R^r$ 이고 입력행렬 B 와 출력행렬 C 가 $\text{rank } B = m$, $\text{rank } C = r$ 을 각각 만족할

때 배치가능한 극점의 갯수 P 는 다음과 같다.

$$P = \min(n, m + r - 1) \quad (2)$$

이러한 출력궤환방식은 실제로 이용가능한 출력만을 사용하므로 실제 적용이 용이하지만 배치가능한 극점을 제외한 나머지 극점에 대해서는 임의로 배치할 수 없으므로 그러한 극점이 불안정한 영역으로 벗어날 경우 시스템이 불안정해진다.

출력외에 출력지연 정보를 사용하면 다음과 같은 제어법칙이 구성된다.

$$U(k) = V(k) - \sum_{i=0}^d k_i y(k-i) \quad (3)$$

이 방법 역시 출력궤환의 경우와 마찬가지로 실제 적용이 용이하다. 그러나 출력지연에 의해 차수가 증가되어 모든 극점을 임의로 배치하기가 힘들게 된다. 이러한 문제를 해결하기 위하여 Paraev와 Perelkin²⁾은 MIMO계를 SIMO(Single-Input Multi-Output)계의 문제로 바꾸어 모든 극점을 배치하는 방법과 이에 필요한 지연의 갯수 d 를 제시하였다. 그러나 이 방법은 SISO계에는 적용할 수 없으며 출력지연에 의해 페루우프의 차수가 증가되므로 제어대상의 차수가 클 수록 지연의 갯수가 커야 하는 단점이 있다.

이런배경에서 출력과 출력지연을 이용하여 제어대상의 차수에 해당하는 극점을 원하는 위치에 배치하고 출력지연에 의한 지연효과(차수증가)를 입력지연에

*正 會 員 : 大田機械廠 室長
**正 會 員 : 建國大 工大 電子工學科 教授 · 工博
接受日字 : 1984年 7月 24日

의해 보상(증가된 차수만큼의 극점을 원점에 배치)하는 새로운 제어법칙을 제시하였다.

관측자를 이용한 극점배치방법을 2장에서 다루었고, 3장에서는 입출력지연을 이용한 제어법칙의 유도과 극점배치 방법을 제시하고, 4장에서는 F-8 전투기의 횡조종루우프설계에 두 방식을 적용해서 개발된 방법이 관측자를 이용한 상태제환방식보다 설계가 용이하고, 프로그래밍이 간편하며 성능 또한 대등함을 보였다.

2. 관측자를 이용한 극점배치방법

다음과 같은 선형 시불변 이산계에 대하여 관측자를 이용하여 시스템의 극점을 임의로 배치하는 기존의 방법을 체계적으로 정리하면 다음과 같다^{3), 4)}.

$$\left. \begin{aligned} X(k+1) &= AX(k) + BU(k) \\ Y(k) &= CX(k) \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

여기서 X, U, Y 는 각각 n, m, r 의 차원을 갖는 상태벡터, 입력벡터, 출력벡터이고 A, B, C 는 각각 $n \times n, n \times m, r \times n$ 의 차원을 갖는 행렬들이다.

Step 1. 식 (4)를 다음과 같은 Controllable companion 형태로 변환한다.

$$\left. \begin{aligned} X_c(k+1) &= A_c X_c(k) + B_c Y(k) \\ Y(k) &= C_c X_c(k) \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

$$\text{단 } A_c = \begin{bmatrix} A_{c11} & \dots & A_{c1m} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{cm1} & \dots & A_{cm m} \end{bmatrix}, \quad B_c = \begin{bmatrix} B_{c1} \\ \vdots \\ B_{cm} \end{bmatrix}$$

$$A_{c,ii} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 \\ \times & \times & \times & \dots & \times \end{bmatrix}, \quad A_{c,ij} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ \times & & \times \end{bmatrix} \quad i \neq j$$

$$B_{c,i} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ 0 & \dots & -1 & \times & \dots & \times \end{bmatrix}$$

여기서 $B_{c,i}$ 의 1은 i 번째 열에 위치하며 X 는 임의의 실수이다. $A_{c,ij}, B_{c,i}$ 의 차원은 각각 $\mu_i \times \mu_j, \mu_i \times m$ 이고 $\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_m = n$ 이다.

