韓國 軍事運營分析 學會誌
第11券, 第1號, 1985, 6

다변환 심플렉스 기법과 이의 효율성**

(A Multi-interchange Simplex Method and its Computational Efficiency)

정 성 진*
이 면 우*
이 창 훈*
강 석 호*

ABSTRACT

A multi-interchange simplex method is presented. This method tries to cut almost half of the set of convex combinations which generate all decreasing feasible directions. Analysis of this method indicates high possibility of the existence of polynomial-time simplex-type methods.

1. 서 론

선형계획을 효율적으로 푸는 기법은 Dantzig에 의해 개발된 심플렉스 기법(simplex method)이다. 이 기법은 경험적 분석(empirical analysis) 및 평균적 분석(average analysis)에 의하면, 문제크기의 다항식으로 나타나는 계산단계가 필요하다고 발표되었으나[2], 현재까지 발표된 진입법칙(entering rule)과 소거법칙(dropping rule)으로는 최악상황 분석(worst case analysis)을 할 경우 문제크기의 지수함수로 나타나는 계산과정이 요구된다는 것이 발표되었다[1,6].

최근에 발표된 Karmarkar의 기법[4]은 문제크기의 다항식으로 표시되는 계산단계가 필요하며, 아직 충분한 검토는 없었으나 심플렉스 기법과 실용적인 면에서도 비교할 가치가 있다고 생각된다. 그러나 이 기법은 일반 선형계획문제를 Karmarkar가 제시한 특별한 형태의 선형계획으로 변환하여야 하는 단점을 가지고 있다. 따라서 심플렉스 기법의 실용적인 장점을 가지며, Karmarkar 기법이나 Ellipsoid 기법[5]에서와 같이 다항식의 계산단계를 얻기 위해 필요한, 일정량의 목적함수 감소율이나 가능해집합(feasible solution set)체적 감소율을 갖는 기법의 개발은 실용적으로나 이론적인 면에서 매우 가치있는 것이다.

기존 심플렉스 기법은 단지 하나의 비기저변수(nonbasic variable)의 진입과 하나의 기저변수(basic variable)을 소거하는 기법이다. 다수의 비기저변수들의 진입과 다수

* 서울공대 산업공학과
** 이 논문은 1984년도 문교부 학술조성비에 의하여 연구되었음.

의 기저변수들을 소거하는, 다변화 기법이 제시되었으며, 이 기법은 일반적으로 기저가능해(basic feasible solution)가 아닌 한 점에서 목적함수를 감소시키는 방향을 통해 또 다른 한점으로 움직인다.

〔3,9〕에서 제시된 기법은 비선형계획의 기법이기 때문에 유한한 계산단계 안에서는 최적해를 구하지 못하는 단점이 있고, 〔8〕에서는 주어진 가능해에서 보다 나은 기저가능해를 구하는 기법을 혼합함으로서 유한한 계산단계 안에 최적해를 구하는 기법이 제시되었다. 그러나 이 기법도 일정량의 목적함수 감소율이나 가능해집합 체적 감소율을 갖는 기법은 아니다.

본 논문에서는 목적함수를 감소시키는 방향을 나타내는 볼록조합(convex combination)의 집합을 고려하여 이 집합의 일정량을 제거시킬 수 있는 다변환 기법을 제시하였고, 이 기법은 다항식의 계산단계를 갖는 심플렉스 유형의 기법이 존재할 가능성의 이론적 근거를 제시하였다.

2. 다변환 심플렉스 기법

선형계획문제들은 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$
\begin{aligned}
&\text{최소화(minimize)} && cx = z \\
&\text{제약조건(subject to)} && Ax = b \qquad (1)\\
& && x \geqq 0
\end{aligned}
$$

위에서 $x \in R^n$, $c^T \in R^n$, $b \in R^m$, $A \in R^{m \times n}$ 이다. 새로운 열벡터(column vector) $A._{n+1}$ 목적함수의 계수 c_{n+1}, 변수 x_{n+1}을 다음과 같이 정의하자.

$$A._{n+1} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j A._j = A\alpha$$

$$c_{n+1} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j c_j = c\alpha$$

$$x_{n+1} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j = \alpha^T x$$

위에서 $\alpha \in R^n$, $e^T = (1, \cdots, 1)$, $e^T\alpha = 1$, $\alpha \geqq 0$이다. 즉, $A._{n+1}$, c_{n+1}, x_{n+1}은 A, c, x의 볼록조합(convex combination)이다.

