韓國數學敎育學會誌<數學敎育>
1984. 3. Vol. XXII, No. 2.

Journal of the Kora Society of Mathematical Education
Mar. 1984. Vol. XXII, No. 2

Iterated Loop Space의 a_p-module Structure

光云大學 金 相 萬

1. 緖 論

Mod P의 steenrod algebra a_p는 steenrod reduced powers P^n($P=2$일때는 Sq^n)와 Bockstein Coboundary operation β에 의하여 生成된다. [2]

extended p-th power operation이라는 homology operation을 定義하고, 이에 의하여 mod P homology ring structure를 나타낼 수 있다. [3]

이 operation은 $Q_i^{(p)}$; $H_n(X;\boldsymbol{Z}_p)\to H_{pn+i}(X;\boldsymbol{Z}_p)$이다. 이 operation을 H_p^∞-space X(特히 iterated loop space)의 mod P homology group에 作用시킨다. 이때

$Q^j_{(p)}$: $H_n(X:\boldsymbol{Z}_p)\to H_{n+2j(p-1)}(X:\boldsymbol{Z}_p)$ (P는 odd) 및 $Q^j_{(2)}$: $H_n(X:\boldsymbol{Z}_p)\to H_{n+j}(X:\boldsymbol{Z}_2)$를 各各

$$Q^j_{(p)}x=(-1)^{j+m(n^2+n^2)/2}(m!)^n Q^{(p)}_{(2j-n)(p-1)}x,\quad x\epsilon H_n(X:\boldsymbol{Z}_p),\quad m=\frac{P-1}{2}\quad Q^j_{(2)}x=Q^{(2)}_{j-n}x$$

로 定義한다. 이 $Q^j_{(p)}$-operation과 steenrod reduced power operation P^n($P=2$일 때는 Sq^n)와의 關係를 求한다.

2. 本 論

(Dyer-Lashof의 $Q^j_{(p)}$-operation의 定義)

$\sum_p$를 P次對稱羅, $J^n\sum_p$을 그 n回 join이라 한다. 이때 H-space X(associative인 multiplication $X\times X\to X$가 存在하여 Unit를 가짐)는 다음과 같은 map θ_p^{n+1}; $J^{n+1}\sum_p\times X^p\to X$에서

1) $\sum_p$-equivariant

2) normalization Condition

을 滿足하는 것이 있을 때 H_p^n-space라 한다. 여기 $X^p=X\times\cdots\cdots\times X$는 直積空間을 나타낸다. [3]

다음에 $\sum_p\ni T$를 cyclic permutation, π를 T로 生成된 order P의 subgroup라 한다. $\boldsymbol{Z}(\pi)$는 π의 integral group ring을 나타내는 것으로 한다. 이때

$\cdots\to\boldsymbol{Z}(\pi)\xrightarrow{\Delta}\boldsymbol{Z}(\pi)\xrightarrow{\Gamma}\boldsymbol{Z}(\pi)\xrightarrow{\Delta}\boldsymbol{Z}(\pi)\xrightarrow{\varepsilon}\boldsymbol{Z}$를 π-free acyclic chain Complex W라 한다. 여기 $\boldsymbol{Z}(\pi)\ni x$에 對하여 $\Delta x=(T-1)x$, $\Gamma x=(1+T+\cdots\cdots+T^{p-1})x$, 또 ε은 augumentation을 나타낸다.

W의 dimension $i(i\geq 0)$의 $\boldsymbol{Z}(\pi)$-generafor를 e_i로 나타낸다. 한편 inclusion homomorphism $\pi\underset{\rightarrow}{\leq}\sum_p$는 $J^n\pi\underset{\rightarrow}{\leq}J^n\sum_p$를 induce한다. $n=\infty$인 경우 $J^\infty\pi$의 chain Complex도 π-free acyclic이다. 그리고 $J^\infty\pi$와 W는 同一視할 수 있다. 따라서 X가 H_p^∞-space이라 하면, θ_p^∞는 homology group의 homomorphism $(\theta_\pi)_*$; $H_*(W\times_\pi X^p;\boldsymbol{Z}_p)\to H_*(X;Z_p)$를 誘導한다.

여기서 $H_*(X;Z_p)\ni x$에 對하여, extended power operation $Q_i^{(p)}$는 $Q_i^{(p)}(x)=(\theta_\pi)_*(e_i\otimes_\pi x^p)$로 定義한다.

定理 1. X를 topological space라 하고, $H_i(X;\boldsymbol{Z}_p)$가 finitely generated라고 假定한다. $x_1, x_2, \cdots$를 $H_*(X;\boldsymbol{Z}_p)$의 $\boldsymbol{Z}_p$-basis라 한다. 이때 다음의 Cycles로 代表되는 homology Classes는 $H_*(W\times_\pi x^p;\boldsymbol{Z}_p)$의 $\boldsymbol{Z}_p$-basis로 된다.

$$e_i\otimes_\pi x_j^p\ ;\ j=1,2,\cdots, i\geq 0,$$

$$x_j^p=x_j\otimes\cdots\otimes x_j\ \ (p\text{-times})$$

$e_0\otimes_\pi(x_{j1}\otimes\cdots\otimes x_{jp})$ [3]

여기, $(j_1,\cdots j_p)$는 $j_s\neq j_t$ for some s,t, 그리고 index의 permutation에 의하여 서로 옮겨지는 Class로부터 選擇하는 것으로 한다.

