Gödel의 不完全性定理와 數學的 眞理

金 容 局
목포대학교 수학과 교수
金 永 男
조선대학교 수학과 교수

0. 序 言
1. Gödel 의 不完全性定理
2. 結語 - 形式系의 一般的意味

0. 序 言 : Gödel의 不完全性 定理가 意味하는 것.

Gödel 의 不完全性定理의 골격은 다음과 같다.

i) 『式G는 證明不可能하다』고 하는 超數學的命題를 나타내는 式G의 構成.

ii) G는 그 否定~G가 證明可能할 때에 한해서 證明可能하다는 것의 證明.

iii) G는 形式的으로 證明不能하지는 않지만 참(眞)인 式이라는 것의 證明.

iv) G는 참인 동시에, 形式的으로 決定不可能하기 때문에 數學의 公理는 不完全하다는 것, 즉 公理로부터 모든 참된 命題를 연역할 수 없다는 것, 더나아가서 數學은 본질적으로 不完全하다는 것의 證明.

v) 『數學은 無矛循이다』고 하는 超數學的命題를 나타내는 式A의 構成. 'A⊃G'의 形式的證明이 가능하다는 것, 따라서, 數學의 無予循性은 形式的計算속에서 나타내어질 수 있는 理論에 의해서는 확립할 수 없다는 것의 證明.

1930년 여름에 24세 된 소장 수학자 Kart Gödel 은 『數學의 体系는 닫혀있지 않다』 (mathematics is open-ended) 는 超數學的인 定理를 證明하였다.*
즉, 그는 최종적이고 가장 완벽한 수학체계란 존재하지 않는다는 것을 증명한 것이다. 그것은 수학에 관한 어떤 分理系도 끝내는 解決不可能한 어떤 命題에 도달한다는 것을 뜻한다. 이것이 Gödel의 不完全性定理이다. 이 획기적인 定理는 우리에게 많은 것을 시사해 준다. 産業革命 당시의 思想家들은, 우주를 예정된 프로그램에 따라 작동하는 거대한 기계로 즐겨 간주하였다. 그리고는, 조만간 우주의 규칙과 프로그램을 알게 될 것이라고 낙관적으로 예언하기도 하였다. 이러한 기대에 대해, Gödel의 ~~不完全性定理~~는 우주의 마지막 비밀을 우리는 결코 알지못할 것임을 밝혔다. 물론, 과학이 모든 해답을 마련해 줄 수는 없다고 말하기는 쉽다. 그러나 Gödel의 업적이 높이 평가받는 이유는, 이것을 엄

* Die Vollständing Keit der Axcome des logischen Funktionen-kalküls, manats. für Math. u. phys., vol. 37 (1930), pp.349-360

밀하게 증명하였다는 점에 있다. 그는 이 命題를 완전히 기호적인 論理言語를 사용하여 증명하였던 것이다.

1. Gödel의 不完全性 定理

i. Gödel 數

Gödel은 1931년의 論文*에서 각 記號, 式(즉 記號의 系列) 및 證明(즉, 有限개의 式의 系列)에 一意的으로 하나의數를 대응시킬 수 있음을 보였다. 이 數를 記號·式·證明의 〈Gödel 數〉 (Gödel numbering)라고 부른다.

표1

定項記號	Gödel 數
$\sim$	1
$\vee$	2
$\supset$	3
$\exists$	4
$=$	5
O	6
S	7
(	8
)	9
,	10

표2

數詞變項	Gödel 數
x	11
y	13
Z	17
命題變項	**Gödel 數**
p	11^2
q	13^2
r	17^2
述語變項	**Gödel 數**
P	11^3
Q	13^3
R	17^3

(보기) 1.

'$(\exists x)(x=sy)$' 의 Gödel數 m.