(2)에서 정의된 $A._{n+1}, c_{n+1}, x_{n+1}$을 선형계획(1)에 첨가하면 다음의 선형계획문제를 얻는다.

$$
\begin{aligned}
&\text{최소화} && cx + c_{n+1}x_{n+1} = z(\alpha) \\
&\text{제약조건} && Ax + A._{n+1}x_{n+1} = b \qquad (3)\\
& && x \geqq 0 \\
& && x_{n+1} \geqq 0
\end{aligned}
$$

정리 1 : 문제(1)이 최적해를 가질 때, 문제(3)의 최적해 $\bar{x}$에 대응하는 $\bar{\alpha}$가 존재한다. 또한 문제(1)이 unbounded below 일 때, 이에 대응하는 $\bar{\alpha}$가 존재한다.

증명 : $\bar{x}$가 최적해이면 $\bar{\alpha} = \bar{x} / (e^T\bar{x})$로 정의하자. 또 문제(1)이 unbounded below이면 Resolution 정리에 의하여 homogeneous해 y가 존재하며 $c\bar{y} < 0$이며 임의의 기저가능해 $\bar{x} + \lambda\bar{y}$, $\lambda \geqq 0$는 가능해이고 λ가 증가함에 따라 목적함수의 값 z는 감소한다. 임의의 $\bar{\lambda} > 0$에 대하여 $\bar{\alpha} = (\bar{x} + \bar{\lambda}\bar{y}) / (e^T\bar{x} + \bar{\lambda}e^T\bar{y})$로 정의하자. 위의 $\bar{\alpha}$가 볼록조합임은 명확하다.

위의 정리에 의하여 최적해 내지 목적함수의 값을 $-\infty$로 보내는 반직선에 대응하는 볼록조합의 존재성은 확립되었으나, 문제(1)을 푸는 것이나 대응하는 볼록조합 $\bar{\alpha}$를 결정하는 것은 같은 계산상의 노력이 요구된다.

선형계획(1)에서 $\bar{x}$가 주어진 기저가능해(basic feasible solution)이고, B를 $\bar{x}$의 기저행렬(basis)이라 하자, 기저변수(basic variable)를 $x_B = (x_1, \cdots, x_m)$이

라 하고 이에 상응하는 목적함수의 비용계수 (cost coefficient)를 $c_B = (c_1, \cdots, c_m)$ 이라 하면 상대비용(relative cost)은 $\bar{c} = c - c_B B^{-1} A$로 주어진다. 주어진 기저가능해 $\bar{x}$에 대하여 다음의 집합을 고려하자.

$$S = \{ \alpha \in R^n \mid \bar{c}\alpha \leqq 0, \ e^T\alpha = 1, \alpha \geqq 0 \}$$
$$S^- = \{ \alpha \in R^n \mid \bar{c}\alpha < 0, \ e^T\alpha = 1, \alpha \geqq 0 \}$$

S와 S^-의 특성은 아래와 같다.

(i) 만일 $\bar{c} \geqq 0$이면 주어진 $\bar{x}$는 최적해이며 S^-는 공집합이다.

(ii) $\bar{c}_j < 0$인 $\bar{c}_j$가 존재하면 S^-는 공집합이 아니며 S^-에 속한 모든 α에 대하여 (2)에서 정의된 바와 같이 $A_{\cdot n+1}, c_{n+1}, x_{n+1}$을 구하면, $\bar{c}_{n+1} = c_{n+1} - c_B B^{-1} A_{\cdot n+1} < 0$이고 새로운 볼록조합변수 x_{n+1}은 목적함수의 값을 감소시키는 비기저 진입변수로 고려될 수 있다.

(iii) S^-에 속한 α가 단위벡터(unit vector) 즉, $\alpha_i = 1$, $\alpha_j = 0$, $i \neq j$이면 새로운 변수 x_{n+1}과 원변수 x_i는 동일하므로 새로운 변수의 첨가는 불필요해지며, 이 경우 기존 심플렉스 기법과 동일하다.

(iv) (ii)의 경우에서 x_{n+1}을 진입변수로 심플렉스 피봇작업을 수행한 후 얻어지는 x은 일반적으로 문제 (1)의 기저가능해가 아니다.

