

均一磁場 超電導코일의 體積最小化에 관한 研究

論 文
34~1~5

A Study on Minimum Volume of Highly Homogeneous Superconducting Coil

李 承 院* · 權 營 顏**

(Sung-Won Rhee · Young-Ahn Kwon)

Abstract

Since the superconductor type II with high critical current and high critical magnetic field was discovered in 1961, there were many studies on the superconducting coil for high field and highly homogeneous field.

The graphical method and the numerical method by Newton Raphson technique have been studied as the method for design of homogeneous superconducting coil.

It is comparatively easy to get a compensating coil for any given main coil by the above methods, but it is too laborious to get a general solution for main coil dimension.

This paper studies the optimal design method for minimum volume of superconducting coil under certain central field and highly homogeneous field.

The present method makes use of the nonlinear programming for optimization. The optimal solution of NMR superconducting coils by this method are demonstrated very well.

1. 緒 論

1898年 Fabry 에 의해 電磁石 設計에 관한 理論이¹⁾ 提示된 以後, 電磁石 設計에 관한 많은 研究가^{2), 3)} 이루어졌고 이에 따라 高磁場 電磁石이 製作되어 왔다. 그러나, 常導體 磁石에 있어서 導體가 가지는 電流密度的 限界, 抵抗損失 및 冷却方式의 限界 等에 의해 더 이상의 進展이 어렵게 되었다.

1961年 高臨界電流 및 高臨界磁場의 特性을 지닌 第2種 超電導體가 發見된 以後⁴⁾, 이 超電導體를 使用한 高磁場 및 均一磁場 發生用 軸對稱 單純 圓筒形 코일에 관한 研究가^{5) - 7)} 活發히 이루어졌고 超電導體가 가지는 長點 즉 無抵抗 및 高電流密度는 이러한 코일製作에 매우 잘 符合되었다. 우리나라에서도 超電導體의 長點 및 應用展望에 對해서는 여러번 強調된 바 있었다.^{8), 9)}

常導體코일 設計에 있어서는 코일에 消費되는 電流를 작게하는 點등이 고려되는 반면에 均一磁場 超電導코일 設計에 있어서 重要的 點은 願하는 中心 磁場 強度와 높은 磁場 均一度가 얻어지도록 設計되어야 할뿐더러 이러한 制約條件을 滿足시키면서 超電導코일 體積의 最小化가 이루어지도록 設計되어야 한다. 超電導코일 體積의 最小化가 이루어지면 우선 超電導線材가 節約되고 또한 冷却容器 縮小로 熱損失이 줄어들며 外形이 작아지는 利點을 얻을 수 있다.

한편, 均一磁場 코일의 設計를 위해서는 오래전부터 많은 研究가 이루어졌었다.^{10), 11)} 우선 코일形象에 있어서 軸對稱單純 圓筒形에서 Helmholtz 形 및 單純 圓筒形의 内部 또는 外部에 補償코일을 고려하는 形象등으로 改善되었고, 最適코일치수를 구하는 方法으로서는 그래프에 의해 解를 구하거나 Newton-Raphson 技法에 의해 解를 구하는 方法등이 研究되었다.^{11), 12) - 14)} 이러한 設計方法들은 주어진 크기의 主코일에 對한 補償을 생각하는 方式로서 이러한 解는 比較的 容易하게 구해지지만 主코일 自體의 最適치수를 구하는 一般的인 解는 구하

*正 會 員 : 서울대 工大 電氣工學科 教授 · 工博
**正 會 員 : 서울대 大學院 電氣工學科 博士課程
接受日字 : 1984年 11月 30日

기가 매우 어렵다.

本 研究에서는 이러한 方法들과는 달리 주어진 制約條件들 즉 中心磁場 強度와 높은 磁場 均一도를 滿足시키면서 超電導코일 體積의 最小值를 구하는 一般의인 方法으로서 非線形計畫法에 의한 最適化 方法을 研究하였다.

