

Piaget理論의 數學教育에의 適用은 數學的 教育學的 心理學的 誤謬인가?

서울대학교 禹 正 皓

I. 序 論

本論文은 소위 「*the New (Modern) Math*」의 心理學的 認識論의 根據가 Piaget 理論임에 注目하여, R. Thom의 “*Les Mathématiques ‘Modernes’: Une erreur pédagogique et philosophique?*”¹⁾와 比較될 수 있는 H. Freudenthal의 Piaget 批判에 대해 試圖한 筆者의 答辯이다.

R. Thom이 指摘하고 있듯이,²⁾ 소위 「새 數學」은 現代數學의 早期 意識化를 그 主要 目的으로 하고 있으며, 數學의 思考를 支配하는 普遍的 *schemes*의 形成을 위한 數學的 構造의 發見的 指導를 理想으로 하였다. 이러한 「새 數學」의 主要 論據는 現代數學의 根幹이 되는 抽象的인 母構造가 兒童의 行動과 思考樣式 가운데에 內在的인 形態로 存在하며, 따라서 思考發生의 ‘自然스러운’ 메카니즘에 따라서 그를 意識化시킴으로써 數學的 思考의 發達을 容易하게 할 수 있다는 Piaget 理論이다.

그러나, Piaget 理論은 그 독특한 認識論의 立場과 더불어 龐大하고 難解한 陳述 때문에 明確히 把握되기 힘든 탓으로 많은 誤解와 非難, 批判과 論爭을 불러 일으켜 왔다. 이제 數學教育 現代化의 精神, 즉 人間性과의 聯關性을 바탕으로 現代數學을 「教育化」하려고 한 努力이 挫折되고, 보다 나은 方法論을 摸索하지 않을 수 없게 된 現時點에서 批判家들의 論旨를 分析 檢討해 보는 것은 數學教育 現代化의 理念이 否定

되지 않는 한 그 意義가 매우 크다고 본다. 지금까지의 Piaget 理論의 數學教育의 接近과 그에 對한 批判은 斷片的 羅列的인 適用과 그에 대한 非難에 不過하였으며, 실제로 「새 數學」에서의 Piaget 理論의 適用은 貧弱하기 이를 데 없었기 때문에 더우기 그러하다.

Piaget의 有名한 著書 *La genèse du nombre chez l'enfant*의 英譯者인 C. Gattegno의 다음과 같은 Piaget에 대한 批判의 소리는 특히 注目을 끌만하다. “1945년부터 1951년까지 나는 Piaget가 數學教育의 改善을 위해 그 어떤 것을 提供해 주리라고 믿었다. 나는 講演, 翻譯 및 實驗을 통해서 그의 생각을 宣傳하는 데 精力을 쏟았다. … 그의 構想이 얼마나 制限된 것이고 그 自身の 見解와 相衝된 見解를 考慮하는 것을(을 수도 있다는 것을 내밀히 認識하겠지만) 어떻게 拒否하는가를 알았을 때, 數學教育의 必要 때문에, 특히 改善된 觀點이 提案될 수 있을 때 Piaget의 研究를 宣傳하는 것은 도움이 되지 못한다고 決定하지 않을 수 없었다. Piaget의 見解를 뒷받침하기 위하여 사용된 資料를 12年동안 誠實하게 檢査해 본 지금 나는 그의 研究는 數學教育을 위하여 거의 寄與하는 바가 없다고 말할 수 있을 뿐이다. 그의 數 概念은 時代에 뒤진 것이며 너무 圖式的이고 어떤 先驗的 體系 가운데에서만 滿足스러운 뿐이다. 그의 ‘段階’는 實際的인 것이라기 보다도 便宜的인 것이며, 兒童의 學習에 關한 그의 構想가운데 어떤 것은

1) R. Thom, “*Les Mathématiques ‘Modernes’: Une erreur pédagogique et philosophique?*”, *L’Age de la Science*, 3, 1970, pp. 225-236.

2) R. Thom, “*Modern Mathematics: does it exist?*”, A.G. Howson (ed.), *Developments in Mathematical Education*, Cambridge University Press, 1973, pp. 194-209.

보다 適切한 技術이 사용되면 매일 否定될 것이다. 그럼에도 불구하고 오늘날 兒童教育에 從事하고 있는 사람들은 대부분 *Piaget*를 認定하고, 그의 結論을 마치 決定的인 前提처럼 받아들인다. 이러한 狀況은 經驗的 態度보다, 實驗的인 雰圍氣와 不斷한 驚戒心의 消失에 쉽사리 이를 수 있으며, 權威와 所信이란 中世的 準據로 쉽사리 代置되기에 이를 수 있다는 걱정이 되었다. 現實과 一致되지 않는 모든 命題를 拒否할 權利를 保存하기 위하여 사람들은 적어도 내 목소리를 들어야 할 것이다. 그리고 내가 한 때 *Piaget*의 熱誠的인 解說者이었으며, 現實의 壓力으로 그리고 그가 쓴 것에 대한 보다 낯은 理解의 結果로 내 생각을 바꾸었을 뿐임에 注目해야 한다.”³⁾

그러나, *Gattegno*의 *Piaget* 批判은 批判이라기 보다도 非難에 가까운 것이다. *Gattegno*가 *Piaget*를 非難하기 시작한 것은 *G. Cuisenaire*와 알게 되어 그가 創案한 有名한 教具인 *Cuisenaire colour rods*의 開發과 普及에 힘쓰게 된 때부터이며, 그를 뒷받침하기 위하여 學習에서의 *image*의 重要性을 강조하게 되면서부터 임은, 그의 소위 ‘新 이미지 論’⁴⁾ 이 나온 것이 1952年이라는 事實을 통해서도 엿볼 수 있다. *Piaget*는 *Cuisenaire rods*가 지극히 서로 다른 解釋과 適用을 일으킬 수 있다고 하면서, 思考의 操作的 側面(行動, 操作)보다 思考의 形象的 側面(知覺, 模倣, 이미지)을 우선시킬 危險이 있지만 活動的이고 操作的인 方法으로 사용되면 數와 計算 指導를 위해 뛰어난 教具임을 認定하고 있다는 點⁵⁾과, *Gattegno*가 말하고 있는 이미지는 活動性을 前提로 한 것임을 생각하면, 더구나 *Gattegno*의 非難은

그 以上 그 어떤 具體的인 論據를 提示하지 못하고 있을 뿐만 아니라, 그의 活動主義的인 數學教育論⁶⁾은 *Piaget*의 그늘을 벗어나고 있지 못하다는 點을 생각하면, *Piaget*라고 하는 思想的 鑛脈의 위대함을 새삼 느끼게 된다.

Piaget 理論의 커다란 教育的 意味는 참된 理解의 意味와 그것을 保證하는 思考心理學的 條件을 明確히 한 點이다. 즉 數學教育에서 目標로 하고 있는 數學的 思考의 特性은 操作的 *schemes*이란 本性을 갖는다고 하는 것이며, 이는 行動의 調整과 內面化의 產物이므로 活動 없이는 形成되지 않는다고 하는 것이다. *Piaget*는 이러한 理由에서 活動的인 數學教授法을 強調하고 있으며,⁷⁾ *B. Inhelder* 女史는 이러한 活動的 教授法을 ‘自主的 行動과 操作的 教授學’이라고 이름 붙이고 있다.⁸⁾

그런데, 오늘날 數學教育界에서 *Piaget*를 問題 삼고 그를 非難, 批判하고 있는 學者들의 대부분이 活動主義的 立場에서 있으며, 發生的 原理를 論하고 있음은 매우 興味로운 일이다. 이는 現代 數學教育에 있어서 *Piaget* 理論의 影響이 至大함을 逆說의으로 말해주고 있는 것이다. 그러나, 數學教育的 側面에서 *Piaget*라고 하는 偉大한 思想的 鑛脈을 보다 徹底하게 發掘하려면 *Piaget*와 같은 活動主義를 옹호하면서도 그를 批判하고 있는 學者들의 論點에 귀를 기울이고 그를 批判的으로 明確히 分析 提示하지 않으면 안될 것이다.

