Bayesian 時系列 予測方法에 관한 小考
(Bayesian Method in Forecasting of time Series)

朴 一 根*

Abstract

In many forecasting problem, there is little or no useful historical information available at the time the initial forecast is required, The propose of this paper is study on Bayesian Method in forecasting.

Ⅰ : Introduction

Ⅱ : Bayesian estimation

Ⅲ : Constant Model

Ⅳ : General time series Models

Ⅴ : Conclusion

The Bayesian procedure are then used to revise parameter estimates when time series imformation is available, in this paper we give a general description of the bayesian approach and demonstrate the methodology with several specific cases.

1. 머리말

時系列分析(time - series analysis)은 系列을 構成하는 統計資料의 時間變化에 관한 觀察을 意味한다. 時系列에서 나타나는 變動(variation)은 주로 偶然變動(random variation)과 系統變動(Systematic variation)에 기인한다. 이 때 계통변동에 의하여 時系列이 보여주는 특정한 형태가 未來에도 계속된다고 가정하면 未來에 대한 豫測이 可能할 것이다. 다시 말하면 豫測하고자 하는 시점까지 適用될 수 있는 統計的 模型을 設定하여 그 模型에 있는 未知의 母數를 Bayesian 統計的 方法으로 推定함으로써 未來를 豫測하게 된다. 따라서 本 論文에서는 Bayesian의 豫測方法에 관한 過程과 方法에 대하여 Douglas C. Mongomeny, Lywood A. Jhonson 등의 理論을 中心으로 Bayesian豫測方法을 Bayesian의 推定檢定 및 一般時系列 模型을 檢討하고자 한다.

* 朴一根(前 大邱工業專門大學 工業經營科 專任講師, 現 慶北大學校, 嶺南大學校 商經大講師, 嶺南大學校 大學院 經濟學科 博士課程 修了)

2. Bayesian 推定

時系列分析에 있어서 母數(parameters)를 推定하는 경우에 Bayesian 定理를 利用하면 편리한 점이 많다. 그러면 여기에 Bayesian 定理를 檢討해보면 다음과 같다.

x : 確率變數(random variable)를 意味하고

$f(x/\theta)$: 確率密度函數(probability density 이고 function) 未知의 母數(θ)에 의하여 규정되어 진다.

θ : 母數는 確率密度 $h_0(\theta)$ (事前確率)의 確率變數로 가정한다. 물론 母數 θ의 事前情報에 대한 信賴程度에 따라 主觀的인 要素는 배제할 수 없다. θ의 값이 비교적으로 信賴程度(degree of belief)가 높으면 적은 分散을 가진 事前分布의 선택이 가능하고 θ가 不確實한 程度가 심하면 큰 分散을 가진 事前分布를 선택해야 한다. 豫測하는 상황에서 θ는 $h_0(\theta)$의 函數로 주어짐과 同時에 時系列過程에서 θ에 依存하는 條件確率分布 $f(y/\theta)$의 統計量 y가 주어진다. y는 時系列 $x_1, x_2, \cdots\cdots x_T$ 이므로 표본(sample)에서 計算可能하다. 그러므로 새로운 推定値 θ는 $h_1(\theta/y)$의 事前分布가 된다. 以上의 過程을 전개하여 Bayesian Theorem(베이즈 定理)

를 표시하면 다음과 같다.[1]

$$h_1(\theta \mid y) = \frac{h_0(\theta) f(y \mid \theta)}{\int_\theta h_0(\theta)\ f(y \mid \theta) d_\theta}$$

$$= \frac{h_0(\theta) f(y \mid \theta)}{g(y)} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{①}$$

$h_0(\theta)$: θ의 事前分布

$f(y \mid \theta)$: 주어진 θ에서 y의 條件分布

$g(y)$: y 의 周邊分布(manginal distribution)

$h_1(\theta \mid y)$: y 가 주어진 θ의 條件分布

만약 θ가 離散變量이면 ①식의 $\int$은 Σ로 대치하면 된다. ①식을 음미해 보면 $h_0(\theta)$의 事前情報를 가지고 統計量 y를 조작하면 θ의 不確實한 程度를 알 수 있다.

Bayes의 推定値 θ를 θ^*로 표시하면 θ^*는 事後確率密度의 기대로 정의된다면 θ^*는 다음과 같다.

$$\theta^* = \int_\theta \theta h_1(\theta \mid y) d_\theta \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{②}$$

θ^*는 豫測誤差의 分散를 最小化하는 極大値로 使用할 수 있다.