2. 磁場 및 코일體積

均一磁場 發生을 위한 코일形象으로서 軸對稱 圓筒形 코일이 잘 알려져 왔다. 圓筒形 코일은 導線이 매우 近接하고 均等하게 감겨져 있으므로 電流링을 여러개 쌓아 놓은 것으로 생각하여 磁場計算을 할 수 있다.^{1), 16)} 이에 의해 그림 1과 같은 z 軸에 對稱인 軸對稱 單純 圓筒形 코일에서 코일의 全體 電流密度를 λJ라 하면 코일 中心點 (0, 0)에서 軸方向 磁場은 식(1)과 같다.

$$B_z(0, 0) = \lambda J \frac{2\pi}{10} \int_{a_1}^{a_2} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \frac{r^2}{(r^2 + z^2)^{3/2}} dz dr$$

$$= \lambda J a_1 \frac{4\pi}{10} \beta \ln \frac{\alpha + (\alpha^2 + \beta^2)^{1/2}}{1 + (1 + \beta^2)^{1/2}} \quad (1)$$

단, $\lambda = \frac{\text{도선의 종단면적 (Conductor Cross Section)}}{\text{코일의 총 종단면적 (Total Cross Section)}}$

J = 導線의 電流密度 [A / cm²]

$$\alpha = \frac{a_2}{a_1}, \quad \beta = \frac{b}{2a_1}$$

B_z = [gauss] a₁, a₂, b = [cm]

여기에서 磁場因數(field factor) F(α, β)를 식(2)와 같이 定義한다.

$$F(\alpha, \beta) = \frac{4\pi}{10} \beta \ln \frac{\alpha + (\alpha^2 + \beta^2)^{1/2}}{1 + (1 + \beta^2)^{1/2}} \quad (2)$$

식(1)과 식(2)에서 코일 中心點의 軸方向磁場은 식(3)과 같이 된다.

$$B_z(0, 0) = \lambda J a_1 F(\alpha, \beta) \quad (3)$$

같은 條件에서 軸上 任意點 (z, 0)의 軸方向 磁場은 그림 2와 같은 코일의 重疊을 생각하여 식(3)과 磁場重疊의 原理로^{1), 16)}부터 식(4)와 같이 된다.

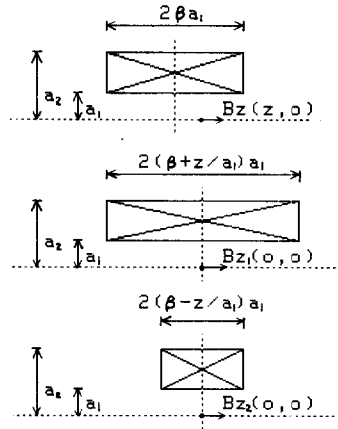


그림 2. B_z(z, 0) 計算을 위한 單純 圓筒形 코일에 서의 코일 重疊

Fig. 2. Coil superposition of simple solenoid for calculation of B_z(z, 0)

$$B_z(z, 0) = B_{z1}(z, 0) / 2 + B_{z2}(z, 0) / 2$$

$$= \lambda J a_1 \frac{1}{2} \left\{ F\left(\alpha, \beta + \frac{z}{a_1}\right) + F\left(\alpha, \beta - \frac{z}{a_1}\right) \right\} \quad (4)$$

그리고, 코일 内部의 半徑이 a₁ 보다 작은 中心領域에서 任意點 (ρ, θ)의 軸方向磁場은 식(5)와 같이 Legendre polynomial을 包含하는 冪級數 (Power series)로 나타낼 수 있다.^{1), 10), 12)}

$$B_z(\rho, \theta) = B_z(0, 0) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} \left. \frac{d^{2n} B_z(z, 0)}{dz^{2n}} \right|_{z=0} \left(\frac{\rho}{a_1}\right)^{2n} P_{2n}(\cos \theta) \quad (5)$$