(	$\exists$	x	)	(	x	$=$	s	y	)
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
8	4	11	9	8	11	5	7	13	9
8	4	11	9	8	11	5	7	13	9
2	3	5	7	11	13	17	19	23	29

(2부터 시작하는 系數의 열)

$$m = 2^8 \times 3^4 \times 5^{11} \times 7^9 \times 11^8 \times 13^{11} \times 17^6 \times 19^7 \times 23^{13} \times 29^9$$

(보기2) 式系列(證明)의 Godel 數 k

$(\exists x)(x=sy)$, $(\exists x)(x=\bar{s}o)$ 의 Gödel數를 각각 m, n이라 할 때,

式系列 $(\exists x)(x=\dot{s}y)$

$(\exists x)(x=so)$

의 Gödel數는 $k = 2^m \times 3^n$

ii) Gödel의 不完全性定理

定義 : 式의 列이 있을 때, 이에 대응하는 一定數

$$2^{n(1)}.\ 3^{n(2)}.\ \cdots\cdots\ p_k^{n(k)} \quad \cdots(\mathrm{I})$$

를 대응시킨다. 여기서 $n(1)$, $n(2)$, …, $n(k)$는 이 列의 각式의 Gödel 數

* Über formal unendscheidbare Sätze der Principia Mathematica und uerwandter system I, Monats. für Math. u. phys., vol. 38(1931), pp.173-198

인 것으로 한다. (I)을 이 式의 列의 系列數라고 부른다.

超數學에서 $D(x, y)$는 y가 形式的 證明의 系列數, x는 이 形式的證明의 마지막 式의 Gödel 數를 나타낸 것으로 한다. 또, $s(x, y)$는 Gödel數가 x인 式에서, 특히 z 라는 變項이 나올 때마다, 이것을 $\overline{y}$*로 바꿔 놓으므로써 얻어지는式의 Gödel 數로 한다.

관계 $D(s(x, x), y)$는 recursive이기 때문에 이것을 $G(x, y)$로 나타낸다. $G(x, y)$는 recursive 로 定義할수있기 때문에 形式系속에서 그것을 나타낼수 있다. 이것을 $\Gamma(x, y)$라고 하면 이 形式系는

$$\sim(\exists y)\Gamma(z, y) \quad \cdots\cdots \quad (\mathrm{II})$$

를 포함한다. 이 式의 Godel 數를 m이라 하면, (II)의 z에 m을 대입하면,

$$\sim(\exists y)\Gamma(m, y) \cdots\cdots (\mathrm{III})$$

를 얻는다. (III)의 Gödel數를 n으로 나타내면

$$n = f(m, n) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (\mathrm{IV})$$

定理 1. 形式系 S가 無予循이면 (III)는 S안에서 증명불가능하다.

(증명) :(III)가 S안에서 증명가능 이라고 假定하여 그 증명식의 系列數를 k라고 하면, $Dem(n, k)$가 성립한다. 따라서 (IV)에 의하여, $G(m, k)$가 성립한다. 따라서, $\Gamma(\overline{m}' \overline{k})$는 S안에서 증명가능하다. 이것은, $(\exists y)\Gamma(m, y)$가 S안에서 증명가능함을 보여준다. 그런데, (III)는 S안에서 증명가능하다는 가정이었으므로 S는 無予循이 아니다.

S는 無予循이라고 가정하였으므로, (IV)는 S안에서 증명가능하지 않다.

定義 : 形式系는

$$(\exists x)\ \varphi(x),$$

및 $\sim\varphi(0)$, $\sim\varphi(\overline{1})$, $\sim\varphi(\overline{2})$, ······ 의 둘다, 形式系안에서 증명가능인 式 $\varphi(x)$를 포함할 때 w-無予循이라 한다.

定理 2. 形式系 S가 w-無予循的일 때, 式

$$(\exists y)\Gamma(\overline{m}, y)$$

는 S안에서 증명가능하지 않다.

