韓國數學敎育學會誌<數學敎育>
1984. 6. Vol. XXII, No. 3.

Journal of the Korea Society of Mathematical Education
Jun. 1984. Vol. XXII, No. 3.

ARMA 模型의 母數推定에 관하여

明知實業專門大學 崔 昌 浩

1. 序 論

時系列資料가 定常條件을 만족할 때의 模型

$\phi(B)\tilde{Z}_t=\theta(B)a_t$

단, $\phi(B)=1-\phi_1B-\phi_2B^2-\cdots\cdots-\phi_pB^p$

$\theta(B)=1-\theta_1B-\theta_2B^2-\cdots\cdots-\theta_qB^q$

$\tilde{Z}_t=Z_t-E(Z_t)$

$a_t:E(a_t)=0,\quad \mathrm{Var}(a_t)=\sigma_a^2$

B: 後向演算子 (*Backward shift operator*)

을 $ARMA(p,q)$模型 (*Mixed Autoregressive moving Average Processes*)이라 하며 特히 $\phi(B)\tilde{Z}_t=a_t$

또는 $\tilde{Z}_t=\phi_1\tilde{Z}_{t-1}+\phi_2\tilde{Z}_{t-2}+\cdots\cdots+\phi_p\tilde{Z}_{t-p}+a_t$를 自己相關模型 ($AR(p)$模型 : *Autoregressive Processes*)이라 하고

$\tilde{Z}_t=\theta(B)a_t$

$=(1-\theta_1B-\theta_2B^2-\cdots\cdots-\theta_qB^q)a_t$

를 $MA(q)$模型 (*Moving Average Processes*)이라 한다. 또한 $ARMA(p,q)$ 模型의 理論的인 自己相關函數와 理論的인 偏自己相關函數는 다음표와 같은 性質을 갖고 있음을 알 수 있다.

模 型	自己相關函數	偏自己相關函數
$AR(p)$	*Tails off*	*Cuts off after lag* p
$MA(q)$	*Cuts off after lag* q	*Tails off*
$ARMA(p,q)$	*Tails off*	*Tails off*

여기서는 理論的 自己相關函數와 理論的인 偏自己相關函數의 性質을 利用하여 模型의 位數가 決定된 것으로 보고 決定된 模型의 母數推定을 다루어 보고자 한다.

2. *ARMA*模型의 母數推定

位數가 (p,q)인 *ARMA* 過程에서

$$Z_t+\sum_{j=1}^{p}\phi_jZ_{t-j}=a_t+\sum_{i=1}^{q}\theta_ia_{t-i}\qquad(2\text{-}1)$$

단, a_t는 서로 獨立인 $(0,\sigma_a^2)$의 確率變數

特性 方程式 $m^p+\sum_{j=1}^{p}\phi_jm^{p-j}=0$

$$s^q+\sum_{i=1}^{q}\theta_is^{q-i}=0$$

의 根은 그 絶對値가 1보다 작다. 推定을 爲하여 (2-1)을 函數式形態로 나타내면

$$a_t(Z;\lambda)=Z_t+\sum_{j=1}^{p}\phi_jZ_{t-j}-\sum_{i=1}^{q}\theta_ia_{t-i}(Z;\lambda)\qquad(2\text{-}2)$$

단, $\lambda'=(\phi_1,\phi_2,\cdots\cdots,\phi_p,\theta_1,\theta_2,\cdots\cdots,\theta_q)$

(2-2)의 兩邊을 微分하면

$$-\frac{\partial a_t(Z;\lambda)}{\partial\phi_j}=w\phi_{jt}(Z;\lambda)$$

$$=-Z_{t-j}-\sum_{s=1}^{q}\theta_sw\phi_{j,t-s}(Z;\lambda)$$

$$j=1,2,\ldots,p$$

$$-\frac{\partial a_t(Z;\lambda)}{\partial\theta_i}=w\theta_{it}(Z;\lambda)$$

$$=a_{t-i}(Z;\lambda)-\sum_{s=1}^{q}\theta_sw\theta_{i,t-s}(Z;\lambda)$$

$$i=1,2,\ldots,q$$

初期 推定値 $\tilde{\lambda}$가 주어진다면 修正된 推定値는 다음과 같이 구해진다.