단, $\frac{d^0 B_z(z, 0)}{dz^0} = 1$

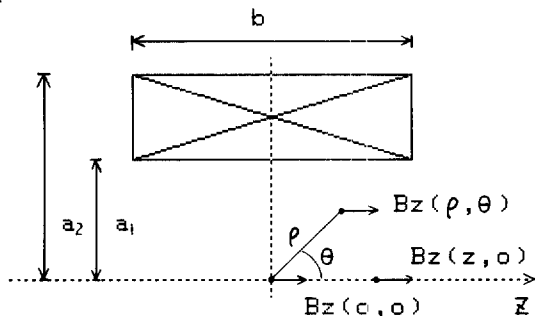


그림 1. 單純圓筒形코일 (縱斷面)

Fig. 1. Simple solenoid

식(3), 식(4) 및 식(5)에서 任意點 (ρ, θ) 의 軸方向 磁場은 식(6)과 같이 된다.

$$B_z(\rho, \theta) = \lambda J a_1 F(\alpha, \beta) \sum_{n=0}^{\infty} E_{2n}(\alpha, \beta) \left(\frac{\rho}{a_1}\right)^{2n} P_{2n}(\cos \theta) \\ = \lambda J a_1 [F(\alpha, \beta) + F E_2(\alpha, \beta) \left(\frac{\rho}{a_1}\right)^2 P_2(\cos \theta) + F E_4(\alpha, \beta) \left(\frac{\rho}{a_1}\right)^4 P_4(\cos \theta) + \dots] \quad (6)$$

단, $C_1 = \frac{1}{1+\beta^2}, C_2 = \frac{\beta^2}{1+\beta^2}, C_3 = \frac{\alpha^2}{\alpha^2 + \beta^2},$

$$C_4 = \frac{\beta^2}{\alpha^2 + \beta^2}$$

$$F E_2(\alpha, \beta) = \frac{4\pi}{10} \frac{1}{2\beta} (C_1^{3/2} - C_3^{3/2})$$

$$F E_4(\alpha, \beta) = \frac{4\pi}{10} \frac{1}{24\beta^3} [C_1^{3/2}(2+3C_2 + 15C_2^2) - C_3^{3/2}(2+3C_4 + 15C_4^2)]$$

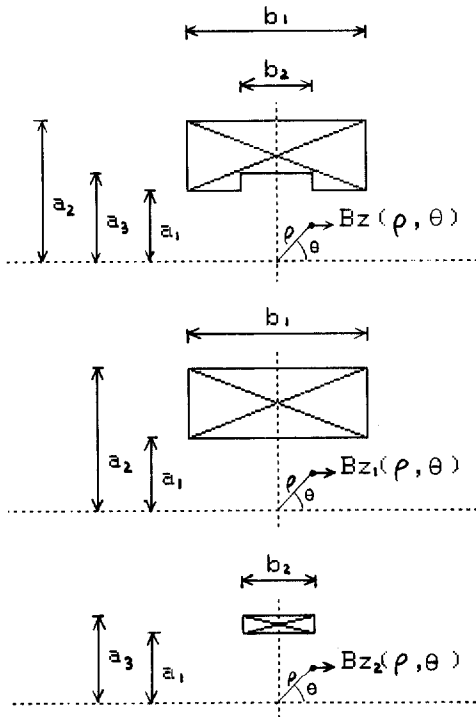


그림 3. 内部補償 圓筒形 코일의 코일重疊

Fig. 3. Coil superposition of inside notched solenoid

식(6)에서 보면 두번째 以後의 項이 ρ, θ 와 관련되어 磁場均一度에 影響을 주는 것을 알 수 있다.