“思考는 精神的으로 繼續되는 行動일 뿐이다”⁹⁾라고 하여, *Piaget*가 主張하고 있는 思考의 操作的 性格을 받아들이고, 그를 바탕으로 하여 活動主義的인 數學教育論을 展開하고 있으면서,

3) C. Gattegno, For the Teaching of Mathematics, Vol. one, Educational Explorers Limited, 1963, pp. 2-3.

4) C. Gattegno, Introduction à la psychologie de l'affectivité et à l'éducation à l'amour, Delachaux et Niestlé, 1952, pp. 113-126.

5) J. Piaget, Psychologie et Pedagogie, Denoël/Gonthier, D. Coltman (trans.), Science of Education and the Psychology of the Child, 1971, p. 49.

6) C. Gattegno, What We Owe Children, Routledge & Kegan Paul, 1970.

7) J. Piaget, "Comments on mathematical education", A.G. Howson (ed.), op. cit., pp. 79-87.

8) B. Inhelder, "Ein Beitrag der Entwicklungspsychologie zum mathematischen Unterricht", Drenkhan (hrsg.), Der Mathematische Unterricht für die sechs bis funfzehnjarige Jugend in der Bunderrepublik Deutschland, Vanderhoeck & Ruprecht, 1958, S. 87~100.

9) H. Freudenthal, Mathematics as an Educational Task, D.Reidel Publishing Company, 1973, p. 111.

具體的인 論據를 提示하면서 Piaget 理論 및 그 數學教育에의 適用을 辛辣히 批判하고 있는 代表的인 數學教育學者가 H. Freudenthal이다. Freudenthal의 批判은 Piaget 自身이 擧論하고 있을 程度이다.¹⁰⁾

Freudenthal은 Piaget란 이름의 誤用이 教授學의 文獻에서 事實上의 한 習慣이 되어 있다¹¹⁾고 하면서 Piaget의 實驗과 解釋 가운데의 수 많은 誤謬를 들추어 내는 데 가장 適切한 位置에 있는 사람이 數學者라고 主張한다. “教授學者들과 教科書의 著者들이 Piaget의 이름을 그들의 研究에 대한 神聖한 기름뿌리기로 잘 못 사용한 것은 Piaget의 잘못이 아니다. 그러나 한편 지금까지 Piaget의 研究에 反對하는 批判을 충분히 소리 높여 하지 못한 것은 대체로 數學者들의 辨明의 餘地가 없는 잘못이다. Piaget는 그들의 批判으로부터 배울 수 있었을 것이며 아마도 그러기를 바라기까지 했을 것이다. 그러한 批判은 적어도 Piaget의 研究의 진정한 價値를 명확히 하는 데 貢獻하였을 것이다.”¹²⁾

J.H. Flavell도 指摘하고 있듯이¹³⁾, Piaget의 學說은 그것을 읽는 사람이면 누구에게든 批判的인 反發을 일으키든가 表面的인 缺點에 눈이 끌리어 그에 執着하게 만드는 特異성을 갖고 있으며, 따라서 Piaget 理論은 성급히 처리해 버리려는 일종의 惡意에 左右되기 쉬운 것인지도 모른다. Freudenthal은 “그가 偶然히 알게 된 數學體系의 起源을 發達心理學에서 追求하는 것이 Piaget의 思考方式 가운데 하나이었다.”¹⁴⁾라고 主張할 程度로 Piaget를 罵倒한다. Piaget 理論의 數學教育에의 진정한 貢獻과 그 價値와 有用성을 明確히 부각시키기 위해서는 諸學者의 批判을 充分히 考察해 볼 必要가 있다. 本稿는 Piaget 理論에 根據한 數學教育論의 構成을 위

한 理論的 基礎의 問題를 追求하는 一環으로, H. Freudenthal이 提起한 批判의 要旨가 數學教育에의 Piaget 理論의 適用과 關聯된 核心的인 問題임에 비추어 그를 明確히 分析 批判함으로써 Piaget理論의 數學教育에의 示唆點을 보다 明確히 하려는 것이다.

II. 現象學的 接近의 問題

Freudenthal은 教授-學習過程을 冷靜하게 觀察하여 그 本質을 追求하는 것만이 數學教育學을 構築하기 위한 出發點이 될 수 있다고 보고 소위 教授學的 現象學(*didaktische Phänomenologie*)을 提起하고 있다.¹⁵⁾ 教授學的 現象學的의 키워드는 「現象」과 「本質」이다. 여기서 本質이란 數學的 概念, 數學的 構造등 數學의 研究對象을 말한다. 人間은 幾何學的 圖形에 의해서 形이란 現象의 世界에 秩序를 創造하며, 數에 의해서 量의 世界에 秩序를 創造한다. 보다 높은 水準에서 人間은 幾何學的 作圖와 證明에 의해서 幾何學的 圖形이란 現象에 秩序를 創造한다. 人間은 十進法에 의해 自然數란 現象에 秩序를 創造한다. 나아가 廣範한 抽象化에 의해서 서로 많은 數學的 現象이 群, 體, 位相空間등의 概念으로 把握된다. 이와같이 하여 人間은 數學을 發展시켜 간다는 것이다. 여기서 注目할 것은 本質과 現象과의 關係가 絕對的인 關係에 있는 것이 아니라 相對的인 關係에 있다는 것, 즉 어떤 水準에서 本質이었던 것이 그보다 高次의 水準에서는 現象으로 把握된다는 點이다. Freudenthal은 다음과 같이 말하고 있다.

“數學的 概念, 數學的 構造, 數學的 觀念의 現象學이란 用語를 나는 다음과 같은 意味로 사용하고 있다. 즉, 本質을, 이는 現象의 整理手段이지만, 現象과의 關係에서 記述하는 것, 本

10) J. Piaget, “Comments on mathematical education”, op. cit.

11) H. Freudenthal, 1973, op. cit., p. VI.

12) ibid., p. 662.

13) J.H. Flavell, The Developmental Psychology of Jean Piaget, Van Nostrand Reinhold Company, 1963, p. 405.

14) H. Freudenthal, 1973, op. cit., p. 193.

15) H. Freudenthal, “Didaktische Phänomenologie mathematischer Grundbegriffe”, Der Mathematikunterricht, Heft 3, 1977, S. 46~73.

質이 어떤 現象에 대해서 整理手段으로써 作用하는가를 陳述하는 것, 그리고 本質은 어떤 現象에 대해서 그러한 整理手段으로써 應用될 수 있는가에 대하여, 또한 이리 저리한 現象에 대해서 本質은 어떤 힘을 우리에게 주는가에 대하여 陳述하는 것이다. 本質과 現象 사이의 이러한 關聯性 가운데에서 教授學的 要素를 強調할 때, 즉 이러한 關係가 教授-學習 過程에서 어떻게 獲得되며 사용되어지는가에 대하여 注目할 때, 나는 이러한 本質의 教授學的 現象學에 대하여 말하고 있는 것이다. '教授-學習 過程'을 '認知發達'로 代置하면 發生的 現象學이 될 것이며, '教授-學習 過程에서...되다'를 '歷史에서...되었다'로 代置하면 歷史的 現象學이 될 것이다.¹⁶⁾

그런데 *Piaget*의 研究는 現象學의 方法을 擇하고 있으면서도 이미 한 偏見에 사로잡혀 있는 誤謬를 犯하고 있다는 것이 *Freudenthal*의 *Piaget* 批判의 主要한 要旨의 하나이다. *Piaget*는 어린 兒童들은 그들 自身이 실제로 行動을 遂行하지 않으면 가장 간단한 行動이라도 그러한 行動의 結果를 想像하는 데 이르지 못한다는 基本的이며 重要한 原理를 立證하려는 思考實驗에 너무 執着한 나머지, 兒童에게 誤謬를 誘發시키고, 意圖된 대로 遂行될 수 없는 實驗을 兒童들에게 實施하는 잘못을 犯하고 있다고 *Freudenthal*은 批判한다.¹⁷⁾ 또한 *Freudenthal*은, 대부분의 *Piaget*의 實驗에서는, 兒童들이 局所의 觀點에 注目하는 狀況임에도 不拘하고 어린 兒童들은 全體的인 觀點에 마음이 기운다는 先入見 때문에 잘못된 判斷에 이르고 있다고 批判한다.¹⁸⁾