(Steenrod operation P^n의 定義) [7]

空間 X를 finite regular cell complex로 假定한다. $U\epsilon H^q(X;\boldsymbol{Z}_p)$, Z는 U를 代表하는 Cocycle이라 한다. 이때 Chain

$$W\otimes C(X_p)\xrightarrow{\varepsilon\otimes 1}C(X^p)\longrightarrow\boldsymbol{Z}_p$$

는 equivariant cocycle로 되고, 그 cohomology class를 $P(u)\in H^{pq}(W\times_\pi X^p;\boldsymbol{Z}_p)$로 쓴다. 여기에 $\varepsilon: W\to\boldsymbol{Z}$는 augumentation, $C(X^p)$은 X^p의 Chain Complex이고, π는 X^p에 index의 permutation으로서 operate하고 또 X에 trivial하게 operate하는 것으로 한다. 또 $W\times X$ 및 $W\times X^p$에는 diagonal map $\pi\to\pi\times\pi$에 의하여 operate시킨다. 이때 分明히 diagonal map $W\times X\to W\times X^p$는 π-equivariant이다. 따라서 map $d; W\times_\pi X=W/_\pi\times X\to W\times_\pi X^p$를 誘導한다. 또 projection $W\times_\pi X^p\to W/\pi$에 의하여 $H^*(W\times_\pi X^p\ ;\ \boldsymbol{Z}_p)$는 $H^*(W/\pi\ ;\ \boldsymbol{Z}_p)$-module의 Structure가 導入된다. 똑같이 $H^*(W\times_\pi X\ ;\ \boldsymbol{Z}_p)\equiv H^*(W/\pi\times X\ ;\ \boldsymbol{Z}_p)$도 $H^*(W/\pi\ ;\ \boldsymbol{Z}_p)$ modul이고, d^*는 $H^*(W/\pi\ ;\ \boldsymbol{Z}_p)$-module로서의 homomorphism이다. W_i를 $H^i(W/\pi\ ;\ \boldsymbol{Z}_p)\cong\boldsymbol{Z}_p$의 generator로서 e_i에 dual인 것이라 한다. 또 β를 係數群의 exact Sequence $0\to\boldsymbol{Z}_p\to\boldsymbol{Z}_{p^2}\to\boldsymbol{Z}_p\to 0$ 으로부터 誘導된 Cohomology Bockstein operation으로서 $\nu(g)=(m!)^{-q}(-1)^{m(q^2+q)/2}$로 쓴다. 이때 steenrod operation은 다음 公式에 의하여 定義된다.

$$\nu(q)d^*\mathrm{p}(u)=\textstyle\sum_i(-1)^iW_{(q-2i)(p-1)}\times p^iu+\sum_i(-1)^iW_{(q-2i)(p-1)-1}\times\beta p^iu$$

$$d^*\mathrm{p}(u)=\textstyle\sum_i w_{q-i}\times S_q^iu$$

定理 2. $u_1, u_2, \cdots$,를 $H^*(X:\boldsymbol{Z}_p)$의 $\boldsymbol{Z}_p$-basis로서 定理 1의 $x_1, x_2\cdots$에 dual인 것으로 한다. 이 때 다음 性質을 滿足하는 Cohomology Classes $Z_1, Z_2, \cdots$가 存在한다.

1) $z_1, z_2, \cdots$는 ker $d^*(\subset H^*(W\times_\pi X^p:\boldsymbol{Z}_p))$의 $\boldsymbol{Z}^p$-basis

2) $z_1, z_2, \cdots$및 $w_i\times pu_j$, $i\geq 0$, $j\geq 1$은 $H^*(W\times_\pi X^p:\boldsymbol{Z}_p)$의 $\boldsymbol{Z}_p$-basis이고, $w_i\times pu_j$는 $e_i\otimes\ _\pi x_j^p$의 dual이다(for all i, j).

〔證明〕 다음과 같은 同型이 存在함이 분명하다. [3], [7]

$H_*(W\times_\pi X^p\ ;\ \boldsymbol{Z}_p)\cong H_*(W\otimes_\pi H_*(X^p\ ;\ \boldsymbol{Z}_p))$, $H^*(W\times_\pi X^p\ ;\ \boldsymbol{Z}_p)\cong H^*(\mathrm{Hom}_\pi(W\otimes H_*(X_p\ ;\ \boldsymbol{Z}_p), \boldsymbol{Z}_p))$.
$\boldsymbol{Z}_p$-basis $x_1, x_2, \cdots$는 $H_*(X\ ;\ \boldsymbol{Z}_p)$의 直合分解를 준다. 즉

$$H_*(X\ ;\ Z_p)\cong\textstyle\sum_jA_j,\ \ A_j\cong\boldsymbol{Z}_p\{x_j\},\ \ H^*(X\ ;\ \boldsymbol{Z}_p)\cong\sum_jA_j{}^*$$