磁場均一度를 改善하는 形象인 内部補償 圓筒形 코일에서 中心領域 任意點 (ρ, θ) 의 軸方向 磁場은 그림 3과 같은 코일重疊을 생각하여 식(6)과 磁場重疊의 原理로 부터 식(7)과 같이 된다.

$$B_z(\rho, \theta) = B_{z1}(\rho, \theta) - B_{z2}(\rho, \theta) \\ = \lambda J a_1 \{ [F(\alpha, \beta) - F(\alpha_c, \beta_c)] + [F E_2(\alpha, \beta) - F E_2(\alpha_c, \beta_c)] \left(\frac{\rho}{a_1}\right)^2 P_2(\cos \theta) + [F E_4(\alpha, \beta) - F E_4(\alpha_c, \beta_c)] \left(\frac{\rho}{a_1}\right)^4 P_4(\cos \theta) + \dots \} \quad (7)$$

단, $\alpha = \frac{a_2}{a_1}, \beta = \frac{b_1}{2a_1}$

$\alpha_c = \frac{a_3}{a_1}, \beta_c = \frac{b_2}{2a_1}$

식(7)에서 보면 α, β, α_c 및 β_c 를 調整함에 의해 2次以上の 項이 消去되면 磁場均一度가 改善됨을 알 수 있다.

그리고, 内部補償 圓筒形 코일에서 코일體積은 식(8)과 같이 된다.

$$V(\alpha, \beta, \alpha_c, \beta_c) = 2\pi a_1^3 [\beta(\alpha^2 - 1) - \beta_c(\alpha_c^2 - 1)] \quad (8)$$

3. 基本 알고리즘

本 研究에서 均一磁場 超電導코일의 最適設計은 上記한 磁場과 코일體積에 관한 관계式으로 부터 非線形 計書法을 使用하여 구하게 된다. 磁場均一度를 높이기 위해 코일의 形象을 内部補償 圓筒形으로 하는 경우, 식(7)에서 보면 네개의 變數($\alpha, \beta, \alpha_c, \beta_c$)의 最適解에 의해 磁場均一度에 影響이 큰 低次項이 消去 되도록 하고 基本項이 願하는 中心磁場強度가 되도록 하여야 한다. 이때 目的函數는 코일의 體積이 되는 식(8)이 된다. 以上에서 均一磁場 超電導코일의 體積最小化 問題는, 中心磁場 強度를 B_0 라 하고 等式 制約條件을 變數의 갯수보다 작은 數개로 하면 다음과 같은 非線形 問題가 된다.

Minimize $V(\alpha, \beta, \alpha_c, \beta_c)$

subject to $\alpha - 1 \geq 0, \beta \geq 0, \alpha_c - 1 \geq 0, \beta_c \geq 0$

$\alpha - \alpha_c \geq 0, \beta - \beta_c \geq 0$

$\lambda J a_1 [F(\alpha, \beta) - F(\alpha_c, \beta_c)] = B_0$

$F E_2(\alpha, \beta) - F E_2(\alpha_c, \beta_c) = 0$

$$FE_4(\alpha, \beta) - FE_4(\alpha_c, \beta_c) = 0$$

여기에서 사용되는 非線形 計畫法은 주어진 不等式 및 等式 制約條件 아래에서 多變數 非線形 目的 函數를 最小化하는 것으로서^{17), 18)} 一般적으로 다음과 같은 不等式 및 等式 制約條件을 갖는 非線形 問題를 고려하여 보면,

Find $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$
 such that $F(x)$ is a minimum
 and $G_j(x) \geq 0 \quad j = 1, 2, \dots, M$
 $H_j(x) = 0 \quad j = 1, 2, \dots, K (K < N)$

이와 같은 非線形 問題에서 解를 구하기 위하여 等價의 制約條件이 없는 非線形問題로 變形시키는 것이 必要하다. 여기에서 사용된 프로그램에서는 不等式 條件에서 解가 feasible solution 이 되도록 barrier function $B(x)$ 를

$$B(x) = - \sum_{i=1}^M \ln [G_i(x)] \quad (9)$$

等式條件의 滿足을 위해서 penalty function $\alpha(x)$ 를

$$\alpha(x) = \sum_{j=1}^K [H_j(x)]^2 \quad (10)$$

여기에서 식(9)와 식(10)은 通常 많이 사용되는 barrier function 과 penalty function 을 選定한 것이다.

