韓國數學敎育學會誌<數學敎育>
1984. 12, Vol. XXIII, No. 1

Journal of the Korea Society of Mathematical Education
Dec. 1984, Vol. XXIII, No. 1

Fuzzy 測度의 槪念과 몇 가지 例에 關한 硏究

京畿工業開放大學 廉 勝 華

I. 緖 論

T-fuzzy σ-algebra의 도입

Fuzzy 槪念이 아닌 보통의 集合槪念에 관한 理論을 앞으로 古典的 槪念이라 부르기로 한다.

X를 固定된 古典的 集合이라 하고 單位區間 I를 單位閉區間 [0, 1]로, non-negative 實數의 集合을 $\mathbf{R}_+$로, 또 $\overline{\mathbf{R}}_+=\mathbf{R}_+\cup\{\infty\}$로 기호를 각각 적기로 한다.

앞으로 古典的 Borel 集合의 σ-algebra를 β로 나타내며 이후로 論議되는 實直線의 모든 部分集合이 β에 속한다고 前提한다.

보통의 部分集合 A의 槪念을 特性函數 1_A로 定義하는 方法을 一般化시켜 X의 fuzzy部分集合을 $\mu: X\to I$인 函數 μ와 같이 X의 函數로 定義한다.

古典的인 測度論에서는 σ-algebra란 X를 포함하며 餘集合(Complementary)과 可算合(Countable union)에 관해 닫혀 있는 X의 部分集合族이다.

이와같은 생각이 fuzzy의 경우에서도 그대로 확장된다. 따라서 무엇보다 먼저 fuzzy集合들 사이에서의 演算을 定義하여야 한다.

fuzzy部分集合 μ의 餘集合을 $1-\mu$로 定義한다.

合과 곱의 演算은 보다 넓게 쓰이도록 하기위해 三角(trianglular) norm과 雙對(duality) norm으로 부터 도입하는 방법을 택한다.

三角 norm이란 다음 條件을 만족하는 寫像

$$T: I\times I\to I$$

를 뜻한다. 즉,

(a) $T(x,1)=x$, (境界條件)

(b) $T(x,y)\leq T(u,v)$, $x\leq u$, $y\leq v$, (單調律)

(c) $T(x,y)=T(y,x)$, (可換律)

(d) $T(T(x,y),z)=T(x,T(y,z))$, (結合律)

T가 三角 norm일 때 다음 函數

$$S: I\times I\to I$$

를 $S(x,y)=1-T(1-x,1-y)$로 定義되는 S를 T의 三角 雙對 norm 또는 간단히 雙對라 한다.

이 때 S도 또한 單調律, 結合律, 可換律을 만족함을 쉽게 알 수 있다.

그리고 $S(x,0)=x$, (境界條件)

을 만족한다.

三角 norm의 例를 들어보자.

$$\text{(a)}\quad T_S(x,y)=\begin{cases}\min(x,y), & S=0\text{일 때}\\ x\cdot y, & S=1\text{일 때}\\ \max(x+y-1,0), & S=\infty\text{일 때}\\ S_{\log}\left(1+\dfrac{(S^x-1)(S^y-1)}{S-1}\right), & S=(0,1)\cup(1,\infty)\text{일 때}\end{cases}$$

또

$$\text{(b)}\quad T_W(x,y)=\begin{cases}\min(x,y), & \max(x,y)=1\text{ 일 때}\\ 0, & \max(x,y)\neq 1\text{ 일 때}\end{cases}$$

이에 대한 三角雙對 norm은 각각

$$\text{(c)}\quad C_S(x,y)=\begin{cases}\max(x,y), & S=0\text{일 때}\\ x+y-x\cdot y, & S=1\text{일 때}\\ \min(x+y,1), & S=\infty\text{일 때}\\ \left(1-S_{\log}\left(1+\dfrac{(S^{1-x}-1)(S^{1-y}-1)}{S-1}\right)\right), & S=(0,1)\cup(1,\infty)\text{일 때}\end{cases}$$

또

$$\text{(d)}\quad C_W(x,y)=\begin{cases}\max(x,y), & \min(x,y)=0\text{일 때}\\ 0, & \min(x,y)\neq 0\text{일 때}\end{cases}$$

이다.