따라서 Künneth formula에 의하여 다음과 같은 $\boldsymbol{Z}_p(\pi)$-module로서 分解를 얻는다.

$$H_*(X^p\ ;\ \boldsymbol{Z}_p)=\textstyle\sum_jA_j^p+\sum A_{j1}\otimes\cdots\otimes A_{jp}$$

여기에 $A_j^p=A_j\otimes\cdots\otimes A_j$(p times), $(j_1,\cdots,j_p)$는 $j_s\neq j_t$ for some s,t,를 滿足시키는 것이라 한다. 分明히 π는 第一項에는 trivial하게 또 第二項에는 free하게 operate한다. $\beta=\sum_{(j1,\cdots jp)}A_{j1}\otimes\cdots\otimes A_{jp}$라 한다. 여기에 $(j_1\cdots j_p)$는 $j_s\neq j_t$ for some s,t 그리고 index의 permutation(cyclic)에 의한 同値類로부

터 選擇한 代表元의 위를 움직이는 것으로 한다. 分明히 第二項 $\cong \boldsymbol{Z}_p(\pi)\otimes B$이고 π는 $\boldsymbol{Z}_p(\pi)$에 operate 한다. 여기에 $\boldsymbol{Z}_p(\pi)$는 $\boldsymbol{Z}_p$위의 π의 group ring 따라서

$$H_*(W\times_\pi X^p;\boldsymbol{Z}_p)\cong\sum_j H_*(W\otimes_\pi A_j^p)+H_*(W\otimes_\pi \boldsymbol{Z}_p(\pi)\otimes B)$$

$$H^*(W\times_\pi X^p;\boldsymbol{Z}_p)\cong\sum_j H^*(W\otimes_\pi A_j^p)+H^*(W\otimes_\pi \boldsymbol{Z}_p(\pi)\otimes B)$$

$H_i(W\otimes_\pi A_j^p)$의 generator는 $e_i\otimes_\pi x_j^p$이다. 明白히 $W\otimes_\pi\boldsymbol{Z}_p(\pi)$는 acyclic하다. 따라서 $H_*(W\otimes_\pi\boldsymbol{Z}_p(\pi)\cong\boldsymbol{Z}_p$ 그리고 $H_*(W\otimes_\pi\boldsymbol{Z}_p(\pi)\otimes B)\cong B$ 따라서 定理 1은 證明되었다. 그런데 Cohomolgy group의 경우에는 $H^i(W\otimes_\pi A_j^p)\cong H^i(w/\pi:\boldsymbol{Z}_p)\otimes(A_j^*)^p$는 $w_i\times \mathrm{p}u_j$로 generate되고 더욱 $H^*(W\otimes_\pi\boldsymbol{Z}_p(\pi)\otimes B)\subset\ker d^*$ 그래서 $H^*(W\otimes_\pi\boldsymbol{Z}_p(\pi)\otimes B)=\ker d^*$를 밝히자. $\boldsymbol{Z}$를 homogeneous elemet $\sum_k a_k w_{ik}\times \mathrm{p}u_{jk}$, $a_k\in\boldsymbol{Z}_p$이고 $d^*Z=0$로 된다. 따라서 定義에 의하여

$$0=\sum_k a_k w_{i_k}(\sum_l(-1)^l w(q_k-2l)(\mathrm{p}-1)p^l u_{jk}+\sum_l(-1)^l W_{(q_k-2l)(p-1)-1}\beta p^l u_{jk})$$

여기에 $q_k=\deg u_{jk}$ 가장 낮은 degree를 갖는 basic element를 하나 例를 들어 u_{jk}을 생각한다. 이때 위의 等式의 右邊에는 $a_k w_{ik}+(\mathrm{p}-1)q_k\times u_{jk}$인 項이 있다. 따라서 次元의 關係로부터 $a_k=0$로 되고 똑같이 $Z=0$을얻는다. 따라서 $H^*(W\otimes_\pi\boldsymbol{Z}_p(\pi)\otimes B)\cong\ker d^*$ 定理 2의 證明이 끝났다.

Lemma 1. p는 odd prime이고, $m=\dfrac{\mathrm{p}-1}{2}$이라 한다. u를 q-dimentional cohomology class라 한다. 이때 임의의 positive integers k,l,q에 對하여 다음 公式이 成立한다. 〔7〕

$$\sum_i(-1)^{i+k}\binom{(q-2i)m}{mq-l+i}p^{k-mq+l-i}p^i u=\sum_i(-1)^{i+l+mrq}\binom{(q-2i)m}{mq-k+i}p^{l-mq+k-i}p^i u,$$

$$\sum_i(-1)^{i+k+mq+1}\binom{(q-2i)m-1}{mq-l+i}p^{k-mq+l-i}\beta p^i u=\sum_i(-1)^{i+l+l}\binom{(q-2i)m}{mq-k+i}\beta p^{l-mq+l-i}p^i u$$