Step 2. 주어진 페루우프 특성다항식 $\alpha_c(z)$ 로부터 제어법칙 $u(k) = Gv(k) - Kx(k)$ 의 이득행렬 K, G 를 구한다.

$$\left. \begin{aligned} K &= B_{cR}^{-1} \tilde{K} P_c \\ G &= B_{cR}^{-1} \tilde{G} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

여기서 P_c 는 변환행렬 ($X_c(k) = P_c X(k)$) 이

고 B_{cR} 은 $B_{c,i}$ 의 μ_i 번째 행들을 차례로 취해 만든 $m \times m$ 행렬이다. 즉

$$B_{cR} = \begin{bmatrix} 1 \times \times \dots \times \times \\ 0 \ 1 \times \dots \times \times \\ \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ 0 \ 0 \ 0 \dots \dots 1 \times \\ 0 \ 0 \ 0 \dots \dots 0 \ 1 \end{bmatrix} \quad (7)$$

\tilde{K}, \tilde{G} 는 다음과 같이 구한다.

$\delta_i = \mu_1 + \dots + \mu_i$ 라 할 때 A_c 의 δ_i 번째 행들을 차례로 취해 행렬 A_{cR} 을 만들고 $\alpha_c(z)$ 의 형태를 다음과 같이 표현한다.

$$\alpha_c(z) = \prod_{i=1}^m (z^{\mu_i} + a_{i,1} z^{\mu_i-1} + \dots + a_{i,\mu_i}) \quad (8)$$

그러면 \tilde{K} 와 \tilde{G} 는 각각 다음과 같이 표현된다.

$$\tilde{K} = A_{cR} - \begin{bmatrix} M_1 \ 0^T \dots \dots \dots 0^T \\ 0^T \ M_2^T \dots \dots \dots 0^T \\ \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ 0^T \ 0^T \dots \dots \dots M_m^T \end{bmatrix} \quad (9)$$

단 $M_i^T = [a_i, \mu_i, a_i, \mu_i - 1, \dots, a_i, 1]$ 이고 0 는 적당한 차원을 갖는 영 열벡터이다.

$$\tilde{G} = [C_c (I - A_c + \tilde{B} \tilde{K})^{-1} \tilde{B}]^{-1} \quad (10)$$

$$\text{단 } \tilde{B} = B_c B_{cR}^{-1} = \begin{bmatrix} N_{\mu 1} \ 0 \dots \dots \dots 0 \\ 0 \ N_{\mu 2} \dots \dots \dots 0 \\ \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ 0 \ 0 \dots \dots \dots N_{\mu m} \end{bmatrix}$$

여기서 $N_{\mu i}$ 는 차원이 μ_i 이고 μ_i 번째 성분이 1, 그 나머지 성분이 모두 0인 열벡터이다.

Step 3. 식 (4)를 다음과 같은 observable companion 형태로 변환한다.

$$\left. \begin{aligned} X_o(k+1) &= A_o X_o(k) + B_o U(k) \\ Y(k) &= C_o X_o(k) \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

$$\text{여기서 } A_o = \begin{bmatrix} A_{o,11} & \dots & A_{o,1r} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{o,r1} & \dots & A_{o,rr} \end{bmatrix},$$

$$C_o = [C_{o1} \ \dots \ \dots \ C_{or}]$$

이고 $A_{o,ij}, C_{o,i}$ 는 각각 $A_{c,ij}, B_{c,i}$ 의 도치행렬이다.

Step 4. 원하는 특성 다항식 $\alpha_e(z)$ 를 갖는 Reduced order 관측자를 설계한다. 우선 $\alpha_e(z)$ 를 다음과 같은 형태로 표현한다.

$$\alpha_e(z) = \prod_{i=1}^r (z^{\mu_i-1} + a_{i,1} z^{\mu_i-2} + \dots + a_{1,\mu_i-1}) \quad (12)$$

변환행렬 P_f 를 다음과 같이 정의한다.

$$P_f = \begin{bmatrix} P_{f1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & P_{f2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & P_{fr} \end{bmatrix},$$

$$P_{fi} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & a_{i, \mu_i-1} \\ 0 & 1 & \dots & a_{i, \mu_i-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad (13)$$

여기서 0는 적당한 차원을 갖는 영행렬이다.