또 T_W와 T_0은 각각 最小, 最大인 三角 norm이다.

즉 $T_W\leq T\leq T_0$

이다.

T가 三角 norm이고 S가 그의 雙對이면

$$T(\mu,\nu)(x)=T(\mu(x),\nu(x))$$
$$S(\mu,\nu)(x)=S(\mu(x),\nu(x))$$

라 두어서 fuzzy集合에 관한 演算을 얻는다. 이와같이 둔 演算 T와 S는 單調律, 可換律, 結合律을 만족하며 또한 境界條件을 만족한다.

그리고 또 De Morgan의 法則

$$1-T(\mu,\nu)=S(1-\mu,1-\nu)$$
$$1-S(\mu,\nu)=T(1-\mu,1-\nu)$$

도 만족한다.

이것이 바로 fuzzy集合에 관한 곱의 演算을 T로, 또 合의 演算을 S로 도입시킨 연유이다.

그러나 古典集合의 演算에 관한 分配律, 冪等法則(idempotent) 등은 一般的으로 成立하지 않는다.

다만 특수한 三角 norm에 한해서 이들 법칙이 成立한다는 점에 주의 하기바란다.

$\{\mu_n\}_{n\in N}$을 fuzzy集合의 數列이라하고 T와 S를 각각 三角 norm과 그의 雙對라하면

$$\underset{n\in N}{T}\ \mu_n=\lim_{n\to\infty} T(\mu_1,\ldots\ldots,\mu_n),$$
$$\underset{n\in N}{S}\ \mu_n=\lim_{n\to\infty} S(\mu_1,\ldots\ldots,\mu_n)$$

은 항상 一意的으로 定義된다.

定義 1. T를 三角 norm, S를 그의 雙對라 하자.

만일 I^X의 部分族 σ가 다음 조건을 만족하면 이를 X위에서 T-fuzzy σ-algebra라 한다. 즉

(a) α가 常數이면 $\alpha\in\sigma$

(b) $\mu\in\sigma$이면 $I-\mu\in\sigma$

(c) $\{\mu_n\}_{n\in N}\in\sigma^N$이면 $\underset{n\in N}{S}\mu_n\in\sigma$

이 때 σ에 속하는 元素를 T-fuzzy 可測集合이라 하고 (x,σ)를 T-fuzzy 可測空間이라 한다.

σ가 T-fuzzy σ-algebra이면

$$\{\mu_n\}_{n\in N}\in\sigma^N \Rightarrow \underset{n\in N}{T}\mu_n\in\sigma$$

이다.

가령 T를 可測인 三角 norm, A를 古典的인 X위의 σ-algebra라 하면 (X,A)로 부터 (I,β)로의 모든 可測函數 全體를 $\zeta(A)$라 두면

$\zeta(A)$는 T-fuzzy σ-algebra이다.

이 $\zeta(A)$를 A로 부터 生成된 fuzzy σ-algebra라고 한다.

σ의 예를 하나 더 들어보자.

$$\sigma=\left\{\mu: X\to I \mid \mu: \text{常數 또는 } \frac{1}{3}\leq\mu\leq\frac{2}{3}\right\}$$

는 X위에서 T_0-fuzzy σ-algebra이다.

그리고 $\sigma=\zeta(A)$인 X위에서 σ-algebra A는 없다.

그러나 $S\in(0,\infty)$인 S에 대한 三角 norm T_S에 관해서는 古典 σ-algebra를 써서 T_S-fuzzy σ-algebra로 나타낼 수 있다.

定理 1. $S\in(0,\infty)$라 하자.

그러면 $\sigma\subset I^X$가 X위에서 T_S-fuzzy σ-algebra이기 위한 必要充分條件은 $\sigma=\zeta(A)$인 X위에서의 σ-algebra A가 존재해야 한다.