$$+\sum_i(-1)^{i+l}\binom{(q-2i)m-1}{mq-k+i}p^{k-mq+l-i}\beta p^i u$$

〔證明〕 먼저 $\sum_{p^2}$을 p^2-th對稱群이라 한다. 分明히 $\pi\times\pi$는 $\sum_{p^2}$의 subgroup이다. 또 W를 π-free acyclic chain complex라 하면 $W\times W$는 $\pi\times\pi$-free acyclic chain complex이다. 단 operation은 $(\alpha,\beta)(x,y)=(\alpha x,\beta y)$, $\alpha,\beta\epsilon\pi$, $x,y\epsilon W$로 준다. X도 finite regular cell complex라 한다. 이때 앞과 같은 方法으로 external reduced p^2 power

$$P';\ H^q(X:\boldsymbol{Z}_p)\to H^{p^2q}(W\times W\times\pi\times\pi K^{p^2};\boldsymbol{Z}_p)$$

가 定義되고, $d';X\to X^{p^2}$를 diagonal map이라 하면 Künneth formula로 부터 D_{jk}가 다음과 같이 定義된다.

$$(d')^*p'u=\sum_{j,k}W_j\times W_k\times D_{j,k}u$$

이때 다음 關係가 成立한다. 〔7〕

1) $\sum_{jk}W_j\times W_k\times D_{j_2ku}=\sum_j W_j\times D_j(\sum_k W_k\times D_k U)$

2) $D_{j,k}U=(-1)^{j_k+\mathrm{p}(q-1)q/2}D_{kju}$

따라서 steenrod operation의 定義로부터 다음 等式을 얻는다.

$$\begin{aligned}\nu(\mathrm{p}q)\nu(q)(d')^*\mathrm{p}'u=&\sum_{ki}(-1)^{i+k}w_{(\mathrm{p}q-2k)(\mathrm{p}-1)}\times p^k(w_{(q-2i)(\mathrm{p}-1)}\times p^i u)\\&+\sum_{ki}(-1)^{i+k}w_{(\mathrm{p}q-2k)(\mathrm{p}-1)}\times p^k(w_{(q-2i)(\mathrm{p}-1)-1}\times\beta p^i u)\\&+\sum_{ki}(-1)^{i+k}w_{(\mathrm{p}q-2k)(\mathrm{p}-1)-1}\times\beta p^k(w_{(q-2i)(\mathrm{p}-1)}\times p^i u)\\&+\sum_{ki}(-1)^{i+k}w_{(\mathrm{p}q-2k)(\mathrm{p}-1)-1}\times\beta p^k(w_{(q-2i)(\mathrm{p}-1)-1}\times\beta p^i u)\end{aligned}$$

한편 $\beta w_1=-w_2$, $w_{2n}=(w_2)^n$, $p^j w_n=\left(\begin{array}{c}\left[\frac{n}{2}\right]\\ j\end{array}\right)w_{n+2j(p-1)}$ 단 實數 x에 對하여 $[x]$는 Gauss記號를 나타낸다. 따라서 Cartan의 公式을 使用하여,

$$p^k(w_{(q-2i)(p-1)}\times p^iu)=\sum_j\binom{(q-2i)m}{j}w_{(q-2i+2j)(p-1)}\times p^{k-j}p^iu,$$

$$p^k(w_{(q-2i)(p-1)-1}\times\beta p^iu)=\sum_j\binom{(q-2i)m-1}{j}w_{(q-2i+2j)(p-1)-1}\times p^{k-j}\beta p^iu,$$

$$\beta p^k(w_{(q-2i)(p-1)}\times p^iu)=\sum_j\binom{(q-2i)m}{j}w_{(q-2i+2j)(p-1)}\times\beta p^{k-j}\beta p^iu,$$

$$\beta p^k(w_{(q-2i)(p-1)-1}\beta p^iu)=-\sum_j\binom{(q-2i)m-1}{j}w_{(q-2i+2j)(p-1)}\times p^{k-j}\beta p^iu$$

$$-\sum_j\binom{(q-2i)m-1}{j}w_{(q-2i+2j)(p-1)-1}\times\beta p^{k-j}\beta p^iu$$

여기서 $a=(pq-2k)(\mathrm{p}-1)$, $b=(q-2i+2j)(\mathrm{p}-1)$로 둔다. 따라서

3) $\nu_{(pq)}\nu_{(q)}D_{a,b}(u)=\sum_j(-1)^{i+k}\binom{(q-2i)m}{j}p^{k-j}p^iu$

4) $\nu_{(pq)}\nu_{(q)}D_{a,b-1}(u)=\sum_j(-1)^{j+k}\binom{(q-2i)m-1}{j}p^{k-j}\beta p^iu$

5) $\nu_{(pq)}\nu_{(q)}D_{a-1,b}(u)=\sum_j(-1)^{i+k}\binom{(q-2i)m}{j}\beta p^{k-j}p^iu-\sum_j(-1)^{i+k}\binom{(q-2i)m-1}{j}p^{k-j}\beta p^iu$

6) $\nu_{(pq)}\nu_{(q)}D_{a-1,b-1}(u)=-\sum_j(-1)^{i+k}\binom{(q-2i)m-1}{j}\beta p^{k-j}\beta p^iu$

여기서 $l=mg+i-j$로 두고, 따라서 $a=(\mathrm{p}q-2k)(\mathrm{p}-1)$, $b=(\mathrm{p}q-2l)(\mathrm{p}-1)$ 이때 lemma의 第一의 關係는 2)와 3)에서 또 第二의 關係는 2)와 4)와 5)로 부터 各各 유도된다.