$X_f(k) = P_f X_0(k)$ 로 변환하면 변환된 시스템의 행렬 A_f, B_f, C_f 는 다음과 같은 형태가 된다.

$$A_f = \begin{bmatrix} A_{f11} & \dots & A_{f1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{frr} & \dots & A_{frr} \end{bmatrix}, \quad B_f = \begin{bmatrix} B_{f1} \\ \vdots \\ B_{fr} \end{bmatrix},$$

$$C_f = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \times & 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \times & 0 & \dots & 0 & \times & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \times & 0 & \dots & 0 & \times & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad (14)$$

단 $A_{fi} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & a_{i, \mu_i-1} & \times \\ 1 & 0 & \dots & a_{i, \mu_i-2} & \times \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \dots & a_{i, \mu_i-3} & \times \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \times \end{bmatrix},$

$A_{fij} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & \times \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \times \end{bmatrix}$
 $i \neq j$

$\delta_i = \mu_1 + \dots + \mu_r$ 라 할때 $X_f(k)$ 의 μ_i 번째 성분들을 차례로 취해 $X_{fR}(k)$ 로, 나머지 $n-r$ 개의 성분들을 $x_e(k)$ 로 정의하고, A_f 에서 δ_i 번째 열들

을 차례로 취해 만든 행렬을 A_{fR} 로, A_{fR} 에서 δ_i 번째 행들을 차례로 빼버린 행렬을 A_{fR} 로 정의하면

$$Y(k) = C_{fR} X_{fR}(k) \quad (15)$$

$$X_e(k+1) = A_e X_e(k) + B_e Y(k) + HU(k) \quad (16)$$

단 $A_e = \begin{bmatrix} A_{e1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_{e2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & A_{er} \end{bmatrix},$

$$A_{ei} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & a_{i, \mu_i-1} \\ 1 & 0 & \dots & a_{i, \mu_i-2} \\ 0 & 1 & \dots & a_{i, \mu_i-3} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{i, 1} \end{bmatrix}$$

$$B_e = \tilde{A}_{fR} C_{fR}^{-1}$$

이고 H 는 B_f 에서 δ_i 번째 행을 차례로 빼버린 $(n-r) \times m$ 행렬이다. 따라서 $X_e(k)$ 의 추정치 $\hat{X}_e(k)$ 는

$$\hat{X}_e(k+1) = A_e \hat{X}_e(k) + B_e Y(k) + HU(k) \quad (17)$$

가 된다. $X(k)$ 의 추정치 $\hat{X}(k)$ 는 $X_{fR}(k) = C_{fR}^{-1} Y(k)$ 와 $\hat{X}_e(k)$ 로부터 $X_f(k)$ 의 추정치 $\hat{X}_f(k)$ 를 구성하여 역변환 [$X_0(k) = P_f^{-1} X_f(k)$, $X(k) = P_0^{-1} X_0(k)$]에 의해 구한다. 수식으로 표현하면 다음과 같다.

$$\hat{X}(k) = S \hat{X}_e(k) + T C_{fR}^{-1} Y(k) \quad (18)$$

여기서 I_r 을 $r \times r$ 단위행렬로, N_r 을 차원이 r 이고 r 번째 성분이 1, 나머지 성분이 모두 0인 열벡터로 각각 정의하면 S, T 는 다음과 같이 표시된다.

$$S = \begin{bmatrix} J_{\mu_1 \times (\mu_1-1)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_{\mu_2 \times (\mu_2-1)} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & J_{\mu_r \times (\mu_r-1)} \end{bmatrix},$$

$$J_{i \times (i-1)} = \begin{bmatrix} I_{i-1} \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}^T$$

$$T = \begin{bmatrix} N_{\mu_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & N_{\mu_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & N_{\mu_r} \end{bmatrix}$$

$\hat{X}(k)$ 에 대한 결과식은,

$$\hat{X}(k) = P_0^{-1} P_f^{-1} S \hat{X}_e(k) + P_0^{-1} P_f^{-1} T C_{fR}^{-1} Y(k) \quad (19)$$

Step 5. 설계된 관측자와 제어법칙을 이용하여 시뮬레이션에 의해 만족한 결과를 얻으면 설계를 완료하고, 그렇지 않으면 $\alpha_c(z), \alpha_e(z)$ 를 다시 정하여 Step 1로부터 다시 단계를 밟는다.

3. 입출력 지연을 이용한 제어법칙의 유도와 극점배치 방법

Manitius⁵⁾는 식(20)과 같이 시간지연이 있는 연속계에 대해서 식(21)로 표현되는 제어법칙을 이용하여 페루우프가 유한한 스펙트럼을 갖도록 제어할 수 있음을 보였다.

$$\dot{X}(t) = FX(t) + G_0U(t) + G_1U(t-h) \quad (20)$$

여기서 $X(t) \in R^n$, $U(t) \in R^m$, h 는 지연시간

$$U(t) = KX(t) + K \int_{-h}^0 e^{-(h+\theta)} G_1 U(t+\theta) d\theta \quad (21)$$

즉, 식(20)의 시스템을 상태궤환하면 페루우프의 차수가 무한대가 되지만 입력지연을 이용한 식(21)의 제어법칙을 사용하면 페루우프의 차수가 n 이 된다.