以上에서 變形된 目的函數 $P(x)$ 를

$$P(x) = F(x) - r \sum_{i=1}^M \ln [G_i(x)] + \sum_{j=1}^K [H_j(x)]^2 / r \quad (11)$$

식(11)에서 r 은 媒介變數로서 充分히 작은 r 이 選定되게 되면 變形된 目的函數 $P(x)$ 의 最適解는 原問題의 目的函數 $F(x)$ 의 最適解로 接近될 수 있다.^{17), 18)} 制約條件이 없는 目的函數 $P(x)$ 를 最小化하는 技法으로는 conjugate direction 에 의해 解를 구하는 Fletcher-Powell 技法이 사용되고 最適 收斂與否는 식(12)와 식(13)에서 許用 tolerance 가 滿足되는가에 따라 決定된다.

$$\|S \cdot \nabla P(x)\| \leq \epsilon \quad (12)$$

$$\left| \frac{F(x)}{P(x)} - 1 \right| \leq \theta \quad (13)$$

以上에서 여기에 사용된 프로그램의 흐름도는 그림 4와 같다.

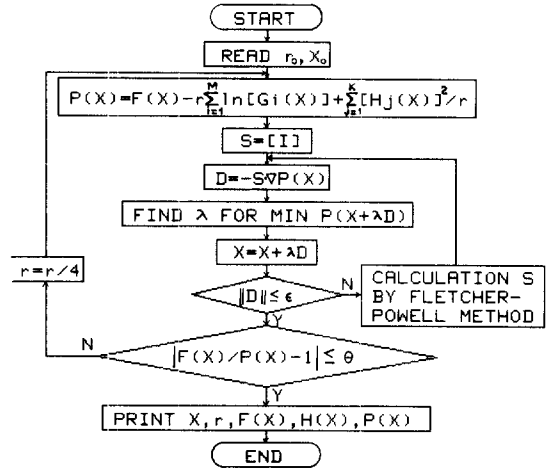


그림 4. 프로그램의 흐름도

Fig. 4. Flowchart of program

4. 適用事例

여기에서 높은 磁場 均一度를 要求하는 의료용 NMR 超電導코일을 위에서 提示한 方法에 의해 設計하였다. 의료용 NMR은 1971年 Damadian 이 처음 研究報告한¹⁹⁾ 以後, 1970年代 後半부터는 의료용 NMR 磁石으로서 보다 高磁場 및 均一磁場을 얻기 위해 超電導코일이 사용되기 始作하였고 現在에도 이에 관한 研究가 活發히 進行되고 있다.⁸⁾

圓筒形 코일 設計에 있어서 一般적으로 코일의 内部直徑이 작을 수록 磁場 均一度가 높아지나 의료용인 경우, 환자진단이 원활하도록 内部半徑이 50 cm 정도가 되어야 한다. 磁場의 크기는 NMR 影像에서 人體內的 ³¹P의 觀測이 15MHz에서 0.87T (8700 gauss) 이므로²⁰⁾ 中心磁場의 強度를 이보다 크게 하여 1T, 1.5 T 및 2T 등 세가지 경우를 適用시켜 보았고 코일의 全體 電流密度는 超電導 線材가 NbTi인 경우로 생각하여 安定度를 充分히 고려 10⁴ A/cm로 하였다.¹²⁾

이러한 條件들을 앞에서 記述한 内部補償 圓筒形 코일의 體積 最小化 問題에 代入하고 收斂정도를 $\epsilon = 10^{-2}$ 및 $\theta = 10^{-5}$ 로 하여 最適解를 구한結果, 코일의 寸數 및 體積이 表 1과 같이 구하여 졌다.

그리고, 軸上 ±25cm內的 各點에서 軸方向 磁場의 크기 및 均一度가 表 2 및 그림 5와 같다.