특성 (ii)와 특성(iv)에 의하면 S^-에 속한 α를 구한 후 x_{n+1}을 진입변수로 심플렉스 피봇작업 수행 후 새로운 $\bar{S}^-$와 이에 속한 $\bar{\alpha}$를 구하여 x_{n+2}로 피봇작업을 수행하는 것을 반복한다면 비록 심플렉스 기법을 사용중이더라도 비선형계획의 기법들과 같이 유한한 계산단계 안에는 최적해에 근접할 뿐 최적해를 구하지 못할 경우가 존재한다. 이러한 어려움을 피하기 위하여 다음의 정리를 고려하자.

정리 2 : 선형계획문제에 어떤 가능해가 주어지면, 대응되는 목적함수의 값이 주어진 가능해보다 작거나 같은 기저가능해가 존재하거나, 주어진 문제는 unbounded below이다. (이 때의 기저가능해를 감소 기저가능해라고 한다.)

증명 : 위의 정리는 감소기저가능해 탐색기법의 존재성과 동치이며, 효과적인 기법이 [8]에 제시되어 있다. 이 기법은 최대한(n−m)단계 안에 원하는 결론을 얻는다.

다변환 심플렉스 기법

단계 0 : B, $\bar{x}$, $\bar{c}$를 현상태의 기저행렬,기저가능해, 상대비용이라고 하자. 만일 $\bar{c} \geqq 0$이면 $\bar{x}$가 최적해이다.그렇지 않으면 단계 1로 간다.(문제 (1)의 기저가능해를 즉시 구할 수 없는 경우 Phase I 문제로 시작한다.)

$t = 1$

단계 1 : (볼록조합 $\bar{\alpha}$의 결정)

x_j가 기저변수이면 $\alpha_j = 0$이라 놓는다. 이 때 기저변수의 갯수를 h라 하자. $\{ \alpha \in R^n \mid \bar{c}\alpha \leqq 0, e^T\alpha = 1, \alpha \geqq 0, \ \alpha_j = 0, \ x_j$ 는 기저변수$\}$의 기저가능해 α를 모두 구한다. $\bar{c}_j > 0$인 비기저변수의 갯수가 p이고, $\bar{c}_j = 0$인 비기저 변수의 갯수가 q, $\bar{c}_j < 0$인 비기저변수의 갯수를 r이라고 하면 $h + p + q + r = n$이다. 구하는 기저가능해 α의 갯수를 k이라 하면 $k = q + r + p \cdot r$이다. 따라서 구한 기저가능해 α를 $\alpha^1, \cdots, \alpha^k$로 표시하고 α를 다음과 같이 정한다.

$\bar{\alpha} = \frac{1}{k}(\alpha^1 + \cdots + \alpha^k)$

단계 2로 간다.

단계 2 : (새로운 볼록조합변수, 열벡터, 상대비용의 결정)

단계 1에서 구한 $\tilde{\alpha}$로 (2)에서 정의된 바와 같이 $A \cdot_{n+t} = A\bar{\alpha}$, $c_{n+t} = c\bar{\alpha}$, $x_{n+t} = \bar{\alpha}^T x$로 놓고 현 선형계획문제에 첨가한다. 단계 3으로 간다.

단계 3 : (x_{n+t}를 진입변수로 한 기존심플렉스 피봇작업)

만일 $\bar{A} \cdot_{n+t} = B^{-1} A_{\cdot n+t} \leq 0$이면 $\bar{c}_{n+t} = \bar{c}\bar{\alpha} < 0$이므로 unbounded below이다. 그렇지 않은 경우, x_{n+t}를 진입변수로 하여 기존 심플렉스 기법으로 피봇작업을 한다. 단계 4로 간다.

단계 4 : (초평면의 재 진입 판정 및 문제(1)의 기저가능해 발견)

단계 3에서 얻어진 기저가능해와 상대비용을 $\tilde{x}$. $\tilde{c}$이라 할 때 $\tilde{c}_j \geq 0$이 아니고, 탈락변수(dropping variable)가 원 변수 x_j, $j \leq n$이면 $\tilde{x}$, $\tilde{c}$을 현상태의 $\bar{x}$, $\bar{c}$로 하고, $t = t+1$로 한 후 단계 1로 가라. 그렇지 않으면 즉, $\tilde{c}_j \geq 0$이거나 첨가된 볼록조합 변수가 기저에서 탈락하면 문제(1)의 가능해 x를 구한 후, 첨가된 모든 볼록조합변수를 $\tilde{x}$로 부터 소거하고, 감소기저가능해 탐색기법을 이용하여 문제(1)이 unbounded below임을 증명하거나 기저가능해 x를 구한다. 구한 x의 상대비용 $\bar{c} \geq 0$이면 최적해이고, 아니면 $t = 1$로하고 단계 1로 간다.