定理 3. $U\in H^q(X;Z_{\mathrm{p}})$라면 element $Z\in\ker d^*$가 存在하여 다음의 關係가 成立한다.

$$p^n(\mathrm{p}u)=\sum_i\binom{(q-2i)m}{n-pi}w_{2(n-pi)(\mathrm{p}-1)}\mathrm{p}(p^iu)-\mu(q)\sum_i\binom{(q-2i)m-1}{n-\mathrm{p}i-1}w_{2(n-pi)(\mathrm{p}-1)-p}\mathrm{p}(\beta p^iu)+Z$$

여기에서 $\mu(q)=(m!)^{-1}(-1)^{mq}$라 한다.

〔系 1〕

$$p^n(w_s\times\mathrm{p}u)=\sum_i\binom{\left[\frac{s}{2}\right]+(q-2i)m}{n-\mathrm{p}i}w_{s+2(n-pi)(\mathrm{p}-1)}\times\mathrm{p}(p^iu)$$

$$-\mu(q)\varepsilon(s)\sum_i\binom{\left[\frac{s}{2}\right]+(q-2i)m-1}{n-\mathrm{p}i-1}w_{s-\mathrm{p}+2(n-pi)(\mathrm{p}-1)}\times\mathrm{p}(\beta p^iu)+Z'$$

여기에 $u\epsilon H^q(X;Z_p)$, $Z'\epsilon\ker d^*$, $\varepsilon(s)=1$ if s even, $\varepsilon(s)=0$ if s odd.

〔**定理 3의 證明**〕 Steenrod operation의 定義와 Cartan의 公式 및 $p^jw_n=\binom{\left[\frac{n}{2}\right]}{j}w_{n+2j(\mathrm{p}-1)}$로 부터 다음 公式을 얻는다.

$$p^n(\nu_{(q)}d^*\mathrm{p}u)=\sum_{i,j}(-1)^i\binom{(q-2i)m}{j}w_{(q-2i+2j)(\mathrm{p}-1)}\times p^{n-j}p^iu$$

$$+\sum_{i,j}(-1)^i\binom{(q-2i)m-1}{j}w_{(q-2i+2j)(\mathrm{p}-1)-1}\times p^{n-j}\beta p^iu$$

$l=mq+i-j$, $s=n-mq+l-i$로 두자, 이때 lemma 1에 의하여 윗식을 고쳐쓰면

$$p^n(\nu(q)d^*\mathrm{p}u)=\sum_l(-1)^nw_{(\mathrm{p}q-2l)(\mathrm{p}-1)}\sum_i(-1)^{i+n}\binom{(q-2i)m}{mq+i-l}p^{n-mq+l-i}p^iu$$

$$+\sum_l(-1)^{n+mq+1}w_{(\mathrm{p}q-2l)(\mathrm{p}-l)-1}\sum_i(-1)^{i+n+mq+1}\binom{(q-2i)m-1}{mq+i-l}p^{n-mq+l-i}\beta p^iu$$

$$=\sum_l(-1)^nw_{(\mathrm{p}q-2l)(\mathrm{p}-1)}\sum_i(-1)^{s-n}\binom{(q-2i)m}{mq-n+i}p^sp^iu$$

$$+\sum_l(-1)^{n+mq+1}w_{(pq-2l)(p-1)-1}\sum_i(-1)^{i+l+1}\binom{(q-2i)m}{mq-n+i}\beta p^s p^i u$$

$$+\sum_l(-1)^{n+mq+1}w_{(pq-2l)(p-1)-1}\sum_i(-1)^{i+l}\binom{(q-2i)m-1}{mq-n+i}p^s\beta p^i u$$

$\binom{a}{b}=\binom{a}{a-b}$이므로

$$=\sum_i w_{2(n-pi)(p-1)}\sum_s(-1)^s\binom{(q-2i)m}{n-pi}w_{(q+2i(p-1)-2s)(p-1)}p^s p^i u$$

$$+\sum_i w_{2(n-pi)(p-1)}\sum_s(-1)^s\binom{(q-2i)m}{n-pi}w_{(q+2i(p-1)-2s)(p-1)-1}\beta p^s p^i u$$

$$-\sum_i w_{2(n-pi)(p-1)-p}\sum_s(-1)^s\binom{(q-2i)m-1}{n-pi-1}w_{(q+2i(p-1)+1-2s)(p-1)}p^s\beta p^i u$$

a와 b가 odd일때 $w_a\times w_b=0$ 따라서 steenrod operation의 定義로부터 上式은

$$p^n(\nu(q)d^*\mathrm{p}u)=\sum_i w_{2(n-pi)(p-1)}\binom{(q-2i)m}{n-pi}\nu(q+2i(p-1)d^*\mathrm{p}(p^i u)$$

$$-\sum_i w_{2(n-pi)(p-1)-p}\binom{(q-2i)m-1}{n-pi-1}\nu(q+2i(p-1)+1)d^*\mathrm{p}(\beta p^i u)$$