예를 들어 正規分布의 경우 평균이 θ, 分散 σ_y^2라면 $f(y \mid \theta)$는 다음과 같다.[2]

$$f(y \mid \theta) = N(\theta,\ \sigma_y^2)$$

$$\equiv (2\pi\sigma_y^2)\ \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{y-\theta}{\sigma y}\right)^2\right] \cdots \text{③}$$

여기에서 σy^2를 알고 있다면 θ의 事前分布도 평균 $\bar{\theta}_x'$이고 분산은 ν_θ이다.

따라서 θ의 事前分布는 $h_0(\theta)$는 다음과 같다.

$$h_0(\theta) = N(\bar{\theta},\ \nu_\theta')$$

$$= (2\pi\nu_\theta')^{-\frac{1}{2}}\ \exp\left[-\frac{(\theta-\bar{\theta}')^2}{2\nu_\theta'}\right] \cdots\cdots \text{④}$$

y가 주어지면 θ의 事後分布는 다음과 같다.

$$h_1(\theta \mid y) = \frac{2\pi(\nu_\theta \sigma_y^2)^{-\frac{1}{2}}\ \exp}{\int_{-\infty}^{\infty} 2\pi(\nu_\theta \sigma_y^2)^{-\frac{1}{2}}\ \exp}$$

$$\frac{\left\{-\frac{1}{2}\left[(\theta-\bar{\theta}')^2/\nu_\theta' + (y-\theta)^2/\sigma_y^2\right]\right\}}{\left\{-\frac{1}{2}(\theta-\bar{\theta}')^2/\nu_\theta' + (y-\theta)^2/\sigma_y^2\right\} d_\theta}$$

$$= \left(2\pi\frac{\nu_\theta'\sigma_y^2}{\nu_\theta' + \sigma_y^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\ \exp$$

$$\left\{-\frac{1}{2}\frac{\left[\theta - (y\nu_\theta' + \bar{\theta}'\sigma_y^2)/\nu_\theta' + \sigma_y^2\right]}{\nu_\theta'\sigma_y^2/(\nu_\theta' + \sigma_y^2)}\right\}$$

平均이 正規分布라고 가정하면 기대치 $\epsilon(\theta \mid y)$와 分散 ν_θ''는 다음과 같다.

1) Douglus C. Montgamery, and Lynwood A. Jhonson, *Forecasting and Time Series Analysis* (New York : McGraw – Hill Book Company, 1976).

2) *Ibid.*, pp. 242 ~ 243.

$$\bar{\theta}'' \equiv E(\theta \mid y) = \frac{y\nu_\theta' + \theta'\sigma_y^2}{\nu_\theta' + \sigma_y^2} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{⑤}$$

$\nu(\theta \mid y)$는 다음과 같다.

$$\nu_\theta'' \equiv \nu(\theta \mid y) = \frac{\nu_\theta'\sigma_y^2}{\nu_\theta' + \sigma_y^2} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{⑥}$$

이다.

③ – ④ – ⑤식을 음미해 보면 事前分布가 正規分布이고 σ_y^2 (분산)을 알고 있다면 事前分布도 역시 正規分布라는 事實을 알 수 있다.

3. Constant Model의 推定과 豫測

時系列分析에 있어서 一般的으로 時間(T)가 Constant로 볼 경우에는 다음과 같이 模型을 표시한다.[3] 이런 形態의 模型을 Constant模型이라 한다.

$$X_t = b_t + \varepsilon_t \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{⑦}$$

b는 未知의 平均을 意味하고 ε_t는 $N(0, \sigma_\varepsilon^2)$인 것을 가정한다. 그러므로 一定한 期間(T)에 있어서 確率分布는

$$f(X_t \mid b) = N(b, \sigma_\varepsilon^2) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{⑧}$$

로 가정하고 σ_ε^2는 알고 있으며 b를 推定하는 문제가 된다.