兒童의 數學的 概念의 發達에 대한 *Piaget*의 理論은 兒童의 行動으로부터 이끌어내진 것이 아니고, 어른인 *Piaget* 自身の 獨特한 先入觀念을 正當化하기 위해 考案된 質問-對答 게임의 結果에 不過하며,¹⁹⁾ 이를 무엇보다도 잘 보여주고 있는 것이 兒童의 自然數 概念 發達에 관한

實驗이라고 主張한다. *Freudenthal*은, 保存概念을 形式化한 것은 *Piaget*의 業績이지만, 兒童의 活動을 注意 깊게 觀察하면 1對1 對應에 의한 不變性, 時間 經過에 의한 不變性, 位置 變更에 의한 不變性, 가르고 原狀復舊하는 變換에 의한 不變性등이 있음에도 不拘하고, *Piaget*가 1對1 對應에 의한 不變性만을 問題視하고 있는 것은 數學者가 對等한 集合의 集合으로써 基數를 定義하는 것을 염두에 두고서 現象과 本質의 關係를 記述하고 있다고 보지 않을 수 없다고 *Piaget*를 批判하고 있는 것이다.²⁰⁾

또한 *Piaget*는 自身の 先入觀念을 立證하기 위해서 考案된 實驗에서 보인 兒童의 反應을 *Piaget* 自身の 獨特한 생각에 바탕을 두고 解釋을 하고 있는 바, 그 代表的인 것이 길이 保存에 대한 認識이 '可逆性'의 發達の 結果라고 보고 있는 點이라고 *Freudenthal*은 批判한다.²¹⁾ 예를 들어, 길이가 같은 두 개의 실을 兒童에게 보여 주면서 그 가운데 하나를 螺旋 모양으로 꼬아 놓은 다음 양쪽의 길이가 같은지 어떤지 質問한다고 할 때, '실을 팽팽히 당기면 다시 以前과 같이 될 것이므로 같다'는 대답을 한 兒童은 變換을 머릿속에서 되돌릴 수 있으므로, 곧 可逆的 思考가 可能하므로 길이의 保存을 認識하는 것으로 解釋한다면, '두번 께 것은 첫번 께 것을 꼬으면 얻어지므로 길이가 같다'라고 대답한 兒童은 可逆性이 缺如되어 있으므로 非保存者라고 볼 것인가라는 疑問이 提起될 수 있다는 것이다. 保存의 認識은 可逆性의 發達로부터 생긴다고 보는 것은 *Piaget* 自身の 解釋이며 兒童이 그러한 根據로부터 判斷했다고 보기는 어렵다는 主張이다.

數學的 概念 發達에 대한 *Piaget*의 研究는 自身の 獨特한 認識論的 立場, 즉 發生的인 構造主義의 立場을 취하고 있는 소위 '操作法 構成主義'를 定立하기 위한 것이었으며, 이는

16) *ibid.*, S. 61~62.

17) H. Freudenthal, 1973, *op. cit.*, pp. 676-677.

18) H. Freudenthal, Weeding and Sowing, D, Reidel Publishing Company, 1978. pp. 253-254.

19) H. Freudenthal, 1973, *op. cit.*, p. 669.

20) H. Freudenthal, 1977, *op. cit.*

21) *ibid.*

Piaget의 哲學的 思索으로부터 비롯된 것임은 말할 必要도 없다. Freudenthal 自身도 自己의 數學觀, 數學教育觀이 直觀主義 數學者인 L.E. J. Brower와 教育心理學者인 O. Decroly의 影響을 받은 바 크다는 點을 告白하고 있으며, 數學教育에 관한 自身의 생각이 이를 바탕으로 形成된 自身의 哲學에 立脚하고 있음을 明確히 言及하고 있다.²²⁾

그렇다면, Flavell도 指摘하고 있듯이,²³⁾ Piaget가 自身이 關心을 가지고 있는 特定 種類의 發生的 疑問에 答하기 위하여 自身의 諸 研究를 計劃하였으며 自身의 생각을 立證하는 方向으로 資料를 分析하였다는 事實 自體는 非難의 對象이 되지 못한다. 왜냐하면 Piaget 自身이 풀고 있지도 않았던 疑問에 對答하려고 하지 않았다고 하여 그리고 自身의 觀點과 다른 觀點에 따라 解釋하지 않았다고 하여 그를 非難하는 것은 妥當하지 못하기 때문이다.

Piaget의 數學認識論은 數學的 思考의 心理 發生的 根源은 行動이며, 數學의 心理的 發生 順序는 數學의 歷史 發生的 逆順이며 現代 數學의 論理的 構成 順序와 一致되고 있다는 假定 아래, 말하자면 心的 考古學으로써의 數學의 發達像을 指示하고 이를 立證하기 위한 여러가지 實驗 結果를 提示해 왔다.²⁴⁾ 이것을 한 偏見에 사로잡혀 있는 誤謬라고 規定짓는 것은 오히려 Piaget 理論에 대한 잘못된 先入見이라고 밖에 보기 어렵다. Freudenthal이 指摘하고 있는 可逆性이란 概念도 論理的 操作的 全貌를 나타내는 Piaget의 소위 均衡理論의 中心的인 아이디어으로써 Piaget의 오랜 思索과 兒童의 思考 發達에 대한 研究의 所産인 바, 이를 간단히 否定해 버리려 한 Freudenthal의 非難은 그의 心理學的 素養의 不足의 所致로 밖에 볼 수 없다.

Freudenthal은 그러면 自身의 教授學的 現象學

의 判斷 資料를 어디에서 求하고 있는가. 그는 다음과 같이 記述하고 있다. “나는 數學, 數學의 應用 및 數學의 歷史에 대한 나의 知識에 依存한다. 나는 數學的 概念이 어떻게 成立되며 成立될 수 있는지 알고 있다. 教師用 圖書의 分析을 통하여 教授學者의 觀點에서 이러한 概念이 學習하는 가운데 어떻게 形成될 수 있는지 보다 잘 알게 된다. 마지막으로, 學習過程에 대한 觀察로부터 數學的 對象의 實際의 構成과 數學的 概念의 獲得에 대해 여러가지를 알게 된다.”²⁵⁾ Freudenthal의 論旨는 數學教育에서 現象의 本質을 看破하기 위해서는 自身과 같은 豊富한 數學的 素養이 絶對的으로 要求되는 바, 따라서 數學的 知識이 不足한 Piaget는 그가 接한 斷片的인 現代 數學的 知識을 바탕으로, 그 心理 發生的 起源을 追求할 수 밖에 없으며 그 代表的인 것이 自然數 概念發生에서의 保存에 대한 偏狹한 解釋으로 나타나고 있다는 것이다. 이 問題는 앞에서 言及한 Piaget의 發生的 數學認識論의 基本立場이 現代數學의 心理發生的 起源을 追求하고 있다는 點과, 그러기 위해서는 數學的 素養이 絶對的으로 要求된다는 點을 생각하면, 그리고 E.W. Beth와 함께 論理學 및 數學의 實體와 그 歷史的 心理的 形成 發達에 대해 論한 勞作인 『Épistemologie mathématique et psychologie』(1961)의 水準을 생각하면 그 解答이 提示될 것이다.

Ⅲ. 實驗에서의 言語的 問題

Piaget 理論에 대한 非難 가운데 가장 두드러진 것이 그의 臨床實驗에서의 言語的 問題에 대한 것이다.²⁶⁾ Piaget의 研究의 대부분이 兒童의 用語에 대한 理解 程度를 여러가지 方法으로 調査하고 있는데 不過한, 말하자면 語彙增加에 대한 變裝된 研究에 지나지 않으며, 어린 兒童이

22) H. Freudenthal, 1973, op. cit., p. IX.

23) J.H. Flavell, op. cit., p. 430.

24) E.W. Beth et J. Piaget, Épistemologie mathématique et psychologie, Presses Universitaires de France, 1961.