(證明) : (V)가 증명가능이라고 가정하면

$$\sim(k) \sim Dem(n, k)$$

따라서 $\sim(k) \sim Dem(f(m, m), k)$

즉, 어떤 자연수 k에 대해서도 $\sim\Gamma(\overline{m}, \overline{k})$는 S안에서 증명가능하다. 특히, $\sim\Gamma(\overline{m}, 0)$, $\sim\Gamma(\overline{m}, \overline{1})$, $\sim\Gamma(\overline{m}, \overline{2})$, ······ 는 S안에서 증명가능하다. 그런데, (V)는 증명가능이기 때문에 S는 w-予循이다. 즉, (V)는 S안에서 증명가능하지 않다.

定理 3. 形式系 S가 w-無予循的이면 完備는 아니다.

定理 4. S가 無予循인 形式系이면

$$(x) \sim (\exists y_1)(\exists y_2):$$
$$\beta(x, y) \wedge \beta(N(x), y_2)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots \quad \mathrm{VI}$$

는 S안에서 증명불가능하다.

(證明) 形式系안에서 定理 1의 증명과 같은 방법을 쓰면

$$(\mathrm{VI}) \supset \sim(\exists y)\beta(\overline{n}, y) \quad \cdots\cdots \quad (\mathrm{VII})$$

임을 증명할 수 있다. 또, $n = f(m, n)$이므로 $Dem(n, y) = Dem(f(m, m), y) = G(m, y)$. 따라서 (VII)에 의해서

$$*: \overline{y} = \underbrace{ss \cdots\cdots}_{y} so$$

$(VI) \supset \sim (\exists y)\ \Gamma(\overline{m}, y)$.

따라서, $\sim (\exists y)\ \Gamma(\overline{m}, y)$도 성립하게 되어, 定理 1과 모순한다.

2. 結語一形式系의 一般的 意味

Gödel의 分析은 數學(初等數論=貧)의 無予循에 관한 超數學的證明을 일체 부정하는 것은 아니다. 그의 결론이 배제하는 것은, 數學의 形式的演繹에 의해서 寫像할 수 있는 그러한 종류에 관한 無予循性의 증명에 관해서이다.*

數學의 無予循性에 관한 超數學的 證明은 Hilbert 학파에 속하는 Gentzen 에 의하여 실제로 이루어졌다.** 그러나 Gentzen의 理論은, 數學의 形式的體系 안에는 寫像할 수 없다. 無予循性의 絶代的證明에 관하여 Hilbert가 제시한 처음의 조건에 비추어 보면, 이것은 사실은 〈有限〉의 입장에 입각한 것은 아닌 것이다.*** 즉, 이들 증명은 數學的計算으로 나타낼 수 없고, 또 有限의 입장에서 이루어진 것이 아니기 때문에, Hilbert의 최초의 프로그램속에서 제창된 목표를 완성하였다고 말할 수 없다.

Gödel의 定理는 數學(初等數論)에 관해서, 有限의 입장에서의 無予循性의 絶代的證明이 가능하다는 것을 배제하고 있지 않는다. Gödel은 이러한 증명이 數學의 테두리 안에서 나타내어지지 않음을 밝힌 것이다.**** 그는 완결된 한 조의 推論規則을 사용하여, 임의의 주어진 公理系로부터, 形式的으로 演繹할 수 없는 참(眞)인 數學的命題가 무수히 많음을 밝힘으로써, 數學에 관한 公理主義的 연구는 數學的 眞理의 전영역에 미치지 못함을 보여 주었다. 이 사실에서, 우리가 數學的 論證과정이라는말로 우리가 이해하고 있는 내용은, 形式化된 公理主義的 方法의 범위와 일치하지 않는다는 것을 알 수 있다. 形式化된 公理主義的 절차는, 처음에 결정되고 고정된 한 조의 公理와 變形規則을 바탕으로 이루어진다.