〈b의 推定〉

豫測過程에 있어서 (T=0)는 $\bar{b}'$를 推定하면 되고 이 推定値의 b는 다음과 같은 確率分布로 가정한다.[4]

$$h_0(b) = N(\bar{b}' \nu_b') \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{⑨}$$

ν_b'는 推定値 不確實程度를 의미하고, x_1을 안다고 가정하면 情報의 確實性의 程度에 따라 ν_b'를 測定할 수 있는 $h_1(\theta \mid x_1)$은 ③–④–⑤–⑥式을 利用하면 다음과 같이 유도할 수 있다.[5]

$$h_1(\theta \mid x_1) = N[\bar{b}''(1)\ \nu_b''(1)]$$

$\bar{b}''(1)$ $\nu_b''(1)$에 관하여 정리하면 다음과 같다.

$$\bar{b}''(1) \equiv bE(b \mid x_1)$$

$$= \frac{x_1\nu_b' + \bar{b}'\sigma_\varepsilon^2}{\nu_b' + \sigma_\varepsilon^2}$$

$$\nu_b''(1) \equiv \nu(b \mid x_1)$$

$$= \frac{\nu_b'\sigma_\varepsilon^2}{\nu_b' + \sigma_\varepsilon^2}$$

만약 제2期 x_2를 안다면 $h_1(b \mid x_1)$를 $b_2(b \mid x_1, x_2)$ 전치하면 Bayesian은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

3) Craig & Hogg, *Introduction to Mathematical Statistics*, 3rd ed., (N. Y. : Macmillan, 1970), pp. 216 ~ 217.

4) *Ibid.*, pp. 226 ~ 217

5) *Ibid.*, pp. 229 ~ 230.

6) *Ibid.*, p. 236.

7) *Ibid.*, p. 237.

$$h_2(b \mid x_1, x_2) = \frac{h_1(b/x_1)f(x_2/b)}{\int_b h_1(b/x_1)f(x_2/b)db}$$

h_1은 事前確率로 x_2의 最大推定値와 같이 사용하면 T_2期間의 b의 確率分布를 얻을 수 있다. ③-④-⑤-⑥式을 利用하면 h_2는 다음과 같이 나타난다.

$$h_2(b \mid x_1, x_2) = N[\bar{b}''(2), \nu_b''(2)]$$

$$\bar{b}''(2) \equiv E(b \mid x_1, x_2) = \frac{X\nu_b'' + \bar{b}'(\sigma_\varepsilon^2/2)}{\nu_b' + (\sigma_\varepsilon^2/2)}$$

$$\nu_b''(2) = \nu(b \mid x_1, x_2) = \frac{\nu_b'\sigma_\varepsilon^2}{2\nu_b' + \sigma_\varepsilon^2}$$

$\bar{x} = x_1 + x_2/2$이고, $b_2(b \mid x_1, x_2) = h_2(b \mid \bar{x})$이면 x_1, x_2의 結合確率分布를 사용하면 同一한 事後確率을 얻을 수 있다. 왜냐하면 $\bar{x}$는 b을 推定하는 充分한 統計量이기 때문이다. 以上을 一般化하여 X_T를 觀察하면 事後確率은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$h_T(b \mid x_1, x_2 \cdots\cdots X_T) = h_T(b \mid \bar{x}) = N[\bar{b}''(T), \nu_b''(T)] \cdots ⑩$$

⑩式에서 $b''(T)$와 $\nu_b''(T)$를 계산하면 다음과 같다.

$$b''(T) = \frac{x\nu_b + \bar{b}'(\sigma_\varepsilon^2/T)}{\nu_b + (\sigma_\varepsilon^2/T)} \cdots\cdots ⑪$$

$$\nu_b''(T) = \frac{\nu_b\,\sigma_\varepsilon^2}{T\nu_b' + \sigma_\varepsilon^2} \cdots\cdots ⑫$$

$$x = \frac{\sum_{i=1} x_t}{T}$$

T期間 以後의 b에 대한 Bayesian 推定量은 $b^*(T) = \bar{b}''(T)$이므로 다음과 같다.

$$b^*(T) = \frac{T}{n'+T}x + \frac{n'}{n'+T}\bar{b}' \cdots\cdots ⑬$$

⑭式은 指數曲線形態와 유사하고, ⑮式은 α가 T의 函數이고 T가 증가하에 따라 α는 적어지는 것이다. 왜냐하면 $\nu_b''(T) = \alpha(T)\sigma_\varepsilon^2$가 $T \to \infty$로 接近하면 b의 指定値는 Zero로 接近하는 것이다.