25) H. Freudenthal, 1977, op. cit.,

26) J.H. Flavell, op. cit., pp. 434-437.

여러가지 語彙를 不完全하고 不充分하게 밖에 理解하고 있지 못한 것은 當然하며 成長함에 따라 成人의 水準에 漸次 接近해 간다는 點을 생각할 때 Piaget의 研究는 그 價値가 매우 낮은 것이라는 非難이요, 語彙의 變化가 認知 構造의 質的 變化가 일어난 것을 反映한다고 假定할 어떤 根據도 없다는 主張이다.

Freudenthal의 Piaget 批判은 實驗에서 사용된 言語의 理解 問題에 集中되어 있는 바, “거기서 實際로 調査되고 있는 것은 問題가 되고 있는 觀念에 대한 發達이 아니라 意思疏通 能力이다.”²⁷⁾ “그의 實驗의 對象兒童에게는 數學의 課題가 맡겨져 있으나, ... 調査의 對象은 課題의 數學的 內容이라기 보다는도 言語이다. 그렇지 않다면, 實驗者는 어떤 數學問題에 대한 兒童의 反應을 檢査하기 보다는도 兒童이 問題가 提起하는 不適切한 混亂을 어떻게 애써 解決하는지를 檢査하거나, 誤導된 提案으로 兒童을 속일 수 있는지 어떤지를 檢査하고 있다.”²⁸⁾고 까지 酷評하고 있다.

Freudenthal이 提示하고 있는 例는 다음과 같다. 우선 量의 保存實驗에서 容器의 個數나 液體의 높이가 아닌 量 自體를 問題視하고 있다는 點이 被檢兒에게 明確히 傳達되지 않았다. 佛語의 ‘y en a-t-il plus?’는 ‘Is this more?’와 ‘are there more?’를 함께 表現하는 말이며, 어린 兒童들은 plus, moins과 beaucoup, peu란 語彙를 明確히 區分할 수 없고, ‘c’est la même chose?’는 모양·個數·量 가운데 어느 것을 묻고 있는 지가 不分明한 表現이다. 더구나 包含關係에 관한 實驗 가운데 나오는 ‘are all the round ones blue?’, ‘are all the blue ones round?’, ‘are the blue ones all round ones?’, ‘are the round ones all blue ones?’와 같은 質問은 成人에게도 어렵게 느껴지며, 어린 兒童들은 文章가운데 나오는 all은 그

位置에 따라 意味가 決定된다는 것을 알지 못한다. 또한 包含關係에 관한 實驗에 나오는 質問은, 包含關係와 서로 素가 아닌 두 集合의 比較를 동시에 內包하고 있는 바, 이는 ‘꼬리가 개보다 길다’ ‘사람과 짐둥이’와 같이 日常言語에서 弄談 아니면 찾아보기 어려운 表現으로 言語的 誤解를 일으키지 않을 수 없는 質問이다. 따라서 實際로 調査된 것은 包含關係의 理解도가 아니라, 言語能力이거나 어른의 不正確한 表現에 대한 兒童의 對處能力이며, 實驗者는 잘 못된 構文을 가지고 兒童들을 속인 데 不過하다고 Freudenthal은 批判하고 있는 것이다.²⁹⁾

Piaget는 이 問題에 대하여 다음과 같이 記述하고 있다. “우리는 保存 觀念의 缺如를, 質問이 全體 量에 대해 言及되고 있음을 理解하는데 失敗한 때문이라고 說明할 수 있을 것인가? 兒童은 液體의 全體 量을 考慮하지 않고 단지 液體의 水準이나 容器의 폭을 서로 比較할 수도 있을 것이다. 그러나 그것이 그 兒童이 全體 量을 考慮할 수 없다는 것을 반드시 立證하는 것은 아닐 것이다. 그렇다고 하여도 全體 量의 觀念이 나타나자마자 兒童은 곧바로 保存을 發見할 것이다.”³⁰⁾ “誤謬는 사용된 用語의 理解의 缺乏 때문에 생긴다고 主張할 수도 있다. 한 쪽을 모아 놓을 때 병이나 유리컵의 數는 不變임을 認識하면서 ‘저쪽이 더 많다’고 말하는 것은 集合의 모양이 變하였으므로 그것이 占有하고 있는 空間이 더 크다는 생각을 나타내고 있을 뿐인 경우는 없는가? 우리가 매우 多樣한 例와 狀況을 提示하려는 것은 정확히 말해 이러한 可能性 때문이며 言語的 誤解가 없으리라는 保障을 하기가 어렵기 때문이다.”³¹⁾ Freudenthal은 이에 대하여 誤謬를 包含하는 많은 觀察 結果를 平均한다고 하여 眞理에 接近할 수는 없다고 主張한다.³²⁾

27) H. Freudenthal, 1973, op. cit., p. 671.

28) ibid., p. 120.

29) ibid., pp. 671-675.

30) J. Piaget, The Child's Conception of Number, Routledge & Kegan Paul Ltd., 1952, p. 14.

31) ibid. p. 46.

32) H. Freudenthal, 1973, op. cit., p. 670.

Piaget가 兒童의 數 概念 發達에 關한 研究에서 立證하고자 한 것은 “數의 構成은 論理的 發達과 並行하며 數 以前 時期는 論理 以前 水準과 對應한다”³³⁾는 假說이다. 다시 말하면, 數 概念은 操作的 可逆性的 發達로 全體를 分解하고 그 關係를 調整할 수 있게 될 때 發達하며, 그 以前 段階에서는 그 때 그 때 當面하는 知覺的 形象의 特性에 따라 左右되는, 單一次元的인 知覺의 中心化에 의한 量的인 判斷을 한다는 것이다. 言語에 對한 理解와 使用能力은 內在的인 認知構造와 無關한 것은 아니지만 그 反映이라고 볼 수는 없다는 立場을 Piaget가 취하고 있음은 言語 理解와 關聯된 批判의 問題를 생각함에 있어서 한가지 解答을 提示해 준다. Piaget는 일찌기 思考가 직접 言語에 反映된다고 생각하고 兒童의 言語的 表現 가운데에서 그 認知發達의 意味를 判讀하려고 한 研究 結果를 發表하였다. Piaget의 最初의 心理學 關係의 著書인 「*Le langage et la pensée chez l'enfant*」(1923)와 「*Le jugement et le raisonnement chez l'enfant*」(1924)는 兒童의 言語를 分析하여 兒童의 論理를 論한 것이었다. 이들 研究는 Piaget의 學問的 生涯에서 매우 重大한 意味를 갖는 研究이나 젊은 時節의 準備的인 性格의 研究이다. 兒童의 數概念 發達에 關한 研究는, Piaget가 思考의 根源은 行爲이며 言語에는 思考가 直接 反映되지 않으므로 知的 操作的 發生을 把握하려면 兒童이 事物을 어떻게 다루는가를 알아보지 않으면 안된다는 立場을 明確히 한 以後의 것이다. Piaget의 實驗에서의 言語의 理解와 關聯된 Freudenthal의 非難은, Piaget의 臨床的 方法이 提示된 課題에 대한 兒童의 反應을 觀察 分析하여 行動樣式을 밝혀냄으로써 兒童의 認知構造에 대한 洞察을 얻고자 함에 그 目的이 있다는 點을 看過한, Piaget 理論에 대한 不信의 所致로 돌릴 수 밖에 없다.

Piaget는 論理·數學的 概念은 操作體系이며

이는 行動의 一般的 調整과 內面化에 의해서 兒童 自身이 構成해 간다고 하는 소위 操作的 構成主義를 主張하고 있다. Freudenthal이 問題視하고 있는 類의 包含關係操作的 發達을 調查하기 위한 實驗 自體가 그러한 立場에서 論理 操作的 發達에 言語가 重要한 要因이기는 하지만 本質的인 要因은 아니라는 것, 즉 類의 包含關係 操作이 內面化된 可逆的 行動이며 單純한 言語的 能力의 問題가 아니라는 것을 發生的으로 立證하기 위한 것이었다. Piaget는 類의 包含關係 操作($A \cup A' = B$, $A = B - A'$, $A \subset B$)의 本質的인 特性을 全體의 保存과 全體와 部分의 量的인 比較라고 보고 있으며, 그러한 操作的 發達을 調查하기 위해, Piaget 自身の 말대로, 全體의 保存 및 全體와 部分의 量的인 比較를 포함하는 巧妙한 問題로써 애써 考案한 것이 이 課題인 것이다.³⁴⁾ 이 課題는 論理的 操作的 全貌를 나타내는 가장 重要한 概念이 可逆性이라는 Piaget 理論의 中心的인 아이디어를 立證하기 위한 것으로 그 意味가 매우 큰 것이다.