$\hat{\lambda}=\tilde{\lambda}+\Delta\hat{\lambda}$

(단, $\Delta\hat{\lambda}$는 $a_t(Z;\tilde{\lambda})$를 $w\phi_{jt}(Z;\tilde{\lambda})$

$j=1, 2, \cdots\cdots, p$와 $w\theta_{it}(Z;\tilde{\lambda})$ $i=1, 2, \cdots\cdots, q$에 回歸시킴으로써 推定된 回歸係數들의 *vector*). 이와 같이 修正된 推定値를 얻기 위해서는 母數의 初期 推定値를 알아야 하는데 이 初期 推定値는 模型內의 *MA*部分을 *AR*過程으로 逆變換시켜 그 母數를 推定함으로써 얻어지며 이때 逆變換 條件은 다음과 같다.

位數가 1인 *MA*過程

$$Z_t=a_t-\theta_1 a_{t-1}$$
$$=(1-\theta_1 B)a_t$$

은 萬一 $|\theta_1|<1$이면 逆變換이 可能해 진다. 即

$$\pi(B)=(1-\theta_1 B)^{-1}=\sum_{j=0}^{\infty}\theta_j B^j$$

는 수렴하거나 또는 單位圓內에 位置해야하며 또 이는 $1-\theta_1 B=0$의 根 $B=\theta_1^{-1}$가 單位圓밖에 位置함을 뜻한다.

位數가 높은 *MA*過程은 다음과 같이 나타 낼 수 있다.

$$a_t=\theta^{-1}(B)Z$$

여기서 $\theta(B)=\prod_{j=1}^{q}(1-H_j B)$라 하면

$$\pi(B)=\theta^{-1}(B)=\sum_{j=1}^{q}\frac{M_j}{(1-H_j B)}$$

인데 이는 $|H_j|<1$ $j=1, 2, \ldots, q$이면 수렴한다. $\theta(B)=0$의 根이 H_j^{-1}이므로 $MA(q)$過程의 逆變換 條件은 다음의 特性 方程式

$$\theta(B)=1-\theta_1 B-\theta_2 B^2-\cdots\cdots-\theta_q B^q=0$$

의 根이 單位圓밖에 位置하면 만족된다. 以上에서와 같이 逆變換 條件을 만족하는 $MA(q)$過程은 $AR(\infty)$ 過程으로 나타낼 수 있으며 반대로 $AR(p)$過程 또한 $MA(\infty)$過程으로 쓸 수 있다.

지금까지 살펴온 바와 같이 逆變換 條件을 만족하는 *ARMA*過程

$$\sum_{j=0}^{p}\phi_j Z_{t-j}=\sum_{i=0}^{q}\theta_i a_{t-i}$$

은 다음과 같은 無限 *AR*過程으로 나타 낼 수 있다.

$$Z_t=-\sum_{j=1}^{\infty}d_j Z_{t-j}+a_t \tag{2-3}$$

단, $d_1=-\theta_1+\phi_1$

$$d_2=-\theta_1 d_1-\theta_2+\phi_2$$
$$\vdots \qquad \vdots$$
$$d_j=-\sum_{i=1}^{\min(j,q)}\theta_i d_{j-i}+\phi_j \qquad j\leq p$$
$$d_j=-\sum_{i=1}^{\min(j,q)}\theta_i d_{j-i} \qquad j>p$$

따라서 任意의 有限한 점 k에서 잘라 이에서 *AR* 模型의 母數 $(d_1, d_2, \ldots, d_k)$를 推定해 냄으로써 (2-3)을 利用하여 母數의 初期 推定値를 얻을 수 있다.

이 母數의 初期 推定値를 利用하여 修正한 推定値의 計算에 必要한 여러가지 값들을 얻게 되는데 그 過程은 다음과 같다.

순수한 *MA*過程

$$X_t=Z_t+\sum_{j=1}^{p}\phi_j Z_{t-j}$$

는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$X_t=-\sum_{j=1}^{\infty}c_j X_{t-j}+a_t$$

단, $c_j=(\theta_1, \theta_2, \cdots\cdots, \theta_q)$

여기서 c_j數列 (sequence)을 任意의 점 M에서 자르면 θ의 初期 推定値를 利用하여 $c_1, c_2, \ldots, c_M$을 推定할 수 있다.