한편 출력지연을 궤환하는 것은 입력에 시간지연이 있는 것과 동일하므로, Manitius의 결과에 의하면 출력지연을 궤환할 때 증가되는 페루우프의 차수는 입력지연을 이용하여 상쇄가 가능하다.

따라서 출력 및 출력지연을 궤환하여 페루우프의 n 개의 극점을 원하는 위치에 배치하고 출력지연에 의해 증가되는 차수는 입력지연에 의해 상쇄되도록 제어법칙을 구성할 수가 있다.

이제 식(20)을 출력지연 $Y(t-h)$ 를 궤환하는 다음과 같은 식으로 표시하라.

$$\left. \begin{aligned} \dot{X}(t) &= FX(t) + GU(t) \\ Y(t) &= CX(t) \\ U(t) &= -KY(t-h) \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

그러면 식(21)의 입력지연을 이용한 제어법칙은 다음과 같은 형태가 된다.

$$U(t) = -KY(t-h) - KC \int_{-h}^0 e^{-(h+\theta)} GU(t+\theta) d\theta \quad (23)$$

$h = dT$, $t = kT$ (단 d , k 는 정수)로 놓고 식(22)의 상태방정식과 식(23)의 제어법칙을 이산화하면 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$X(k+1) = AX(k) + BU(k) \quad (24)$$

$$U(k) = -KY(k-d) - KC \sum_{i=1}^d (A^{-1})^{d-i+1} BU(k-i) \quad (25)$$

일반적으로 d 개의 출력지연 $Y(k-1), \dots, Y(k-d)$ 와 출력 $Y(k)$ 를 궤환할 때 입력지연을 이용한 제어법칙은 다음과 같은 형태가 된다.

$$U(k) = -KY - K_d I U \quad (26)$$

단 $K = [k_0 \ k_1 \ \dots \ k_d]$, $K_d = [k_1 \ k_2 \ \dots \ k_d]$

$$Y = \begin{bmatrix} y(k) \\ y(k-1) \\ \vdots \\ y(k-d) \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} CA^{-1}B & 0 & & 0 & \text{-----} \\ CA^{-2}B & CA^{-2}B & & 0 & \text{-----} \\ \vdots & \vdots & & & \\ CA^{-d}B & CA^{-(d-1)}B & CA^{-(d-2)}B & & \\ & & & \text{-----} 0 \\ & & & \text{-----} 0 \\ & & & & CA^{-1}B \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} u(k-1) \\ \vdots \\ u(k-d) \end{bmatrix}$$

Regulator의 경우 식(26)의 제어법칙을 사용하면 페루우프의 차수가 n 이고, K 를 적절히 결정해 주면 n 개의 극점을 모두 원하는 위치에 배치할 수 있다. Servo 제어의 경우 기준입력을 $V(k)$ 라 할 때 $U(k) = V(k) - KY - K_d I U$ (27)의 제어법칙에 의해 Regulator와 마찬가지로 페루우프의 차수가 n 이 되고, n 개의 극점을 모두 원하는 위치에 배치할 수 있다.

식(27)을 다음과 같은 형태로 변형해보면,

$$e(k) = V(k) - y(k) \quad (28)$$

라 정의할 때

$$U(k) = KE - K_d I U = KV - KY - K_d I U \quad (29)$$

단, $V = \begin{bmatrix} V(k) \\ V(k-1) \\ \vdots \\ V(k-d) \end{bmatrix}$, $E = \begin{bmatrix} e(k) \\ e(k-1) \\ \vdots \\ e(k-d) \end{bmatrix}$

이 경우 페루우프의 차수가 $n+d$ 가 되고 d 개의 증가된 차수에 해당하는 극점은 모두 원점에 위치하고 나머지 n 개의 극점은 K 를 적절히 결정해 줌으로써 모두 원하는 위치에 배치시킬 수 있다. 본 논문에서는 식(27) 대신 식(29)의 제어법칙을 택하였다.

3.1 지연효과 보상에 대한 증명

식(29)의 제어법칙에 의해 n 개의 극점은 원하는 위치에, d 개의 극점은 원점에 위치시킬 수 있음을 증명한다.