3. 제시된 기법의 기본이론 및 타기법과의 비교분석

기존 심플렉스 기법은 경험적 분석(empirical analysis)및 평균적 분석(average analysis)으로는 대단히 효율적인 기법이나 최악상황 분석(worst case analysis)으로는, 비효율적이라고 간주되는 "Ellipsoid" 기법[5]보다 계산 단계가 더욱 필요하게 된다. 최근에 발표된 Karmarkar 의 기법[4]은 Ellipsod 기법과 같이 문제크기의 다항식 계산 단계(polynomial time bounded)를 가지면서도 아직 충분히 검토되지는 않았지만 심플렉스 기법과 실용적인 면에서도 비교될 가치가 있다고 고려된다. 그러나 Karmarkar의 기법은 일반 선형계획 문제를 Karmarkar가 제시한 투영변환(projective transformation)을 통하여 특별한 형의 선형계획 문제로 변환하여야 하는 단점이 지적된다. 본 논문에서 제시된 해법은 심플렉스 기법의 실용적 장점을 살리고, Karmarkar 기법이나 Ellipsoid기법에서 다항식 계산단계를 얻기 위해 사용된 일정한 량의 목적함수 감소율이나 체적 감소율의 장점을 취해 심플렉스 기법의 진입 법칙(entering rule) 을 확대 수정하여, 심플렉스 기법에 근저를 둔 다항식 계산 단계를 갖는 기법을 개발하기 위한 이론적 바탕을 마련하고자 한다. Murty 와 Fathi[8]가 발표한 실행가능 방향기법(Feasible Direction Method)과 본문에서 제시된 기법의 차이는 단계 1과 단계 4 이며 기존 심플렉스기법과의 차이는 단계 1 이다.

본 논문에서 제시된 기법의 진행과정을 요약하면 단계 1에서는 현재의 가능해에서 감소볼록조합의 집합 S의 중심을 $\hat{\alpha}$으로 선택하여 단계 2에서 구한 x_{n+1}으로 문제 (1)의 해집합 $K = \{ x \in R^n \mid Ax = b, \ x \geqq 0 \}$ 상의 한계 (boundary) 즉, 해집합 K의 face 에 도달한다. 감소방향이 K의 face에서 만나는 점이 단계 3에서 구한 $\tilde{x}$이며 단계 4의 판정기준에 맞으면 감소기저가능해 탐색기법을 사용하고, 그렇지 않으면 x에서 새로운 감소볼록조합 $\tilde{\alpha}$을 구하여 계속된다. 이 과정을 시각적으로 보기 위하여 $n = m + 2$인 전형적인 예를 R^2 상에 도시하면 〈그림 1〉과 같다.

만일 주어진 선형계획문제가 퇴화(degenerate)일 경우 단계 3의 피봇작업이 퇴화일 경우가 있다. 이 경우 선형계획에서 사용되는 순환(cycling)을 배제하는 법칙〔Bland, Murty〕으로 순환현상을 배제할 수 있다. 본 논문에서는 단계 1과 단계 4의 판정기준에 중점을 두었으므로 상세한 설명은 〔8〕을 참고하기로 한다. 순환현상이 배제된 상태에서는 단계 3과 단계 4에 의하여 감소하는 기저가능해을 얻음으로써 기저가능해의 갯수가 유한함으로 최적해를 구하거나 unbounded below 임이 판명된다.