한편 $\nu(q)^4\equiv1(\mathrm{mod}\ p)$ 따라서 $\nu(q+2i(p-1))/\nu(q)\equiv1(\mathrm{mod\ p})$ $\nu(q+2i(p-1)+1)/\nu(q)\equiv(m!)^{-1}(-1)^{mq}(=\mu(q))(\mathrm{mod\ p})$ 따라서 兩邊을 $\nu(q)$로 나누어서 定理 3을 얻는다.

定理 4. p^n_*를 p^n의 dual operation, $\binom{a}{b}$는 二項係數로서 a or $b<0$일 때는 $\binom{a}{b}=0$, $b=0$, $a\geq0$일 때는 $\binom{a}{b}=1$, Δ를 $0\to\boldsymbol{Z}_p\to\boldsymbol{Z}_{p^2}\to\boldsymbol{Z}_p\to0$에 關한 homology Bockstein operation이라 하면

p가 odd일 때

$$p^n_*Q^{n+s}_{(p)}=\sum_i(-1)^{n+i}\binom{s(p-1)}{n-pi}Q^{s+i}_{(p)}p^i_*$$

$$p^n_*\Delta Q^{n+s}_{(p)}=\sum_i(-1)^{n+i}\binom{s(p-1)-1}{n-pi}\Delta Q^{s+i}_{(p)}p^i_*+\sum_i(-1)^{n+i+1}\binom{s(p-1)-1}{n-pi-1}Q^{s+i}_{(p)}p^i_*\Delta$$

$P=2$일 때

$$S^n_{q*}Q^{n+s}_{(2)}=\sum_i\binom{s}{n-2i}Q^{s+i}_{(2)}Sq^i_*$$

〔證明〕 x_1, $x_2,\cdots$를 $H_*(X:\boldsymbol{Z}_p)$의 標準 basis라 한다. 즉 Δ를 homology Bockstein operation이라 할 때 萬一 $\Delta x_j\neq0$이면 Δx_j도 또 basic element로 된다. $u_1,u_2,\cdots$를 $x_1,x_2,\cdots$의 dual cohomology basis라 한다. P^n_*은 linear map이고 위 basis에 關하여 P^n_k을 matrix 表示한다. 즉

$$a_{j,j}(n)\in\boldsymbol{Z}_p$$

$p^n_*x_i=\sum_j a_{i,j}(n)x_j$, $p^n u_j=\sum_k a_{k,j}(n)u_k$(Duality) d^*p는 homomorphism이므로

$$P(p^n u_j)-\sum_k a_{k,j}(n)pu_k\in\ker\ d^*$$
$$P(\beta p^n u_j)-\sum_k a_{k,j}(n)P\beta u_k\in\ker\ d^*$$

따라서 定理 3의 系에 의하여

$$p^n(w_s\times Pu_j)=\sum_i\binom{\left[\frac{s}{2}\right]+(q-2i)m}{n-pi}W_{s+2(n-pi)(p-1)}\sum_k a_{k,j}(i)Pu_k$$

$$-\mu(q)\varepsilon(s)\sum_i\binom{\left[\frac{s}{2}\right]+(q-2i)m-1}{n-pi-1}w_{s-p+2(n-pi)(p-1)}\sum_k a_{kj}(i)\beta u_k+Z'$$

그런데 $p^n(w_s\times pu_j)$에서의 $W_t\times Pu_k$의 係數를 두가지 경우로 생각한다.

(A) $U_k\notin I_mB$ 이때 係數는 ($q_j=\deg\ u_j$)

$$\binom{\left[\frac{s}{2}\right]+(q_j-2i)m}{n-\mathrm{p}i}a_{k,j}(i)$$

따라서 定理 2의 duality of basis에 의하여 homology group에서

$$p_*^n(e_{c+2n(\mathrm{p}-1)}\otimes_\pi x_k^{\mathrm{p}})=\sum_{i,j}\binom{\left[\frac{s}{2}\right]+(q_j-2i)m}{n-\mathrm{p}_i}a_{k,j}(i)(e_s\otimes_\pi x_j^{\mathrm{p}})$$