또한 量이나 數의 保存에는 ‘같은 만큼’과 같은 그와 關聯된 最少限의 表現에 대한 理解를 前提로 한다는 것은 否定할 수 없는 事實이며, 그러한 表現을 理解할 수 없는 兒童은 現象을 整理하는 手段인 本質 즉 量概念이나 數概念이 缺如되어 있다고 보는 것이 妥當할 것이다. 더구나, ‘*c'est encore la même chose?*’란 質問이 모양·個數·量 가운데 어느 것이 같으냐는 것을 묻고 있는지가 明確하지 않다고 하더라도 그것을 兒童에게 說明하려고 한다면 Freudenthal의 指摘대로 對答을 알려주는 結果가 될 것이 아닌가?

IV. 數學認識論의 問題

Freudenthal의 Piaget 理論에 對한 不信感이 어느 程度이며, 그가 Piaget의 理論을 어떻게 評價하고 있는가를 무엇보다도 잘 나타내주는 것

33) J. Piaget, 1953, op. cit., p. VIII.

34) J. Piaget, “La genèse du nombre chez l'enfant”, *Initiation au Calcul, Cahiers de pédagogie moderne*, Éditions Bourrelier, 1953, pp. 5-20.

35) H. Freudenthal, 1973, op. cit., p. 672.

이 “그의 數學은 *Piaget*로부터 由來하였으며 그의 發達心理學은 *Bourbaki*로부터 由來하였다”³⁶⁾는 表現이다. 이 말은 “그가 우연히 알게 된 數學體系의 起源을 發達心理學에서 追求하는 것이 *Piaget*의 思考方式 가운데 하나이었다”³⁷⁾는 程度가 아니라, 다음과 같은 表現에서 明確히 드러나듯이, *Piaget*의 數學的 素養과 그의 認識論 나아가 그의 學問的 態度에 대한 더할 수 없는 不信의 表現이다. “數學을 組織化하는 가장 불만한 例는 물론 *Bourbaki*이다. 數學에 대한 이러한 組織化는 얼마나 說得力이 있는가! 얼마나 說得力이 있으면 *Piaget*가 發達心理學에서 *Bourbaki* 體系를 再發見할 수 있었을까? 가련한 *Piaget*! 그는 非 *Euclid* 幾何學이 發見되었을 때 ‘純粹直觀’으로 *Euclid* 空間을 가가스로 神聖化한 *Kant*보다 더 훌륭히 해내지 못하였다! *Piaget*는 數學者가 아니므로 數學體系의 建設者가 얼마나 信賴할 수 없는가를 알 수 없었을 것이다. *Bourbaki*의 數學體系는 카테고리의 重要性이 發見되었을 때 아직 完成되지 않았다. 카테고리는 새로운 組織原理이나 카테고리 스타일로 *Bourbaki* 構造의 再建設은 完全히 이루어질 수는 없을 것이다. 그런데 어떤 指導者級의 發達心理學者가 모든 數學的 概念의 發生을 카테고리화하는 것을 우리들에게 確信시킬 수 있다고 하여도 — 結果적으로 確實히 일어날 것이다. — 바로 조만간 카테고리 스타일의 數學이, 準備가 갖춰지기 以前에, 어떤 새로운 原理 쪽으로 넘어짐을 보게 될 것이며 그 새로운 原理가 繁榮할 것이다. 數學은 결코 完成되지 않는다. — 數學의 어떤 體系를 崇拜하는 사람은 이 忠告에 留意하지 않으면 안된다.”³⁸⁾

또한, *Freudenthal*은 *Piaget*의 數學에 대한 總體的인 態度를 規定한다고 하여, 「*La représen-*

tation de l'espace chez l'enfant」 가운데에 나오는 兒童의 *Euclid* 空間을 構成하는 8가지의 下位論理的 操作의 群性體에 관한 部分을 그대로 引用하면서 이를 擬似數學(*pseudo-mathematics*)이라고 評한다.³⁹⁾ 그리고 *Piaget*는 圖形的 移動과 平面의 變換을 混同하여 變換群을 바르게 理解하고 있지 못하며 그러한 影響이 學校數學에까지 미치고 있다고 *Freudenthal*은 非難한다.⁴⁰⁾

그뿐만 아니라, *Piaget*는 數學的 用語를 빌려 數學에서와 전연 다른 意味로 사용하는 習慣을 가지고 있다고 *Freudenthal*은 非難한다.⁴¹⁾ *Piaget*는 位相的, 射影的, *Euclid*의 方法·空間, 基數, 順序數, 寫像, 變換群등의 意味를 잘 못 理解하고 있으며, 이들 用語를 數學的인 意味와 동떨어진 막연한 意味로 사용하고 있을 뿐만 아니라, 원기둥의 밑면의 지름이 ㅁ으로 되고 높이가 두 배로 되면 부피가 변하지 않는다고 보고 있는 것과 같은 수많은 誤謬를 犯하고 있다는 것이다. 따라서 教育學者들이나 數學教科書의 著者인 數學者들이 *Piaget*가 생각하고 있는 觀念이 數學的인 것과 一致하지 않는다는 것을 알지 못하고 *Piaget*의 研究를 잘 못 適用하면 그 責任은 나누어져야 한다고 *Freudenthal*은 主張한다.

*Piaget*의 數學認識論은 反映的 抽象化에 의한 소위 心的 考古學으로서의 數學의 發達 像을 提示하고 있는 바,⁴²⁾ 이는 그의 青年時代의 生物學的 研究와 깊은 哲學的 思惟의 結果로부터 얻은 確信에 대한 學問的 追求의 結果라고 말할 수 있다. 그는 數學의 歷史發生과 個人에 있어서의 數學의 心理的 發生과의 逆平行性을 基本假說로 한 소위 科學的 認識論을 建設하고자 試圖해 왔다.⁴³⁾ 이러한 그의 學問的인 基本立場은 現代數學의 心理發生的 起源을 追求하는, 말하자면 心的 考古學의 形態를 取하지 않을 수 없

36) *ibid.* p. 170.

37) *ibid.*, p. 193.

38) *ibid.*, pp. 46-47.

39) *ibid.*, pp. 663-669.

40) *ibid.*, pp. 495-496.

41) *ibid.*, pp. 662-663.

42) E.W. Beth et J. Piaget, *op. cit.*, pp. 200-204.

43) J. Piaget, 芳賀純譯, J. 피아제 發生的 認識論. 評論社, 1972, p. 17.

게 된다. Piaget는 行動이나 思考 樣式의 反省(分析)의 順序는 그 構成(發生)의 順序의 逆이라고 하는 아리스토텔레스의 思考方式을 根據로, 보다 一般의인 行動 및 思考 樣式의 意識의 水準에서의 再構成에로 向하는 心的 考古學으로서의 數學의 心理 發生論을 提示하고 있는 것이다. 이러한 생각을 立證하기 위하여 그는 Bourbaki의 母構造와 群性體 사이의 對應關係를 主張하고 前操作期의 兒童의 論理가 카테고리와 對應된다는 것을 보이려 하고 있는 것이다. 行動이나 操作의 schèmes은 보다 基本的이고 一般의인 것일수록 無意識 가운데 보다 깊이 묻혀 있어 意識의 數學的 思考面에 反映하기는 어려울 것이다. Piaget는 感覺-運動水準의 行動 schèmes에 나타나는 群構造가 19世紀末에야 形式화된 사실과 Cantor가 1對1 對應 操作에 根據하여 集合論을 建設한 것을 反映의 抽象化에 의한 數學의 構成의 顯著한 例로 들고 있다. Piaget에 따르면 1對1 對應操作은 具體의 操作段階에서 構成되는 基本的 操作이다. 그러나 그 操作의 樣式을 意識의 反省하여 數學的 意味를 부여하여 現代數學의 發達의 한 決定的 契機를 이룩한 것은 19世紀末이었다.