證明. [9] 참조

II. Fuzzy 測度 (measures)

古典測度論에서 測度란, σ-algebra A위에서 定義된 函數로서 空集合을 0으로, A로 부터 陽의 實數값을 갖는 σ-加法이며 加法과 連續性을 합친 性格을 갖는다. fuzzy인 경우에서도 이와같은 性質을 확장시킨 것이다.

定義 2.

T를 可測三角 norm이라 하고 S를 그의 雙對라 할때 (X,σ)를 T-fuzzy 測度空間이라 하자.

이 때 사상

$$m:\sigma\to\mathbf{R}_+$$

이 (a) $m(0)=0$ (境界條件)

(b) $m(T(\mu,\nu))+m(S(\mu,\nu))=m(\mu)+m(\nu)$ (加法性)

(c) $\{\mu_n\}_{n\in N}\uparrow\mu,\ \mu\in\sigma\Rightarrow\{m(\mu_n)\}_{n\in N}\uparrow m(\mu)$ (連續性)

을 만족하면 m을 有限 T-fuzzy測度라 한다.

例 1.

(X,A,P)를 古典測度 空間이라 하고

$$m:\zeta(A)\to\mathbf{R}_+$$

를 $m(\mu)=\int\mu dp$

라고 定義하면 m은 모든 $S\in[0,\infty]$에 대해 有限

T_S-fuzzy 測度이다.

이 定義는 Zadeh가 처음으로 測度를 定義한 槪念이다.

定理 2.

T를 可測 三角 norm이라 하고 σ를 X위에서 T-fuzzy인 동시에 T_0-fuzzy σ-algebra라 하자. 그러면 (X, σ) 위에서 有限 T-fuzzy 測度는 T_0-fuzzy 測度이다.

證明. [9] 참조

定理 3.

T를 可測三角 norm, S를 그의 雙對라 하고 (X, A)를 可測空間, P를 $P(X)>0$인 (X, A) 위에서 有限測度이며

$$m(\mu)=\int \mu dp$$

에 의해

$$m: \zeta(A) \to \mathbf{R}^+$$

이 定義되었다고 하자. 그러면

m이 有限 T-fuzzy 測度이기 위한 必要充分條件은 (T, S)가 方程式

$$T(x, y)+S(x+y)=x+y$$

를 만족하여야 한다.

證明. [9] 참조

특히 사상

$$m: \mathscr{P}(X) \to I$$

이

(a) $m(0)=0,\ m(x)=1$

(b) $\forall\ A, B \in \mathscr{P}(X),\ A \subseteq B \Rightarrow m(A) \subseteq\ m(B)$ (單調律)

(c) $\forall,\ n \in \mathbf{N},\ A_n \in \mathscr{P}(X)$이고 $\{A_n\}_{n \in N}$이 單調이면(즉, $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots\cdots A_n \subseteq \cdots\cdots$ 또는 $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \cdots\cdots A_n \supseteq \cdots\cdots$)이면

$$\lim_{n \to \infty} m(A_n)=m(\lim_{n \to \infty} A_n) \quad \text{(連續性)}$$

일 때 m은 fuzzy 測度이다.

주의 1. $\forall\ A, B \in \mathscr{P}(X) \to m(S(A, B)) \geq \max \{m(A),\ m(B)\}$

$$\left\{ m(T(A, B)) \right\} \leq \min\{m(A), m(B)\}$$

例 2.

確率測度

만일 P가

(a) $\forall\ A, P(A) \in [0, 1]$; $P(X)=1$이며

(b) $\forall\ n \in N,\ A_n \in \mathscr{P}(X)$이고 $n \neq m,\ A_n \cap A_m = \phi$이면

$$P(\bigcup_{n \in N} A_n)=\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$$

이면 P를 確率測度라 한다.

P는 fuzzy 測度이다.

例 3.