여기에서 보면, 中心磁場의 強度가 原來 意圖한

표 1. 内部補償 圓筒形코일의 最適치수 및 體積
Table 1. Optimal coil dimension and volume of inside notched solenoid

中心磁場 치수 및 體積	1.0 T	1.5 T	2.0 T
a_1 [cm]	50	50	50
a_2 [cm]	51.960	52.675	53.347
a_3 [cm]	51.110	51.399	51.645
b_1 [cm]	177.313	180.400	182.925
b_2 [cm]	141.517	139.295	137.553
V [cm ³]	61413	93580	126557

표 2. 軸上的 各點에서 磁場 [gauss]

Table 2. Magnetic field along the axis of solenoid [gauss]

中心磁場 $B_z(z/a_1)$	1.0 Tesla	1.5 Tesla	2.0 Tesla
$B_z(0.00)$	10000.000	15000.001	20000.001
$B_z(0.02)$	10000.000	15000.001	20000.001
$B_z(0.04)$	10000.000	15000.002	20000.001
$B_z(0.06)$	10000.000	15000.001	20000.001
$B_z(0.08)$	10000.000	15000.001	20000.001
$B_z(0.10)$	10000.000	15000.001	20000.001
$B_z(0.12)$	10000.000	15000.001	20000.000
$B_z(0.14)$	9999.999	15000.001	20000.000
$B_z(0.16)$	9999.999	15000.000	19999.999
$B_z(0.18)$	9999.998	14999.998	19999.997
$B_z(0.20)$	9999.996	14999.996	19999.993
$B_z(0.22)$	9999.993	14999.991	19999.987
$B_z(0.24)$	9999.988	14999.984	19999.978
$B_z(0.26)$	9999.981	14999.974	19999.964
$B_z(0.28)$	9999.971	14999.958	19999.943
$B_z(0.30)$	9999.955	14999.935	19999.912
$B_z(0.32)$	9999.984	14999.903	19999.870
$B_z(0.34)$	9999.904	14999.859	19999.812
$B_z(0.36)$	9999.864	14999.799	19999.732
$B_z(0.38)$	9999.811	14999.720	19999.627
$B_z(0.40)$	9999.741	14999.616	19999.489
$B_z(0.42)$	9999.651	14999.481	19999.311
$B_z(0.44)$	9999.535	14999.309	19999.082
$B_z(0.46)$	9999.388	14999.090	19998.792
$B_z(0.48)$	9999.204	14998.816	19998.429
$B_z(0.50)$	9998.974	14998.474	19997.977

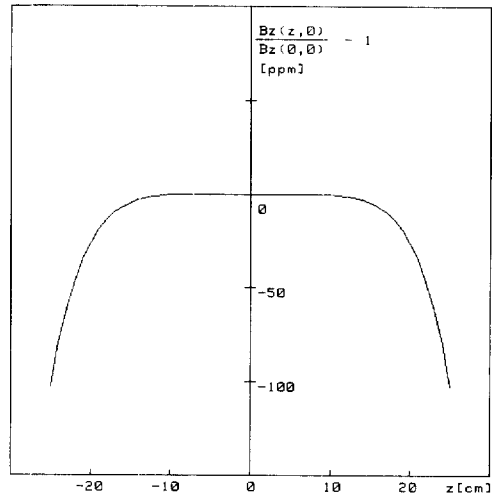


그림 5. 軸上的 各點에서 磁場均一度 ($B_z(0,0) = 1$ T)

Fig. 5. Field homogeneity along the axis of solenoid ($B_z(0,0) = 1$ T)

대로 구하여 졌으며 磁場均一度는 直徑 30cm內的 中心領域에서 約 5 ppm의 높은 磁場均一度를 나타내고 있다. 이것은 의료용 NMR에서 대단히 높은 磁場均一度가 되며 이러한 磁場均一度에서 다른 形象에 대해 最適解를 구한 結果 單純 圓筒形 코일에서 體積이 内部補償 圓筒形의 경우보다 約 5 배가 되었으며 單純圓筒形의 外側을 補償한 外部補償 圓筒形의 경우는 内部補償 圓筒形의 경우와 거의 비슷하였다.