이 推定値들을 $\tilde{c}_j$로 表記하면 X_t의 外挿値는 다음과 같이 計算된다.

$$\tilde{X}_p=-\sum_{j=1}^{M}\tilde{c}_j(Z_{p+j}+\sum_{i=1}^{p}\tilde{\phi}_i Z_{p+j-i})$$

$$\tilde{X}_{p-s}=-\sum_{j=1}^{s}\tilde{c}_j\tilde{X}_{p+j-s}-\sum_{j=s+1}^{M}\tilde{c}_j(Z_{p+j}+\sum_{i=1}^{p}\tilde{\phi}_i Z_{p+j-i})$$

$$s=1, 2, \cdots\cdots, q-1$$

단, $\tilde{c}_0=1$

$$\tilde{c}_1=-\tilde{\theta}_1$$
$$\tilde{c}_2=-\tilde{\theta}_1\tilde{c}_1-\tilde{\theta}_2$$
$$\vdots \qquad \vdots$$
$$\sum_{i=0}^{q}\tilde{\theta}_i\tilde{c}_{j-i}=0 \qquad j=q, q+1, \cdots\cdots$$
$$\tilde{\theta}_0=1$$

그리고 $\tilde{\phi}_j$와 $\tilde{\theta}_i$는 推定式 (2-3)에서 얻어진다.

따라서 修正된 推定値의 計算에 必要한 $\tilde{a}_t$의 값을 구해보면 이는 다음과 같이 얻어지며

$$\tilde{a}_t = \tilde{X}_t - \sum_{i=1}^{q} \tilde{\theta}_i \tilde{a}_{t-i}$$

$$t = p-q+1,\ p-q+2, \cdots\cdots, p$$

단, $t \le p-q$에 대해 $\tilde{a}_t = 0$

修正된 推定値의 計算에 必要한 그밖의 값들은 다음의 差分 方程式에 依해 구해진다.

$$\tilde{a}_t(Z;\tilde{\lambda}) = \sum_{j=0}^{p} \tilde{\phi}_j Z_{t-j} - \sum_{i=1}^{q} \tilde{\theta}_i a_{t-i}(Z;\tilde{\lambda})$$

$$t = p+1, p+2, \ldots, n$$

$$\begin{cases} w\phi_{jt}(Z;\tilde{\lambda}) = 0 & t \le p \\ w\phi_{jt}(Z;\tilde{\lambda}) = -Z_{t-j} - \sum_{s=1}^{q} \tilde{\theta}_s w\phi_{j,t-s}(Z;\tilde{\lambda}) & \end{cases}$$

$$t = p+1, p+2, \ldots, n$$

$$\begin{cases} w\theta_{it}(Z;\tilde{\lambda}) = 0 & t \le p \\ w\theta_{it}(Z;\tilde{\lambda}) = a_{t-j}(Z;\tilde{\lambda}) - \sum_{s=1}^{q} \tilde{\theta}_s w\theta_{i,t-s}(Z;\tilde{\lambda}) & \end{cases}$$

$$t = p+1, p+2, \ldots, n$$

3. 結 論

以上에서 定常條件을 滿足하는 時系列 模型인 *ARMA*模型의 特性과 母數推定 方法을 提示 하였으나 *ARMA*模型은 母數에 대해 非線型이므로 近似推定으로 밖에 볼 수 없다. 따라서 推定된 母數의 정도를 알아보는 方法과 定常條件을 滿足하지 않는 模型인 *ARIMA*模型의 母數推定까지 擴張하여 봄이 바람직 스럽게 여겨진다.

참 고 문 헌

1. Anderson O.D., *Analysing time series*, North-Holland publishing Company, 1980.
2. Box G.E.P. and G.M. Jenkins., *Time series analysis*, Holden-Day, 1970.
3. Fuller W.A., *Introduction to statistical time series*, John Wiley and Sons, Inc., 1976.
4. Montgomery D.C. and L.A. Johnson., *Forcasting and time series analysis*, McGraw-Hill, 1976.
5. Nelson C.R., *Applied time series analysis*, Holden-Day, 1973.
6. Pindick R.S. and D.L. Rubinfield, *Econometric models and economic forecasts*, McGraw-Hill, 1976.