Dirac 測度

$$\forall\ A \in \mathscr{P}(X),\ \mu(A)=\begin{cases} 1 & (x_0 \in A) \\ 0 & (x_0 \notin A) \end{cases}$$

이 때 x_0는 X안에서 주어진 元素이다. 이와같은 μ를

Dirac 測度라 한다.

Dirac 測度는 fuzzy 測度이다.

例 4.

λ-fuzzy 測度

$$\forall\ A, B \in \mathscr{P}(X) \cdot \ni \cdot A \cap B=\phi,$$

$$m_\lambda(S(A, B))=m_\lambda(A)+m_\lambda(B)+\lambda m_\lambda(A) m_\lambda(B), \quad -1<\lambda$$

여기서 $m_\lambda(X)=1$이며 m_λ는

$$\lim_{n \to \infty} m_\lambda(A_n)=m_\lambda(\lim_{n \to \infty} A_n)$$

이 때 m_λ를 λ-fuzzy 測度라 한다.

定理 4.

λ-fuzzy 測度는 $\lambda>-1$인 때에 한해서 fuzzy 測度이다.

證明. 위 식 $m_\lambda(S(A, B))=m_\lambda(A)+m_\lambda(B)+\lambda m_\lambda(A) m_\lambda(B)$로 부터

$$m_\lambda(X)=m_\lambda(X)+m_\lambda(\phi)(1+\lambda m_\lambda(X))$$

$\lambda \neq -1$이므로 $m_\lambda(\phi)=0$

만일 $A \subseteq B$이면 $B=A \cup C$이고 $A \cap C=\phi$인 C가 존재한다. 그러면 $\lambda>-1$이므로

$$m_\lambda(B)=m_\lambda(A)+m_\lambda(C)(1+\lambda m_\lambda(B)) \geq m_\lambda(B)$$

주의 2. $\lambda=0$이면 λ-fuzzy 測度는 確率測度가 된다.

A의 fuzzy 餘集合을 $\bar{A}$를 하면

$$m_\lambda(\bar{A})=\frac{1-m_\lambda(A)}{1+\lambda m_\lambda(A)}$$

이다. 이것을 좀더 일반화 하면

$$m_\lambda(S(A, B)) = \frac{m_\lambda(A)+m_\lambda(B)-m_\lambda(T(A, B))+\lambda m_\lambda(A) m_\lambda(B)}{1+\lambda m_\lambda(T(A, B))}$$

例 5.

信用函數

信用函數 β란 有限集合 X위에서의 測度로서

(a) $\beta(\phi)=0$, $\beta(X)=1$, $\forall\ A\in\mathscr{P}(X)$, $0\leq\beta(A)\leq 1$

(b) $\forall\ A_1, A_2, \cdots\cdots, A_n\in\mathscr{P}(X)$

$$\beta(S(A_1, A_2, \cdots\cdots, A_n))\geq\sum_{j=1}^{n}\beta(A_i)-\sum_{i<j}\beta(A_i\cap A_j)+\cdots\cdots+(-1)^{n+1}\beta(T(A_1, A_2, \cdots\cdots, A_n))$$

여기서 $\beta(A)$를 A에 속하는 주어진 X의 元素를 信用하는 程度로 해석된다.

물론 $\beta(A)+\beta(\bar{A})\leq 1$이다.

1978년에 Banon은 $\lambda>0$일 때는 λ-fuzzy 測度는 항상 信用函數이며 그 逆도 成立함을 증명하였다.

例 6.

近似測度(plausility measures)

有限集合 X의 近似集合 A를 Shafer는

$$Pl(A)=1-\beta(\bar{A})$$

라고 定義하였다. 여기서 β는 信用函數다.

만일 Pl이

(a) $Pl(\phi)=0$, $Pl(X)=1$

(b) $\forall\ A_1, A_2, \cdots\cdots, A_n\subseteq X$,

$$Pl(T(A_1, A_2, \cdots\cdots, A_n))\leq\sum_{i=1}^{n}Pl(A_i)-\sum_{i<j}Pl(S(A_i\cup A_j))+\cdots+(-1)^{n+1}Pl(S(A_1, A_2, \cdots\cdots, A_n))$$

을 만족하면 近似測度라 한다.