식(4)에서 출력 Sequence는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\left. \begin{aligned} Y(k) &= CX(k) \\ Y(k-1) &= CA^{-1}X(k) - CA^{-1}BU(k-1) \\ \vdots \\ Y(k-d) &= CA^{-d}X(k) - CA^{-d}BU(k-d) \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

F를 연속계의 시스템 행렬이라 할 때 $A = e^{FT}$ 로 표시되고 임의의 행렬 F에 대한 $\det [e^{FT}] \neq 0$ 이므로 A^{-1} 은 항상 존재한다. 식 (30)을 행렬형태로 다시 정리하면

$$Y = \Phi X(k) - \Gamma_a U \quad (31)$$

단 $Y = \begin{bmatrix} y(k) \\ y(k-1) \\ \vdots \\ y(k-d) \end{bmatrix}$, $\Phi = \begin{bmatrix} C \\ CA^{-1} \\ \vdots \\ CA^{-d} \end{bmatrix}$, $\Gamma_a = \begin{bmatrix} 0 \\ \Gamma \end{bmatrix}$

식 (31)을 식 (29)에 대입하여 정리하면

$$U(k) = KV - K\Phi X(k) \quad (32)$$

가 된다. 식 (32)는 식 (4)의 상태방정식에 대입하고 Z-변환하면

$$X(z) = [ZI - A + BK']^{-1} B \left(k_0 + \sum_{i=1}^d k_i z^{-i} \right) \quad (33)$$

$V(z)$

가 된다.

$$\text{단 } K' = K\Phi \quad (34)$$

식 (33)으로 부터 페루우프의 극점이 $n+d$ 가 되고 d 개는 원점에 n 개는 K' 에 의해 원하는 위치에 배치시킬 수 있음을 알 수 있다.

3.2 유도된 제어법칙에 의한 극점배치 방법

2장에서 설명한 과정과 동일한 방법으로 K' 를 구하고 식 (34)로부터 K 를 구한다. 즉

$$\begin{bmatrix} k_0 & k_1 & \dots & k_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C \\ CA^{-1} \\ \vdots \\ CA^{-d} \end{bmatrix} = K' \quad (35)$$

식 (35)가 해를 갖기 위한 충분조건은 $\{A, C\}$ 쌍의 가관측성이다. K' 는 $m \times n (m \leq n)$ 행렬이므로 Φ 의 Rank가 n 이면 식 (35)는 항상 해가 존재한다. 또한 Φ 의 Rank가 n 이 되기 위한 d의 최소치 d_{min} 은

$$d_{min} = \text{Observability Index} - 1 \quad (36)$$

이 된다. 또는 Davison의 논문¹¹⁾을 근거로 식 (2)를 이용하여

$$d \cdot \min(n, m+r-1) \geq n \quad (37)$$

을 만족하도록 d를 선정할 수 있다. 식 (35)로부터 Pseudo Inverse에 의해 K 를 구한다. 즉

$$K = K' \Phi^T (\Phi \Phi^T)^{-1} \quad (38)$$

이상의 설계과정을 요약하면 다음과 같다.

Step 1. 2장에서 Step 1, Step 2에 의해 상태 변환 이득행렬 K' 를 구한다.

Step 2. 식 (38)에 의해 K 를 구한다.

Step 3. 식 (29)에 위에서 구한 K 를 대입하여 제어법칙을 구성한다.

Step 4. 시뮬레이션에 의해 만족한 결과를 얻으면 설계완료하고 그렇지 않으면 Step 1부터 반복한다.

4. 유도된 제어법칙의 실제 시스템에 적용과 검토

2장에서 설명한 관측자를 이용한 제어법칙과 3장에서 소개한 새로운 제어법칙을 F-8전투기의 횡조종 루우프 설계에 각각 적용하여 그 결과를 비교 검토하였다.

(1) 제어대상

다음의 식 (39)와 같은 F-8전투기의 횡운동 방정식을 제어대상으로 선정하였다⁶⁾.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \\ \dot{x}_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3598 & 0.1968 & -35.18 & 0.0 \\ -0.0377 & -0.3576 & 5.884 & 0.0 \\ 0.0688 & -0.9957 & -0.216 & 0.073 \\ 0.9947 & -0.1027 & 0.00 & 0.0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 14.665 & 6.538 \\ 0.2179 & -3.087 \\ 0.0054 & 0.0516 \\ 0.0 & 0.0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} \quad (39)$$

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix}$$

여기서 $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$, $x_4(t)$ 는 각각 Roll angle rate, Yaw angle rate, Side slip angle, Roll angle 이고 $u_1(t)$, $u_2(t)$ 는 각각 Aileron angle command, Rudder angle command 이다.