Piaget가 Bourbaki의 構造主義의 絶對的 權威를 信奉하여 Bourbaki體系의 心理發生만을 追求하였다는 Freudenthal의 非難은, Piaget의 構造主義⁴⁴⁾가 數學뿐만 아니라, 物理學, 生物學, 心理學, 言語學, 社會學 등 諸 科學에서의 構造主義에 대한 論議를 밑바탕에 둔 發生論과의 辨證法的 統合을 試圖한 것임을 考慮할 때, 그의 Piaget 理論에 대한 理解의 不足에서 起因한 誤解에 不過한 것으로 보지 않을 수 없다.

이 問題와 關聯하여 다음과 같은 Freudenthal의 主張을 想起할 必要가 있을 것이다. “人類도 한 學習者이다. 그의 學習過程을 觀察하는 것을 우리는 歷史라고 부른다. 個個의 學習者는 人類의 大域的인 學習過程에 대한 知識으로부터 어

떤 利得을 볼 수 있는가? … 數學의 歷史는 漸進的인 圖式化의 學習過程이었다. … 어떤 意味에서 兒童들은 歷史를 反復하여야 하는 바, 實際로 일어난 것이 아니라, 우리가 다행히도 充分히 알고 있는 것을 우리 先祖들이 알고 있었다면 일어났을 것을 反復하여야 한다.”⁴⁵⁾ 이는 人類가 素朴한 原始狀態로부터 보다 높은 次元의 認識에 이른 自然스런 길을 따르게 함으로써 兒童들이 數學을 意味있게 받아들일면서 最終的으로 抽象的인 形式化에 이르게 할 수 있다는 소위 歷史 發生的 原理를 擁護하고 있는 말이다. 이러한 立場에서는 全體性, 一般性 곧 構造를 單純性으로 把握하고 學問의 一般의 아이디어를 教育의 初期에 提供하는 것이 兒童의 論理에 調和되는 自然스런 길이라는 소위 構造中心教育課程의 바탕이 되는 Piaget 理論을 받아들이기 어려운 것이다.

Piaget가 平面에서의 圖形의 ‘自由로운 可動性’은 平面全體의 그 自身 위에서의 寫像 곧 變換과는 全然 다른 觀念이라는 事實, 前者는 閉鎖性이 部分的으로 밖에 滿足되지 않는 寫像의 集合으로 groupoid이거나 카테고리이며 變換群은 아니라는 事實을 理解하지 못하였을까? Piaget의 觀點에 따르면 變換 觀念은 모든 人間의 思考 가운데 內在하는 基本的인 메카니즘, 즉 思考의 임의의 두 對象이 주어질 때 그 중 하나를 다른 것과 關聯지우는 作用, 곧 操作의 意識의 反映에 의한 形式化의 所産이다. 더우기 Piaget에게 있어 群의 公理는 心理學的 觀點에서 다음과 같은 意味를 나타내는 것이다. ① 合成은 出發點에서 주어진 操作으로 새로운 概念과 새로운 關係를 무한히 構成하는 能力이다. ② 結合性質은 두가지 서로 다른 길로 같은 結果에 到達하는 能力이다. ③ 逆操作은 合理的인 모든 構成의 可逆性의 證據가 된다. ④ 恒等操作은 모든 推論의 出發點의 安定性을 保證한다.”⁴⁶⁾ 더우기 *groupe des déplacements*은 일찌기

44) J. Piaget, *Structuralism*, Routledge & Kegan Paul, 1971.

45) H. Freudenthal, “Major Problems of Mathematics Education”, *Educational Studies in Mathematics*, 12 (1981), pp. 133-150.

46) J. Piaget, *Classes, Relations et Nombres*, Librairie Philosophique J. Urin, 1942, pp. 10-11.

Poincaré가 兒童의 感覺-運動의 反應을 記述하기 위하여 이용한 것임을 생각하면⁴⁷⁾, Piaget의 立場에서는 오히려 Freudenthal 自身이 指摘하고 있드시 形式的인 變換群이 아닌 groupoid를 問題視하는 것이 當然할 것이다. 이를 形式的인 數學의 眼目에서, 그것도 Piaget에 대한 그릇된 先入觀을 가지고 批判하는 것은 잘못이라 아니 할 수 없다.

한편, Piaget는 經驗的으로 檢證된 發達心理學 理論과 함께, 論理-數學의 分析 즉 소위 心理-論理學(psycho-logic)에 의해 뒷받침 된 科學的인 認識論을 構築하고자 하였으며, 그를 위해 먼저 知能과 主要한 諸 數學的 操作의 心理學的 發生學(psychological embryology)를 構築하고자 하였다. 거기서 그는 兒童의 論理를 臨床的 方法에 의한 分析과 論理代數의 分析에 의하여 明確히 하고자 하였으며, 發生的 分析과 論理的 分析이 一致하는 認識論의 建設을 試圖한 것이다. 이러한 試圖로 導入된 것이 소위 發生的인 認知構造 특히 群性體에 관한 理論이다. 그런데 群性體에 관한 Piaget의 理論은, 兒童의 思考構造에 대한 거의 解讀하기 困難한 過度한 論理的 分析을 試圖하고 있으며, 일찍부터, 心理學者들로부터는 論理主義에 빠진 誤謬로, 論理學者들로부터는 心理主義에 빠진 誤謬로 批判과 論爭의 對象이 되어왔다. 그러나, E.W. Beth와의 論爭과 和解가 말해 주듯이,⁴⁸⁾ 論理學과 心理學은 완전히 自律的인 反面, 人間의 實際的 思考가 客觀的 知識의 矛盾없는 體系인 論理學을 어떻게 하여 誕生시키려는가를 說明해야 한다는 點에서, 그 認識論的 綜合을 위한 研究는 繼續的으로 追求되어야 할 것이다. 이러한 觀點에서 볼 때 數學者는 群性體에 대한 Piaget의 研究를 非難하기에 앞서 그 價値를 찾는 努力을 해야 할 것이다.

以上の 論議를 통하여 이미 明確히 드러났드시, Piaget의 研究는 數學的 心理 發生에 관한

것이며, 그가 使用하고 있는 數學的 用語는 數學的 概念 그 自體가 아니라, 實際的 對象을 다루는 兒童의 行動이나 操作의 樣式 가운데 나타나는 心理 發生的 對應物을 意味하는 것이다. 예를 들어, Piaget가 使用하고 있는 '位相的 圖形'이라는 用語를, 文字 그대로 解釋하여, 位相的 性質만을 가지고 있는 圖形을 뜻하는 것으로 解釋하고 不當性을 指摘할 것이 아니라, 開閉·內外·連續性 등 調査의 對象으로 되어 있는 性質이 直觀的으로 明確히 드러나 있는 圖形을 편 의상 그렇게 부르고 있는 데 不過하다고 보아야 할 것이다. 兒童의 空間 概念 發達에 관한 研究에서 Piaget가 밝히고자 한 것은 幾何學의 概念의 表象이 對象으로부터 靜的인 知覺에 의해 얻어진 것이 아니라, 兒童이 對象에 行하는 實際的인 能動的인 行動에 크게 依存하고 있는 操作이며, 보다 一般的인 位相的 性質의 表象을 일으키는 行動의 調整이 Euclid의인 性質의 表象에 必要한 行動의 調整보다 基本的이기 때문에 보다 일찍 發達한다는 것이다.⁴⁹⁾ 원기둥의 밑면의 지름과 높이에 대한 問題에서도, Piaget의 意圖가 兒童의 相補性의 認識에 대한 論議에 強調點이 놓여 있었음을 Freudenthal은 먼저 생각했어야 할 것이다. 결국, Piaget 理論에서의 數學的 用語의 誤用과 그 教育的 適用의 不當性을 主張한 Freudenthal의 論旨는 Piaget의 發生的 認識論에 대한 理解의 不足에서 비롯된 皮相的인 批判으로 밖에 볼 수 없다.