단 $c=t-2n(\mathrm{p}-1)$로 둔다. p^n의 degree로 부터 $q_k-q_j=2i(\mathrm{p}-1)$로 두어도 좋다(實際 그렇지 않으면 $a_{kj}(i)=0$) 또 兩邊의 degree를 비교하여 $s=c+2\mathrm{p}i(p-1)$ 따라서 $\left[\frac{s}{2}\right]+(q_j-2i)m=\left[\frac{s}{2}\right]+(q_k-2i\mathrm{p})m=\left[\frac{c}{2}\right]+mq_k$ 따라서

$$p_*^n(e_{c+2n(\mathrm{p}-1)}\otimes_\pi x_k^{\mathrm{p}})=\sum_{i,j}\binom{\left[\frac{c}{2}\right]+q_km}{n-\mathrm{p}i}a_{kj}(i)(e_{c+2i\mathrm{p}(\mathrm{p}-1)}\otimes_\pi x_j^{\mathrm{p}})$$

兩邊에 $(\theta_\pi)_*$를 作用시키면 $Q_i^{(\mathrm{p})}$의 定義와 homomorphism인 것에서 結局

(1) $p_*^nQ^{(\mathrm{p})}_{c+2n(\mathrm{p}-1)}(x_k)=\sum_i\binom{\left[\frac{c}{2}\right]+q_km}{n-\mathrm{p}i}Q^{(\mathrm{p})}_{c+2i\mathrm{p}(\mathrm{p}-1)}p_*^ix_k$를 얻는다.

(B) $u_k=\beta u_l$, 이때 係數는

$$\binom{\left[\frac{s}{2}\right]+(q_j-2i)m}{n-\mathrm{p}i}a_{kj}(i)-\mu(q_j)\varepsilon(s'),\quad \binom{\left[\frac{s'}{2}\right]+(q_j-2i)m-1}{n-\mathrm{p}i-1}a_{l,j}(i)$$

(A)의 경우와 똑같이 duality에 의하여

$$p_*^n(e_{c+2n(\mathrm{p}-1)}\otimes_\pi x_k^{\mathrm{p}})=\sum_{i,j}\binom{\left[\frac{s}{2}\right]+(q_j-2i)m}{n-\mathrm{p}i}a_{k,j}(i)(e_s\otimes_\pi x_j^{\mathrm{p}})$$

$$-\sum_{i,j}\mu(q_i)\varepsilon(s')\binom{\left[\frac{s'}{2}\right]2+(q_i-2i)m-1}{n-\mathrm{p}i-1}a_{l,j}(i)(e_s'\otimes_\pi x_j^{\mathrm{p}})$$

먼저 第一項의 合은 경우 A와 같다. 第二項에 對해서도 p^i의 degree 및 兩邊의 degree의 比較로 부터 $q_k-q_j=2i_{(\mathrm{p}-1)+1}$, $\mathrm{p}q_k+c=\mathrm{p}q_j+s'$ 따라서 $s'=c+\mathrm{p}+2\mathrm{p}i(\mathrm{p}-1)$, $\left[\frac{s'}{2}\right]+(q_j-2i)m-1=\left[\frac{c+1}{2}\right]+q_km-1$ 또 $\mu(q_j)\equiv\mu(q_{k+1})$ (mod p), $\varepsilon(s')=\varepsilon(c+1)$ 최후의 등식은 s'와 c가 서로 다른 偶奇性을 가짐에서 나온다. 以上에서

$$p_*^n(e_{c+2n(\mathrm{p}-1)}\otimes_\pi x_k^{\mathrm{p}})=\sum_{i,j}\binom{\left[\frac{c}{2}+q_{km}\right.}{n-\mathrm{p}i}a_{k,j}(i)(e_{c+2i\mathrm{p}(\mathrm{p}-1)}\otimes_\pi x_j^{\mathrm{p}})$$

$$-\mu(q_{k+1})\varepsilon(c+1)\sum_{i,j}\binom{\left[\frac{c+1}{2}\right]+q_km-1}{n-\mathrm{p}i-1}a_{lj}(i)(e_{c+\mathrm{p}+2i\mathrm{p}(\mathrm{p}-1)}\otimes_\pi x_j^{\mathrm{p}})$$

$u_k=\beta u_e$ 따라서 $x_e=\Delta x_k$에 주의하면

(2) $p_*^nQ^{(\mathrm{p})}_{c+2n(\mathrm{p}-1)}(x_k)=\sum_i\binom{\left[\frac{c}{2}\right]+q_km}{n-\mathrm{p}i}Q^{(\mathrm{p})}_{c+2i\mathrm{p}(\mathrm{p}-1)}p_*^i(x_k)$

$$-\mu(q_{k+1})\varepsilon(c+1)\sum_i\binom{\left[\frac{c+1}{2}\right]+q_km-1}{n-\mathrm{p}i-1}Q^{(\mathrm{p})}_{c+\mathrm{p}+2i\mathrm{p}(\mathrm{p}-1)}p_*^i\Delta x_k$$

한편 $u_k\notin 1_m\beta$(경우 A)이면 $\Delta x_k=0$ 따라서 公式 (1), (2)는 一致한다. 또 그들은 basic element에 對

하여 成立하므로 一般으로도 成立한다. 그리고

$$p^n_* Q^{(p)}_{c+2n(p-1)} x = \sum_i \binom{\left[\frac{c}{2}\right]+qm}{n-pi} Q^{(p)}_{c+2ip(p-1)} p^i_* x$$

$$-\mu(q+1)\varepsilon(c+1)\sum_i \binom{\left[\frac{c+1}{2}\right]+qm-1}{n-pi-1} Q^{(p)}_{c+p+2ip(p-1)} p^i_* \Delta x$$

단 $x \in H_q(X : \boldsymbol{Z}_p)$, X ; H^∞_p-space, $Q^i_{(p)}$의 定義에 따라 公式을 고쳐쓰면 證明됨.