또한 샘플링 주기 T 는 10ms 로 정하고 원하는 극점의 위치는 (0.46, 0.9, 0.97, 0.99)로 정하였다.

(2) 관측자를 이용한 극점배치 방법에 의한 디지털 제어기 설계

2장에서 Step 1에서 Step 5까지의 방법으로 제어기를 설계하면 다음과 같다.

$$\hat{X}e(k+1) = \begin{bmatrix} 0.572 & -0.03 \\ -0.4 & -0.027 \end{bmatrix} \hat{X}e(k) + \begin{bmatrix} -0.419 & -0.029 \\ -0.392 & -0.992 \end{bmatrix} Y(k) + \begin{bmatrix} -0.0057 & 2.8 \times 10^{-4} \\ 0.002 & 0.0015 \end{bmatrix} V(k)$$

$$U(k) = \begin{bmatrix} 166.6 & -76.7 \\ -1700 & 91.85 \end{bmatrix} \hat{X}e(k) + \begin{bmatrix} 172.1 & -76.7 \\ -1707 & 91.4 \end{bmatrix} Y(k) + \begin{bmatrix} -4.36 & 2.54 \\ 17 & -0.934 \end{bmatrix} V(k) \quad (40)$$

(3) 개발된 제어법칙 및 극점배치방법에 의한 디지털 제어기 설계

3장에서 유도한 Step 1에서 Step 4까지의 방법으로 제어기를 설계하면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} = -k_0 \begin{bmatrix} e_1(k) \\ e_2(k) \end{bmatrix} + k_1 \begin{bmatrix} e_1(k-1) \\ e_2(k-2) \end{bmatrix} - k_2 \begin{bmatrix} u_1(k-1) \\ u_2(k-1) \end{bmatrix} \quad (41)$$

표 1. 사이드 슬립각 지령 0 rad., 롤각지령 1 rad.에 대한 응답비교

Table 1. Comparison of response for side slip angle command 0 rad., for roll angle command 1 rad.

항 목	방 법	상태관측자를 이용한 기존 극점배치	개발된 입출력을 이용한 극점배치
Max. roll angle rate	(X_1)	2.08 rad/sec	2.05 rad/sec
Max. yaw angle rate	(X_2)	0.1 rad/sec	0.1 rad/sec
Max. side slip angle	(X_3)	0.022 rad	0.021 rad
Side slip angle response (X_3) settling time (5% of the Max. side slip angle)		4.0 sec	4.2 sec
Roll angle response (X_4) 95% rise time (5% settling time)		0.85 sec	0.86 sec
Roll angle response (X_4) steady state error		0	0
Roll angle response (X_4) overshoot		1.37 %	1.35 %

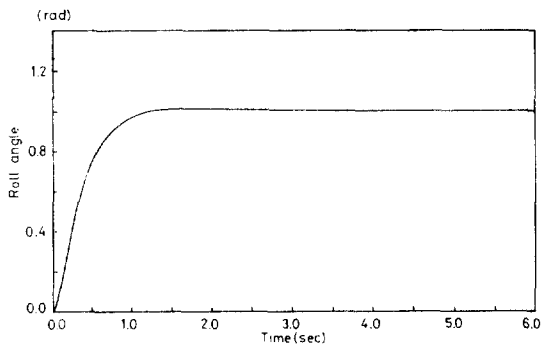
표 2. 사이드 슬립각 지령 0 rad., 롤각지령 1 rad. 이고 평형 속도가 50% 감소했을때의 응답비교

Table 2. Comparison of response with equilibrium velocity V_0 decreased by 50% for side slip angle command 0 rad., for roll angle command 1 rad.

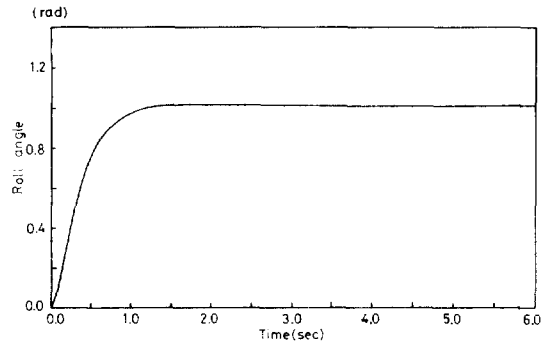
항 목	방 법	상태관측자를 이용한 기존 극점배치	개발된 입출력을 이용한 극점배치
Max. roll angle rate	(X_1)	2.08 rad/sec	2.05 rad/sec
Max. yaw angle rate	(X_2)	0.13 rad/sec	0.12 rad/sec
Max. side slip angle	(X_3)	0.022 rad	0.022 rad
Side slip angle response (X_3) settling time (5% of the Max. side slip angle)		4.0 sec	4.3 sec
Roll angle responses (X_4) 95% rise time (5% settling time)		0.85 sec	0.86 sec
Roll angle response (X_4) steady state error		0	0
Roll angle response (X_4) overshoot		1.36 %	1.35 %