Gödel의 이론이 밝힌 바와 같이, 새로운 증명규칙을 창출하는 수학자의 창조성은 처음부터 그 틀을 정할 수는 없다. 따라서 올바른 수학적증명의 엄밀한 논리적 형태에는 최종적인 것은 존재하지 않는다. 이러한 사정을 고려한다면, 數學的 내지는 論理的 眞理에 관한 완전히 포괄적인 定義를 얻을 수 있는가의 여부는 아직 결정할 수 없는

* : 이점에 관해서는 다음 사실을 상기할 수 있다. 즉, 자와 콤파스만을 사용하여 임의각을 3등분할 수 없다는것에 관한 증명은, 어떤방법을 써서도 각의 3등분이 불가능하다는 것을 뜻하지는 않는다. 『콤파스와 자만을 사용한다』는 조건이 없다면 이를테면 자위에 일정한 간격을 표시할 수 있다면 임의각을 3등분할 수는 있다.

** : G. Gentzen, "Die Widerspruchs freiheit der reimen Zahlen theorie," Math Ann., vol 112 (1936), pp. 493 ~ 565.

*** : Gentzen등의 증명은 특히 超數學的 構成에 관한 새로운 형태를 제시하였다는 점에서, 또, 이것을 통하여 數學의 無予循性을 증명하는데 推論規則을 어느 범위까지 확대하면 좋은가를 분명히 하였다는 점에서 큰 論理學的 意義를 지닌다.

**** : Gödel의 이론은, 數學안에서 나타낼 수 없는 엄격히 有限의 입장에선 證明의 가능성을 배제하지는 않는다. 그러나, 數學속에서 定式化할 수 없는, 有限의 입장에서의 證明이 어떤 것인가에 관해서는, 그는 생각하지 않았던 것 같다.

미해결의 문제이다.

Gödel의 不完全性 定理는 수학적능력에 관해 인간의 두뇌와 경쟁할 수 있는 콤퓨터를 만들 수 있는가 하는 문제와 관련해서 우리에게 중요한 시사를 던져준다.

콤퓨터는 지령에 따라 작동하는 것이며, 이들 지령은, 형식화된 公理的 方法을 바탕으로, 고정된 推論規制에 대응한다. 그러나, Gödel의 이 定理에 의해 밝혀진대로 初等數論에는, 고정적인 公理的方法속에 포함되지 않는, 따라서 아무리 정교한 콤퓨터로써도 해답을 낼 수 없는 문제가 무수히 존재하는 것이다. 일정한 문제가 주어졌을 때, 그것을 풀 수 있는 콤퓨터를 제작할 수는 있다. 그러나 모든 문제를 푸는 기계를 만드는 것은 불가능한 일이다. 그러나, 형식적으로 증명할 수 없는 數學的眞理가 존재한다는 것의 발견은, 영구히 밝힐 수 없는 진리의 존재라든가 〈神秘的〉인 직관에 의해서만이 파악되는 命題가 있다는 것을 뜻하지 않는다.
주어진 公理系로부터 형식적인 演繹에 의해 확립될 수 없는 數學的命題가, 非形式的인 超數學的推論에 의해서 확립될 수 있다는 것은 이미 앞에서 본 바와 같다.

콤퓨터에 고유한 제약은, 生命이나 人間知性을 自然科學(物理, 化學등) 의 용어를 사용해서 설명할 수 없음을 뜻하는 것은 결코 아니다. 실제, Gödel의 不完性定理는 이러한 설명의 가능성에 관해 긍정도 부정도 하지 않을 뿐더러, 人間精神의 구조나 능력이, 생명이 없는 어떤 기계보다 훨씬 복잡하고 정교하다는 것을 말해준다. Gödel의 연구는, 바로, 그 좋은 본보기인 것이다.

Summary

Whether the complete Hilbert program could be carried out was rendered very doubtful by results due to Gödel. These results may be roughly characterized as a demonstration that, in any system broad enough to contain all the formulas of a formalized elementary number theory, there exist formulas that neither can be proved nor disproved within the system.

In this paper, Gödel's incompleteness theorem is explained roughly moreover formul systems and machines being refered, related to his theory.