3. 結　論

以上에 論議한 內容을 結果로서 整理하면 다음과 같다. 즉

p^n_*를 p^n의 duall operation이라 하면

$$\langle p_*{}^n x, y\rangle = \langle x, p^n y\rangle,\quad x \in H_*(X : \boldsymbol{Z}_p),\quad y \in H^*(X : \boldsymbol{Z}_p)$$

로서 定義된다. 여기에 $\langle , \rangle$는 kronecher index를 나타낸다. $\binom{a}{b}$를 二項係數로서 다음과 같이 定한다. 즉 a 또는 $b<0$일 때 $\binom{a}{b}=0$, $b=0$, $a \geq 0$일 때 $\binom{a}{b}=1$. Δ를 $0 \to \boldsymbol{Z}_p \to \boldsymbol{Z}_{p^2} \to \boldsymbol{Z}_p \to 0$에 associate한 homology Bochstein operation이라 할 때

$$p^n_* Q^{n+s}_{(p)} = \sum_i (-1)^{n+i} \binom{s(p-1)}{n-pi} Q^{s+i}_{(p)} p^i_*$$

$$p^n_* \Delta Q^{n+s}_{(p)} = \sum_i (-1)^{n+i} \binom{s(p-1)-1}{n-pi} \Delta Q^{s+i}_{(p)} p^i_* + \sum_i (-1)^{n+i+1} \binom{s(p-1)-1}{n-pi-1} Q^{s+i}_{(p)} p^i_* \Delta$$

를 얻는다.

要　約

mod p의 Steenrod algebra A_p는 steenrod reduced powers p^n 및 Bockstein coboundary operation β 에서 algebra로서 生成되었다. 그들 사이의 關係도 알려져 있다. 이 論文에서는 iterated loop space의 A_p-module structure를 決定하는 한 命題인

$$p^n_* Q^{n+s}_{(p)} = \sum_i (-1)^{n+i} \binom{s(p-1)}{n-pi} Q^{s+i}_{(p)} p^i_*$$

$$p^n_* \Delta Q^{n+s}_{(p)} = \sum_i (-1)^{n+i} \binom{s(p-1)-1}{n-pi} \Delta Q^{s+i}_{(p)} p^i_* + \sum_i (-1)^{n+i+1} \binom{s(p-1)-1}{n-pi-1} Q^{s+i}_{(p)} p^i_* \Delta$$

를 證明했다.

Abstract

Steenrod algebra a_p(mod p) was generated for algebra on steenrod reduced powers p^n and Bochstein coboudary operation β. We know the relation between them. In this thesis I have verified the theorem:

$$p^n_* Q^{n+s}_{(p)} = \sum_i (-1)^{n+i} \binom{s(p-1)}{n-pl} Q^{s+i}_{(p)} p^i_*$$

$$p^n_* \Delta Q^{n+s}_{(p)} = \sum_i (-1)^{n+i} \binom{s(p-1)}{n-pi} \Delta Q^{s+i}_{(p)} p^i_* + \sum_i (-1)^{n+i+1} \binom{s(p-1)-1}{n-pi-1} Q^{s+i}_{(p)} p^i_* (\Delta)$$

參 考 文 獻

1. Robert M. Switzer. "*The steenrod Algebra and its dual*" Algebraic Topology-Homotopy and Homology. Springer-Verlag New York 1975.

2. J. Adem, "*The relations on steenrod powers of cohomology, classes*" Algebraic Geometry and Topology, princeton (1957).
3. E. Dyer-R.K. Lashof Homology of iterated loop spaces *Amer. J. of Math.*, 84 (1962).
4. J. Adem, The iteration of the steenrod squares in algebraic topology, *Proc. Nat. Acad. Sci U.S.A* 38 (1952), pp. 720-726.
5. A. Clark On π_3 of finite dimensional H-spaces *Ann. of math.* 78 (1963), pp. 193-196.
6. N.E. Steenrod, Reduced powers of cohomology classes. (a) *Ann. of math.* 56 (1952), pp. 47-67; (b) *paris Lectures* (1951), (Mimeographed)
7. N.E. steenrod, cohomology operations, *Annals of Math. studies*, princeton (1962).
8. B. Eckmann, Cohomology of groups and transfer, *Ann. of Math.*, 58 (1953), pp. 481-493.
9. S. Eilenberg, Homology of spaces with operators, *J. Trans. Amer. Math. Soc.* 61 (1947), pp. 378-417.