표 3. 사이드 슬립각지령 0 rad., 롤각지령 1 rad. 이고 공격각이 50% 증가했을 때의 응답 비교
 Table 3. Comparison of response with equilibrium angle of attack increased by 50% for side-slip angle command 0 rad., for roll angle command 1 rad.

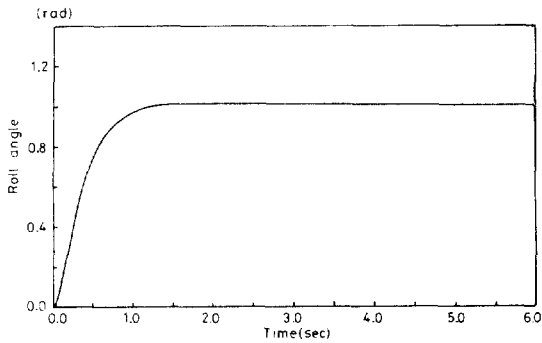
항 목	방 법	상태관측자를 이용한 기존 극점 배치	개발된 입출력지연을 이용한 극점 배치
Max. roll angle rate (X_1)		2.07 rad/sec	2.05 rad/sec
Max. yaw angle rate (X_2)		0.1 rad/sec	0.1 rad/sec
Max. side slip angle (X_3)		0.022 rad	0.021 rad
Side slip angle response (X_3) settling time (5% of the Max. side slip angle)		4.0 sec	4.2 sec
Roll angle response (X_4) 95% rise time (5% settling time)		0.85 sec	0.86 sec
Roll angle response (X_4) steady state error		0	0
Roll angle response (X_4) overshoot		1.37 %	1.40 %



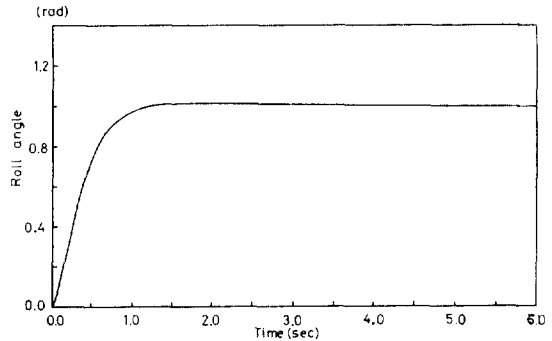
(a) pole assignment using state observer



(a) pole assignment using state observer



(b) developed pole assignment using 1/0 delay



(b) developed pole assignment using 1/0 delay

그림 1. 사이드 슬립각 지령 0 rad., 롤각지령 1 rad. 에 대한 롤각 응답

Fig. 1. Roll angle response for side slip angle command 0 rad., for roll angle command 1 rad.

그림 2. 사이드 슬립각 지령 0 rad., 롤각지령 1 rad. 이고 평형속도가 50% 감소했을 때의 롤각 응답

Fig. 2. Roll angle response with equilibrium velocity V_0 decreased by 50% for side slip angle command 0 rad., for roll angle command 1 rad.

$$\begin{aligned}
 \text{여기서 } k_0 &= \begin{bmatrix} -171.66 & 77.07 \\ 1705.9 & -91.23 \end{bmatrix} \\
 k_1 &= \begin{bmatrix} 165.54 & -74.55 \\ -1689.58 & 90.3 \end{bmatrix} \\
 k_2 &= \begin{bmatrix} 0.057 & 0.079 \\ -0.086 & -0.6 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

(4) 시뮬레이션 결과 및 고찰
 컴퓨터 시뮬레이션 결과를 정리하면 표 1, 표 2,

표 3과 같고 출력의 하나인 Roll angle 의 시간응답은 그림 1, 그림 2, 그림 3과 같다. 또한 16 비트 SBP 9989 마이크로 프로세서⁷⁾를 사용하여 제어기를 구성한 결과는 표 4와 같다. 표와 그림에서 알 수 있듯이 개발된 제어법칙은 기존 관측자를 이용한 극점 배치방법에 비해 성능면에서는 비슷하지만 하드웨어 구현시 계산시간 및 기억용량이 약 반정도 소요됨을 알 수 있다.