5. 結 論

높은 磁場均一度를 要求하는 超電導 코일 設計에 있어서 上記와 같이 提示된 方法에 의해 超電導코일 體積이 最小化되는 解를 구한 結果, 最適值로 잘 收斂되는 結果를 얻을 수 있었고 이러한 最適化 方法은 從來의 그래프에 의해 解를 구하는 方法과 New-ton-Raphson 技法에 의해 解를 구하는 方法에 비해 다음과 같은 點에서 改善되었다.

1) 從來의 方法에서 求解되던 주어진 主코일에서 補償方式이 아니고, 어떤 形象에 따른 코일의 最適치수를 구하는 一般的인 解를 구할 수 있었다.

2) 從來의 方法에서는 補償코일에 의한 中心磁

場 強度의 變動을 고려하여야 했으나 本 方法에서 願하는 中心磁場을 곧바로 얻을 수 있는 解를 구할 수 있었다.

그리고, 本 方法은 여기에서 提示한 코일形象 뿐만 아니라 어떠한 形象에서도 適用될 수 있다. 例를 들어 圓筒形 코일을 n 等分하여 各部分의 코일의 크기를 어떻게 하여야 願하는 中心磁場強度 및 높은 磁場均一度를 滿足하면서 코일 體積의 最小化가 이루어 지는가 등에 變數가 너무 많아 지는 경우 收斂이 잘 되지 않는 어려움만 解決된다면 더욱 擴張的으로 適用할 수 있다.

參考文獻

- 1) D. B. Montgomery, "Solenoid Magnet Design", Robert E. Krieger Pub., 1980
- 2) F. Bitter, "The Design of Powerful Electromagnets", Rev. Sci. Instr., 7, 479, Dec., 1936
- 3) F. Gaume, "High Magnetic Fields", MIT Press, 1962
- 4) J. E. Kunzler, "Superconductivity in Nb_3Sn at High Current Densities in a Magnetic Field of 88kgauss", Phys. Rev. Lett., 6, 89, Feb., 1961
- 5) R. W. Boom, "Superconducting Solenoids", Proc. IRE, 3, 274, Mar., 1962
- 6) E. J. Thomas, "Optimizing the Design of Superconducting Solenoids" Cryogenics, 6, 10, Feb., 1966
- 7) D. Atherton, "Optimum Shapes for Superconducting Solenoids", J. Appl. Phys., 40, 2246, Apr., 1969
- 8) 李承院, "超電導와 그 응용", 電氣學會誌, 31, 11, 741, 1982
- 9) 李承院 外 7名, "超電導 特輯", 電氣學會誌, 32, 7, 379, 1983
- 10) M. W. Garrett, "Axially Symmetric Systems for Generating and Measuring Magnetic Fields", J. Appl. Phys., 22, 1091, Sep., 1951
- 11) W. Franzen, "Generation of Uniform Magnetic Fields by Means of Air-Core Coils", Rev. Sci. Instr., 33, 933, Sep., 1962
- 12) H. Brechna, "Superconducting Magnet Systems", Springer-Verlag, 1973
- 13) B. Girard, M. Sauzade, "Calcul des Solenoides Compenses du 6 ordre a Volume de Bobinage Minimum" Nuc. Instr. Methods, 25, 269, Jan, 1964
- 14) G. Remenyi, "Designing Highly Homogeneous Superconducting Magnets by Computer", Cryogenics, 17, 565, Oct., 1977
- 15) C. H. Durney, "Introduction to Modern Electromagnetics", McGraw-Hill, 1969
- 16) J. D. Jackson, "Classical Electrodynamics", John Wiley, 1975
- 17) M. S. Bazaraa, "Nonlinear Programming", John Wiley, 1979
- 18) J. L. Kuester, "Optimization Techniques with Fortran", McGraw, 1973
- 19) R. Damadian, "NMR in Medicine", Springer-Verlag, 1981
- 20) W. T. Dixon, "Theory and Interpretation of Magnetic Resonance Spectra", Plenum, 1972