V. 自然數 概念 指導의 問題

自然數는 歷史的으로 哲學者, 數學者, 心理學者, 數學者들에게 끊임없이 問題를 提起해 왔으며 人類는 아직도 自然數에 대한 學習을 繼續하고 있다. 學校 數學의 現代 數學化를 指向한 數學教育 現代化 運動과 더불어 集合論에서의 基數 概念을 初等化한 指導가 強調되었으나 오늘날 다시 이에 대한 再檢討가 이루어지고 있다.

47) E.W. Beth et J. Piaget, op. cit., p. 170.

48) ibid.

49) J. Piaget and B. Inhelder, The Child's Conception of Space, Routledge & Kegan Paul Ltd., 1967.

그런데, 問題는 入學期의 兒童의 大部分이 數세기를 하면서도 數의 保存을 理解하고 있지 못한 것을 보인 Piaget의 研究 結果가 基數的 側面의 指導를 強調하게 된 心理學的 根據로 認識되어 왔다는 點이다. Freudenthal은 이러한 事實을 批判하고, Piaget의 數概念 發達에 관한 研究 自體를 數學的 心理學的 誤謬라고 主張하고 있다. 그는 다음과 같이 記述하고 있다. “한 心理學者로부터 學習한 理論으로 그들의 實踐을 뒷받침하고 있는 教授學者들을 보는 것은 슬픈 이야기이다. 그들이 Piaget로부터 빌린 것은 그의 實驗 結果가 아니라 틀리지 않았으면 적어도 잘못 理解된 數學的 前提이다.”⁵⁰⁾

다음은 Freudenthal의 批判의 要旨이다.⁵¹⁾ Piaget는 Cantor의 業績에 感名을 받아 兒童의 數概念의 發達을 基數的 側面에서 研究하였다. Piaget는 自身이 우연히 알게 된 數學體系를 發達心理學에서 追跡하는 立場에 따라, 다른 側面 특히 무엇보다도 重要한 셈수 側面을 무시하고 1對1 對應 아래에서의 不變性的 認識의 發達을 調査하였다. 이러한 研究 때문에 Piaget는 兒童들이 自然數를 對等한 集合의 class로써 認識한다는 것을 發見한 功績者로 看做되고 있으나 이는 잘못 된 생각이다. 왜냐하면, Piaget는 基數를 서로 對等한 集合의 class라고 理解한 것이 아니라, 서로 對等한 單位로 構成된 class라고 把握하고 있기 때문이다. 결국 Piaget의 研究 結果는 數學教育者들에 의해 皮相的으로 다루어져 잘못 된 影響을 미쳤음이 분명하다. 더우기 數概念은 數세기에 의한 集合의 不變性에 대한 認識으로부터 形成되는 것이며, 1對1 寫像 아래에서의 不變性을 強調하는 것은 成人 數學者의 한 抽象的인 構成物을 잊지 못하는 精神的 態度 일 뿐, 兒童이 그러한 不變性에 대한 認識을 바탕으로 數를 構成한다는 아무런 證據도 提示되고 있지 않다. 결국 “Piaget가 研究한 1對1 寫

像의 不變性은 거의 重要하지 않은 한 局面으로 集合論에 의하여 影響을 받은 어른의 解釋 가운데에만 存在하는 것이다. 初等 算術教育은 이러한 貧弱하게 理解된 理論에 의해서 重大한 威脅을 받고 있다.”⁵²⁾

Freudenthal은 L.E.J. Brower의 影響을 받아 直觀主義의 立場에서 自然數의 列이 歷史的으로 發生的으로 構造的으로 數學의 礎石이라고 생각하고 세기主義를 擁護하고 있다.⁵³⁾ 이러한 立場에서 보면 當然히 論理的 概念에 바탕을 둔 構成物으로써의 基數 概念은 數學的으로 不充分하며 數學的으로 重要하지 않으며 教授學的으로 不充分한 것으로 생각될 것이다. 더우기 直觀主義者의 눈으로 볼 때는 數概念의 發生에서 셈수는 最初이면서 가장 重要한 役割을 할 것이며, 操作性 즉 發展的 適用 可能性이란 側面에서도 重視되지 않을 수 없을 것이다. 이러한 면에서 볼 때, Freudenthal에게 論理主義者인 Cantor의 基數 概念을, 그것도 變形된 形態의 것을, 兒童의 心理 發生面에서 確認하려 한 것으로 보인 Piaget의 研究와, 그것을 바탕으로 自然數의 基數的 側面의 指導를 強調한 「새 數學」이 正當한 것으로 評價될 수는 없는 것이다. 앞에서도指摘한 바와 같이 Freudenthal의 批判은 Piaget의 操作的 構成主義와 의 哲學的 立場의 差異에서 비롯된 非難에 지나지 않으며, 그에 입각한 自然數 概念에 대한 理解의 不足에서 비롯된 誤解에 不過하다. Piaget는 Cantor의 集合論에 대한 斷片的인 知識을 바탕으로 이를 發達心理學에서 追跡한 것이 아니라, H. Poincaré, L.E.J. Brower 등의 直觀主義者들의 생각과 G. Frege, B. Russell, A.N. Whitehead, W.V. Quine 등의 論理主義者들의 理論을 比較 檢討하여 그의 特有的 自然數 概念을 確立하고 그 心理發生을 研究한 것이다.⁵⁴⁾ Piaget는 이에 대해 다음과 같이 言及하고 있다. “몇 몇 著者들(Freudenthal등)은 내

50) H. Freudenthal, 1973, op. cit., p. 193.

51) ibid., pp. 191-194.

52) H. Freudenthal, “Recent Tendencies in the Teaching of Mathematics”, W.E. Lamon, Learning and the Nature of Mathematics, Science Research Associates, Inc., 1972, p. 15.

53) H. Freudenthal, 1973, op. cit., pp. 171-172.

54) E.W. Beth et J. Piaget, op. cit., pp. 277-291.

가 順序數가 基數보다 더 原始的이거나 그 反對인 것으로 생각하고 있다고 理解해온 듯하다. 나는 결코 그와 같은 말을 한 적이 없으며, 自然數의 이 두 側面은 서로 分離될 수 없으며, 心理學的으로 서로 補強되어, *classes*의 包含關係와 非對稱인 推移關係인 順序의 兩方을 超越하여 綜合되는 것으로 항상 생각해 왔다.⁵⁵⁾

自然數 概念의 指導에 대해서는 歷史的으로 세기主義者(*Zählmethodiker*)와 直觀主義者(*Anschauungsmethodiker*) 사이에 오랜 論爭이 있었다.⁵⁶⁾ 兒童의 數概念은 어떻게 發達하는가, 基數가 먼저 發達하는가 셈수가 먼저 發達하는가, 基數를 바탕으로 하여 數 指導를 해 나아갈 것인가 아니면 셈수를 바탕으로 해 나아갈 것인가. 이러한 問題에 대한 論爭과 함께, 自然數 概念 自體의 解釋의 差異는 認識論의 見解의 差異에서 비롯되는 것이기 때문에 어느 한 쪽을 完全히 排除할 수는 없을 것이다.