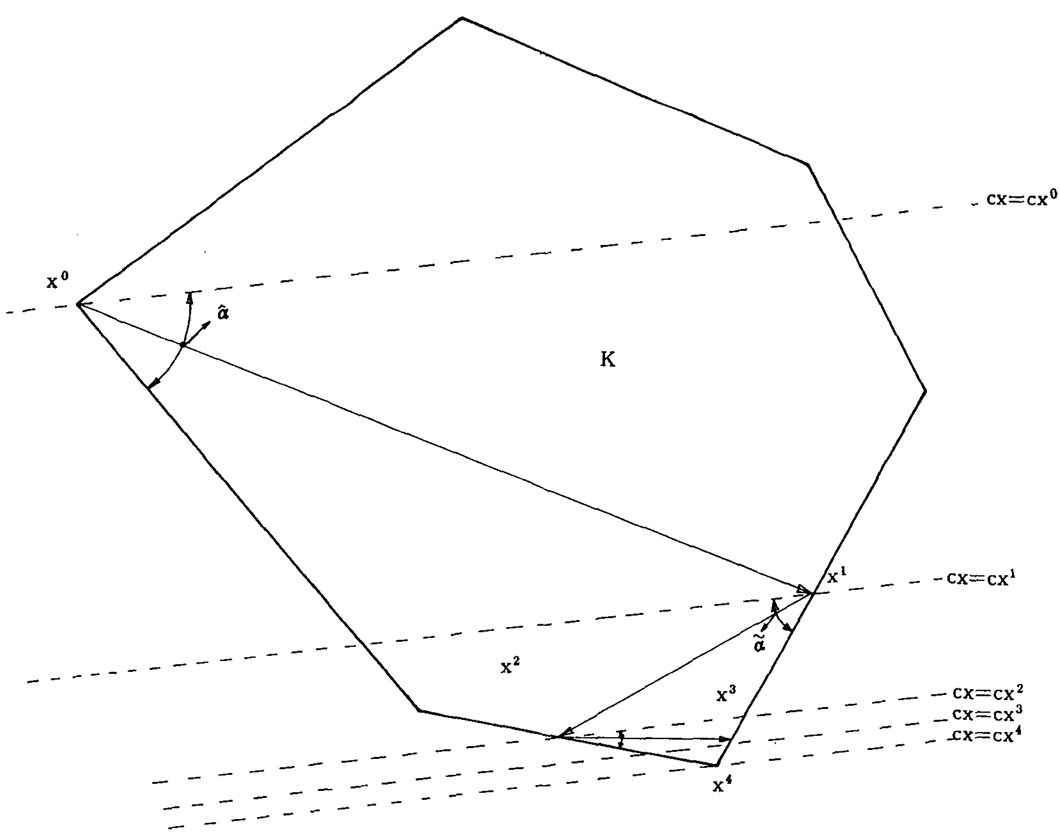

그림 1

단계 1의 비교 분석

기존 심플렉스 기법은 볼록조합 α를 항상 단위 벡타로 잡으며 Murty의 기법은 볼록조초이 아닌 비중 벡타 w를 다음과 같이 선정하였다. 주어진 가능해의 상대 비용을 $\bar{c}$라 하면

$$w_j = \begin{cases} -1 \text{ 또는 } -\bar{c}_j & : \bar{c}_j < 0 \\ 0 & : \bar{c}_j \geq 0 \end{cases}$$

〔 8 〕에서는 위의 선택이 자연적인 선택이라고 설명하였고 이는 현 상태에서 감소하는 상대 비용을 갖는 모든 변수의 값을 증가하려 함에 기인된다 하겠다. 본 논문에서 제시된 집합 $\{ \alpha \in R^n \mid \bar{c}\alpha \leq 0,\ e^T\alpha = 1,\ \alpha \geq 0 \}$의 중심 $\hat{\alpha}$은 다음 분석에 이론적 바탕을 둔다.

단계 1의 이론적 분석

x^0을 기저가능해라 하고 상대비용을 $\bar{c}^0$로 하면 목적함수를 감소시키는 볼록조합 α의 집합은

$$S^0 = \{ \alpha \in R^n \mid \bar{c}^0 \alpha \leq 0,\ e^T\alpha = 1,\ \alpha \geq 0 \}$$