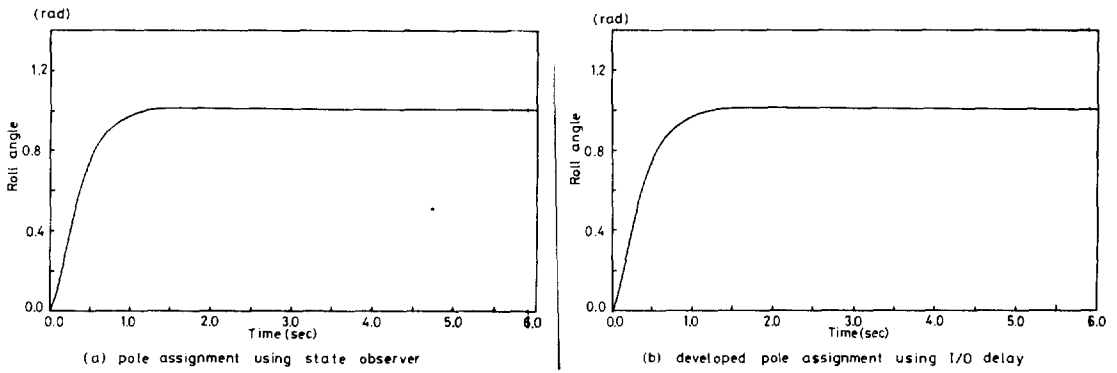


그림 3. 사이드 슬립각 지령 0rad., 롤각지령 1rad.이고 공격각이 50% 증가했을때의 롤각응답
Fig. 3. Roll angle response with equilibrium angle of attack α_0 increased by 50% for side slip angle command 0 rad., for roll angle command 1 rad.

표 4. SBP 9989를 이용한 마이크로 컴퓨터 성능 비교

Table 4. Comparison of microcomputer performance using SBP 9989

항 목	방 법	상태관측자를 이용한 기존 극점 배치	개발된 입출력지연 을 이용한 극점 배치
RAM Size		56 byte	40 byte
ROM Size		360 byte	186 byte
Execution time (4 MHz Clock)		1204.5 μ sec	561.5 μ sec

5. 결 론

본 논문에서는 MIMO계에 쉽게 적용가능한 극점 배치 방법을 개발하기 위하여 기존의 극점배치 방법 들을 비교, 검토하고 선형 시불변 가제어 가관측 시스템에 대해 관측자를 이용한 극점배치 방식보다 설계가 간편한 입출력 지연을 이용한 새로운 제어법칙을 개발하여 다음 사실을 입증하였다.

- 입력지연을 이용하여 지연효과보상

- 모든 극점 배치가능
- 또한 관측자를 이용한 극점배치 방법과 비교하여 다음과 같은 결과를 얻었다.

- 대 등한 성능
- 계산시간 및 기억용량이 절반정도 소요됨

따라서 본 논문에서 제시한 제어법칙 및 이에 의한 극점배치 방법은 실제로 MIMO계에 대한 디지털 제어기 설계에 유용하게 사용될 수 있을 것으로 간주된다.

참고문헌

- 1) E.J. Davison and S.H. Wang, "On Pole Assignment in Linear Multivariable Systems using Output Feedback", IEEE AC-20, No.4, 1975.
- 2) Y.I. Paraev and E.A. Perepelkin, "Design for a Controller with Memory for a Linear Discrete Systems", Automation and Remote Control, Aug., 1982.
- 3) W.A. Wolovich, Linear Multivariable Systems, Springer-Verlag, 1974, pp. 190-205.
- 4) T. Kailath, Linear Systems, Prentice-Hall, 1980, pp. 499-506.
- 5) Andrzej Z. Manitius and Andrzej W. Olbvtot, "Finite Spectrum Assignment Problem for Systems with Delays", IEEE AC-24, No. 4, Aug., 1979.
- 6) K. Sobel, H. Kaufman and L. Mabiuis, "Implicit Adaptive Control for a Class of MIMO Systems", IEEE AES-18, No. 5, Sep., 1982.
- 7) The Bipolar Microcomputer Components Data Book for Design Engineers, 3rd Ed., Texas Instruments Inc., 1981.