定理 4.

近似測度는 fuzzy 測度의 특별한 例이다.

證明. $\forall\ A\subseteq X$, $\forall\ B\subseteq X$,

$$Pl(S(A, B))\subseteq Pl(A)+Pl(B)-Pl(T(A, B))$$

는 명백하다.

$C\subseteq A$라 할 때 $B=C\cup\bar{A}$라면

$S(A, B)=X$, $T(A, B)=C$이며

$1\leq Pl(A)+Pl(B)-Pl(C)$이다.

따라서 $Pl(B)\doteq 1$이므로

$Pl(A)\geq Pl(C)$.

定理 5.

λ-fuzzy 測度가 近似測度이기 위한 必要充分條件은 $-1<\lambda\leqq 0$일 때다.

證明. m_λ를 $-1<\lambda\leqq 0$인 λ-fuzzy 測度라 하자. 지금 $f(A)=1-m_\lambda(\bar{A})$라 두고, 임의의 A에 대하여 $B\cdot f(S(A, B))=1-m_\lambda(\overline{S(A, B)})$이므로

$\mu=\dfrac{1-\lambda}{1+\lambda}$ 일 경우에는 f는 바로 m_μ이다.

그런데 函數 $\lambda\mapsto\dfrac{1-\lambda}{1+\lambda}$는 $(-1, 0]$로 부터 $[0, \infty)$로의 同型 이므로

$\lambda\geqq 0$인 것이 m_λ가 信用函數일 必要充分條件이므로 信用函數이므로 近似測度의 定義에 따라 증명된다.

III. 結 論

測度論을 二價 論理的인 集合論에서 얻어진 것과 같이 無限 多値論理인 Fuzzy 論的인 立場에서도 Fuzzy 測度를 導入시킬 수 있는 可能性을 보았다. 이는 Fuzzy 測度論的인 Fuzzy Lebesgue 積分論까지 展開될 것으로 期待된다.

要 約

Fuzzy 測度를 古典的인 方法에 병행해서 T-fuzzy σ-algebra의 槪念을 얻어서 이로부터 Fuzzy 測度를 導入하고 다시 이와 관련된 例를 몇가지 들었다.

이 결과 古典的인 方法과 매우 가까운 Fuzzy 測度를 얻었음을 확인할 수 있었다.

參 考 文 獻

1. A. Kaufmann, *Introduction to the theory of fuzzy subsets*, Vol. 1, Academic Press, 1975.
2. D. Dubois and H. Prade, *Fuzzy Sets and Systems: Theory and Applications*, Academic, 1980.
3. 西田俊末, 竹田英二, ファヅイ集合とその應用, 森北出版株式會社, 1978.
4. C. Pinter, *Set theory*, Addison-Wesley Co., 1951.
5. D. Dubois and H. Prade, Toward fuzzy analysis: Integration and derivation of fuzzy functions, *Fuzzy Algebra, Analysis, Logics*, Tech. Rep. TR-EE78/13, Part C. Purdue Univ., Lafayette, Indiana. (Reference from 11. 4.)
6. Sugeno, M., Theory of Fuzzy Integral and Its Applications, Ph. D. Thesis, Tokyo Inst. of Technol., Tokyo, 1974.
7. Sugeno, M., Fuzzy measures and fuzzy integrals:

A survey, *Fuzzy Automata and Decision Processes* M.M. Gupta, G.N. Saridis, and B.R. Gaines, eds., North-Holland Publ., Amsterdam, 1677, 89-102.

8. Klement, E.P., Characterization of finite fuzzy measures using Markoff-kernels, *J. Math. Anal. Appl.*, 75 (1980), 330-340.
9. Klement, E.P., Construction of fuzzy σ-algebras using triangular norms, *J. Math. Anal. Appl.*, to appear.