이다. $z(x, \alpha)$를 x에서 볼록조합 α를 사용하여 단계 2, 3을 거쳐 얻은 목적함수의 값이라 정의하자. 문제 (1)의 해집합을 K라하면, S^0에 속한 α^0를 잡은 후 단계 2, 3을 거친 후 탐색해야 할 K의 부분집합은 $\{ x \in K \mid cx > z(x^0, \alpha^0) \}$가 제거되고 남은 $\{ x \in K \mid cx \leq z(x^0, \alpha^0) \}$이다. 이 집합에 대응하는 α의 집합을 구하려면 $\{ x \in K \mid cx = z(x^0, \alpha^0) \}$의 기저가능해 x를 모두 구하고 각 x에 대응하는 α를 구한 후 모든 α의 convex hull을 구하면 된다. 그러나 $\{ x \in K \mid cx = z(x^0, \alpha^0) \}$의 기저해는 유한하기는 하나 대단히 많기 때문에 (즉 일반선형해의 기저가능해의 수와 동등함) 바람직하지 못하다. 그러나 이러한 α의 convex hull은 선형등호부등식이고 α^0에 대응하는 목적함수의 값이 $z(x^0, \alpha^0)$이므로 α^0를 지나는 부등식이 적어도 하나 존재한다. α^0의 선정 후, 단계 2, 3을 거쳐 얻어지는 가능해를 x^1, 상대비용을 $\bar{c}^1$이라고 하면 감소방향에 대응하는 $\{ \beta \in R^n \mid \bar{c}^1 \beta \leq 0 \}$를 얻는다. x^1은 일반적으로 기저가능해가 아니기 때문에 β는 음의 요소도 가질 수 있으며, x^1에 대응된다. 따라서 $S^0 \cap \{ \alpha \in R^n \mid \bar{c}^1\alpha \leq 0 \}$를 고려하자.

정리 3 : $\alpha^0 \in \overset{\circ}{S} \cap \{ \alpha \in R^n \mid \bar{c}^1 \alpha \leq 0 \}$

증명 : $z(x^0, \alpha^0) = z(x^1, 0)$이고 $\alpha \in \{ \alpha \in R^n \mid \bar{c}^1 \alpha = 0 \}$인 모든 α에 대하여 $z(x^1, \alpha) = 0$이다.

따라서 초평면 $\{ \alpha \mid \bar{c}^1\alpha = 0 \}$는 S^0를 자르는 평면이며 α^0를 지난다. α^0의 S^0상의 위치에 따라 $S^0 \cap \{ \alpha \in R^n \mid \bar{c}^1\alpha > 0 \}$인 부분은 제거되고 $S^0 \cap \{ \alpha \in R^n \mid \bar{c}^1\alpha \leq 0 \}$인 부분은 남게된다. Binary Search와 유사하게 α를 S^0를 중심으로 정하는 것은 최악의 상황에서도 많은 부분이 제거되는 잇점이 있다. 두다면체 (polytope)의 체적비율 즉 $\text{volume}(S^0 \cap \{ \alpha \in R^n \mid \bar{c}^1\alpha \leq 0 \}) / \text{volume}(S^0)$를 구하는 것이 앞으로의 연구과제이다. R^2상에서는 이 비율이 1/2이며, 3차원 이상일 때 비율을 구하지는 못하였지만 1/2에 근접한 어떤 값일 것이라 예상된다.

단계 4의 분석

기존 심플렉스 기법에서는 항상 기저가능해로 움직이기 때문에 단계 4의 경우가 생기지 않는다. Murty〔 8 〕의 기법에서는 적당한 정수 k를 선택하여 단계 4를 수행하게 하였다. 본 논문에서는 볼록조합 변수가 탈락될 때가 같은 초평면에 재 진입하는 것에 유의하여 단계 4를 수행하게 하였다. 초평면의 재진입은 다음 세가지 경우이며 전형적인 예를

〈 그림 2 〉에서 도시하였다.