自然數는 基數, 셈수 以外에도 測定數, 數의 構造的 側面인 *reckoning number*, 函數的 側面인 *operator*等 여러가지 概念의 複合體이므로 數學教育에서 어느 한 側面만을 強調하는 것은 過去와 같은 論爭을 되풀이 할 危險性이 있으며 바람직하지 않다. *Piaget*는 自然數를 *class*와 順序關係 操作의 綜合이라고 보고 있으며, 數概念 形成의 最小限의 準據로서, 2個의 集合(要素가 5~7個)을 1對1 對應에 依해서 對等性 如否를 보일 수 있고 일단 對等하다는 것을 알았을 때 對等性은 要素의 配列에 無關하게 保存된다는 것을 認識한 狀態를 말하고 있으나, 單位의 反復에 의해서 새로운 數가 繼續 發生되는 *réurrence*의 理解를 진정한 數의 理解라고 보고 있다.⁵⁷⁾ 그리고 測定 概念은 數概念보다 조금 늦게 構成되지만 本質的으로 같은 操作이라고 記述하고

있다. 이는 自然數의 測定數 側面에 대한 *Piaget*의 立場을 나타내는 것으로 볼 수 있다. 이러한 *Piaget*의 立場은 集合, 順序關係, 수세기, 對應, 測定등의 操作을 서로 關聯시우면서 그 調整力을 增進시키는 活動的인 學習 指導方法을 뒷받침하는 것이다. 以上과 같은 考察을 통해 드러난 것은 兒童의 自然數 概念 發達에 대한 *Piaget*의 研究와 그 教育的 適用에 대한 *Freudenthal*의 非難은 ‘틀리지 않았으면 적어도 잘못 理解된 前提’에서 비롯된 것이라는 點이다.

VI. 結 論

*H. Poincaré*가 指摘하고 있듯이, “數學的 發見의 起源은 心理學者에게 가장 強烈한 興味를 불러일으키지 않을 수 없는 問題이다.”⁵⁸⁾ 그럼에도 불구하고 心理學 分野에서의 數學的 思考의 發生에 관한 研究 結果는 *Piaget* 理論을 除外하고는 거의 찾아보기 어려운 實情이다. *Z.P. Dienes*의 말과 같이 “이는 核과 같은 것이며 이것을 바탕으로 하여 數學學習 理論의 有效한 骨組를 만들 수 있을 지도 모른다.”⁵⁹⁾ 그러나 *Piaget* 理論은 그 獨特한 生物學的 論理-數學的 接近과 尙大하고 難解한 展開形態, 그리고 概念의 不安定하고 模糊한 陳述 때문에 明確히 把握하기 힘든 탓으로 많은 誤解와 批判의 對象이 되어 왔다. 말하자면, *Piaget*는 自身의 商品에 대한 最善의 세일즈맨은 아니었다.

*Piaget*의 研究가 그 自身의 先入觀念을 正當化하려 한 誤謬에 不過하다는 批判, 특히 그것도 數學的 素養의 不足과 그로 말미암아 惹起된 偏見에서 잘 못 追求된 數學의 心理 發生學이라는 批判, 더구나 實驗에서 사용된 言語의 理解란 面에서 볼 때 *Piaget*의 研究는 兒童의 語彙 增加에 대한 調査에 不過하다는 批判, 따라서

55) J. Piaget, “Comments on mathematical education”, A.G.Howson (ed.), op. cit., pp. 79-87.

56) K. Odenbach, “Zur Einfuhrung”, Rechenunterricht und Zahlbegriff, Westerman Taschenbuch, 1970. S. 7~21.

57) J. Piaget, “Problèmes de la construction du nombre”, Études D'épistémologie Génétique, XI, Presses Universitaires de France, 1960, pp. 1-68.

58) H. Poincare, Science and Method, Dover Publications Inc., 1914, p. 46.

59) Z.P. Dienes, Building up Mathematics, 片桐重男譯, 新數社, 1977, p. 43.

Piaget 理論은 數學的 心理學的 誤謬이며 이를 數學教育의 心理學的 根據로 援用하는 것은 教育學的 誤謬라는 Freudenthal의 批判은, 以上の 考察을 통하여 드러났드시, 그의 Piaget 理論에 대한 不當한 先入見과 그로 말미암아 惹起된 充分한 理解의 缺如에서 비롯된 非難과 誤解의 範圍를 벗어나지 못하고 있다.

Freudenthal의 Piaget 批判이 非難으로 그칠 수 밖에 없는 데에는 무엇보다도 數學的 思考의 本質에 대한 Freudenthal의 생각과 그를 바탕으로 展開되고 있는 數學 學習-指導 原理가 Piaget의 그늘을 벗어나고 있지 못한 데 큰 原因이 있는 것으로 생각된다.

앞에서도 言及하였지만, Freudenthal은 思考란 精神의 繼續되는 行動일 뿐이라고 하여 Piaget가 主張하고 있는 思考의 操作的 性格을 그대로 받아들이고 있으며, “大體로 數學은 自己 自身 및 다른 사람의 肉體의 精神의인 數學的 活動을 反省하는 것이다.”⁶⁰⁾라고 하여 Piaget의 基本 立場과 同一한 생각을 받아들이며, 數學教育의 主要 問題의 하나로써 兒童으로 하여금 自身의 肉體의 精神의인 數學的 活動을 反省하도록 어떻게 刺戟하느냐 하는 問題를 提起하고 있다. 또한 Freudenthal은 어떤 構造의 自己 同型群이란 群論의 ‘魂’이 自然法則의 밑바탕을 이루고 있으며 人間 모두가 公有하고 있는 一般의인 行動 樣式이요 思考 樣式이며 數學者들의 探究의 思考 樣式임을 主張하고 있는 바⁶¹⁾이 또한 Piaget의 數學 認識論과 一致되는 생각이다.

Freudenthal에 따르면, 數學에는 既成 產物으로써의 소위 化石化 된 數學과 活動으로써의 數學 곧 發生 過程의 數學(mathematics in statu nascendi)이 있으며, 참다운 數學의 學習은 再發明 活動이다. 그리고 數學의 活動이란 經驗의 世界를 組織化하는 活動이며, 한 水準에서 經驗을 組織化하

는 手段이 새롭게 經驗의 對象으로써 意識化되어 그것을 組織化하는 活動이 이루어지게 되면서 그 다음 水準으로의 飛躍을 하게되는 數學的 思考 活動의 사이클을 再發明해 가도록 指導되어야 한다고 Freudenthal은 主張한다.⁶²⁾ 數學的 思考 活動 가운데에서 무엇보다도 重要的 것은 抽象化이다. Piaget에 따르면 數學的 思考의 本質은 소위 ‘反映의 抽象化’에 의해 構成되는 操作이며 數學的 學習은 反映의 抽象化의 메카니즘에 忠實한 것이 되지 않으면 안된다. 그런데 Piaget가 主張하고 있는 反映의 抽象化의 메카니즘은 形式의 內容化라고 하는 끝없는 螺旋의 過程이며, 이는 組織 手段의 對象化라고 하는 Freudenthal의 數學化의 過程과 根本的으로 다를 바 없으며, 그의 소위 再發明原理는 Piaget理論의 數學教育에의 適用으로 解釋될 수 있는 것이다. 참다운 教育活動이란 自己 自身の 正直한 確信에 따라 教育에의 바른 길을 더듬어 찾는 것을 뜻한다. 教育科學은 무엇보다도 이러한 正直한 確信의 合理的 正當化이어야 한다. 그것을 哲學이라고 불러도 좋다. 그러나 그것을 어떻게 부르진 그것을 看過해서는 안된다. 이는 Freudenthal 自身만의 생각은 아닐 것이다.

Freudenthal 自身도 認定하고 있듯이⁶³⁾ Piaget 理論에는 豊富한 아이디어와 獨創性이 充滿해 있다. Piaget의 어떤 理論 가운데 무엇이 잘 못되었는가를 보이는 데 우리의 努力을 枯渴시키는 대신에 우리는 그 理論 가운데에서 有益하고 建設的인 아이디어를 찾아내는데 에너지를 쏟아야 할 것이다. Piaget가 提示하고 있는 數學的 思考의 發生에 관한 龍大한 研究 結果 가운데, 數學教育의 改善을 위해 必要한 어떤 價値 있는 것이 숨겨져 있음에도 不拘하고 그것을 찾아내지 못한다면, 더우기 그것이 어떤 學者의 權威와 所信 때문이라면, 이는 數學教育界의 큰 損失이 아닐 수 없다.

60) H. Freudenthal, 1981, op. cit.

61) H. Freudenthal, “What groups mean in mathematics and what they should mean in mathematical education”, A.G. Howson (ed.), 1973, op. cit., pp. 101-114.

62) H. Freudenthal, 1973, op. cit., pp. 109-130.

63) ibid., p. 662.