1) 최적해가 있는 초평면이며 최적해에 접근하는 경우

2) 선형계획이 unbounded below이며 -∞로 발산하는 경우

3) 재 진입한 초평면이 지금의 방향에 상대적으로 매우 클 경우

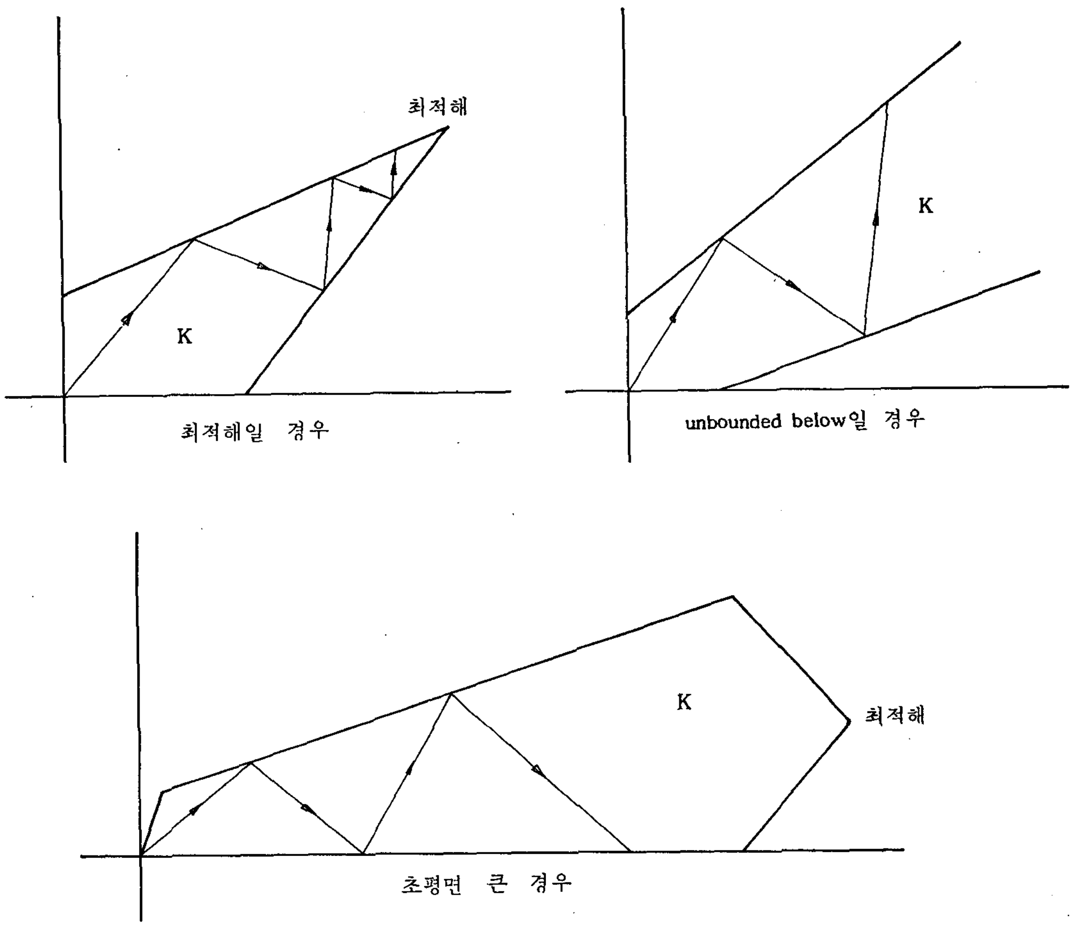

그림 2

4. 결 론

제시된 해법은 목적함수를 감소시키는 볼록조합의 집합 S를 자르는 초평면을 생성함으로써 S의 체적이 목적함수의 값이 감소함에 따라 점차적으로 감소함을 보였다. 이는 다항식의 계산단계를 가지는 심플렉스 형태의 기법의 발견에 이론적 바탕을 제시하였으며 S의 체적 감소율이 n,m, 혹은 선형계획의 문제크기이며 [5]에서 제시된 L등의 함수 형태를 구하는 것이 앞으로의 연구과제이다.

참 고 문 헌

1. Avis,D.and Chvatal, V.,"Notes on Bland's Pivoting Rule," in Mathematical Programming Study 8, North-Holland, Amsterdam, July 1978, pp 24-34.
2. Borgwardt, K.H.,"Some Distribution Independent Results About the Asymptotic Order of the Average Number of Pivot Steps in the Simplex Method," Mathematics of Operations Research 7, 3(August 1982), 441-462.
3. Cooper L. and Kennington, J., "Non-extreme Point Solution Strategies for Linear Programs," Naval Research Logistics Quarterly 26(3), 477-462, (1979).
4. Karmarkar, N., "A New Polynomial-time Algorithm for Linear Programming," AT & T Bell Laboratories Report.
5. Khachiyan, L.G., "Polynomial Algorithm in Linear Programming," Soviet Mathematic Doklady, No.1, 20, 1979.
6. Klee, V. and Minty, G.I., "How Good is the Simplex Algorithm?" in: O. Shisha, ed., Inequalities III, Academic Press,New York, 1972.
7. Murty,K.G., Linear and Combinatorial Programming," John Wiley & Sons, INC.
8. Murty, K.G. and Fathi,Y., "A Feasible Direction Method for Linear Programming,"Operations Research Letters, Vol. 3, No. 3, August 1984, pp 121-127.
9. Sheralli, H.D., Soyster, A.L., Baines, S.G., "Nonadjacent Extreme Point Methods for Solving Linear Programs," Naval Research Logistics Quarterly, 30(1983) 145-161.