〈豫測〉

事後分布가 決定되면 豫測이 가능하므로 Constant process에 있어서 豫測方程式은 다음과 같다.[8]

$$\hat{x}_{\tau+x}(T) = \hat{b}(T) \cdots\cdots ⑯$$

⑯式에 Bayes 推定量 $b^*(T)$을 b의 推定量으로 사용하면 $T+\tau$期間의 方程式은 다음과 같다.

$$\hat{x}_{T+\tau}(T) = b^*(T) \cdots\cdots ⑰$$

b를 推定하는데 不確實性이 存在한다면 事實分散 $\nu_b''(T)$를 이용하면 ⑦式은 豫測分散 $E[(b-\bar{b})^2]$은 다음과 같다.

$$\nu[\hat{x}_{T+\tau}(T)] = \nu_b'' \cdots\cdots ⑱$$

豫測誤差의 分散은 다음과 같다.

$$\nu[e_\tau(T+\tau)] = \nu[x_{T+\tau} - \hat{x}_{T+\tau}(T)] = \sigma_\varepsilon^2 + \nu_b'' \cdots\cdots ⑲$$

⑲式의 豫測誤差分散은 Bayes 推定에 있어서는 τ(lead time)와는 獨立的이어야 한다.[9] 또한 b, x는 正規分布를 가정해야만 豫測區間 $x_{T+\tau}$의 $100(1-\gamma)$를 계산할 수 있다. 이 豫測區間을 표시하면 다음과 같다.

$$b^*(T) \pm u_{\gamma/2}\sqrt{\sigma_\varepsilon^2 + \nu_b''} \cdots\cdots ⑳$$

$u_{\gamma/2}$은 標準正規分布의 $100(\gamma/2)$의 百分率을 의미한다.

4. 一般時系列 模型

未知의 母數(parameter)가 $b_1, b_2, \cdots\cdots b_k$로 주어진다면 母數의 推定과 豫測은 時系列 模型에 있어서는 線型(linear)로 주어지게 된다. 여기에서 process 模型과 事前分布, 事後分布, 豫測, 累積豫測은 다음과 같이 표현된다.

〈Process Model〉

時系列 模型의 形態는 回歸模型으로 표시되면 다음과 같다.

$$x_t = b_1Z_1(t) + b_2Z_2(t) + \cdots\cdots + b_kZ_k(t) + \varepsilon_i = \sum_{i=1}^{k} b_iZ_i(t) + \varepsilon \cdots\cdots ㉑$$

b_i = Constant (常數) $Z_i(t)$는 模型內의 獨立變數인 t의 函數이다. ε_t는 $N(0, \sigma_\varepsilon^2)$이다. 만약 $Z_i(t) = 1$이면 b_1은 模型의 常數가 된다. 이것을 行列形式으로 표현하면 $Z(t) = [Z_1(t), Z_2(t) \cdots\cdots Z_k(t)]$로 되고, $b = [b_1, b_2, \cdots\cdots b_k]^t$로 표현된다.[10]

t가 Colum Vector이므로 전치가 可能하여 ㉑式은 다음과 같이 표현된다.

$$x_t = b^tZ(t) + \varepsilon_t \cdots\cdots ㉒$$

x_t의 確率分布는 다음과 같다.

$$f(x_t \mid b, \sigma_\varepsilon^2) = N(b^tZ(t), \sigma_\varepsilon^2) \cdots\cdots ㉓$$

Process Model의 豫測을 b를 推定하는 것이 必要하고 σ_ε^2는 미리 알고 있다고 전제한다.

〈事前分布〉

時系列分析의 以前에 $\{b_i\}$가 $E(b_i) = \bar{b}_i''\nu_{ar}(b_i) = \nu_{(ii)}$와 綜合分布이고 $C_{ov}(b_{ij}b_j) = \nu'_{ij}$이면 b'

8) G. A. F. Seber, *Linear Regression Analysis* (N. Y. : Jhon Wiley & Sons, 1977), p. 96.

9) Marc Nerlove, D. M. Grether and Jose L. Carvalho, *Analysis of Economic Time Series* (N. Y. : Academic Press, 1979), p. 79.

10) 朴聖炫, 回歸分析(서울 : 大英社, 1981), p. 216.

는 多變量正規分布가 되어 다음과 같이 표현된다.

$$h_0(b)=(2\pi)^{-\frac{1}{2}k}|\nu'^{-1}|^{\frac{1}{2}}\exp\left\{-\frac{1}{2}[b-\bar{b}']^t\right.$$

$$\left.\nu'^{-1}[b-\bar{b}']\right\}\cdots\cdots ㉔$$

$h_0(\nu)=N(\bar{b};\nu')$

㉔式에서 $\bar{b}'=E(b)$와 ν'는 事前分布의 分散, 共分散 行列이 되는 것이다. $k\times k$는 要素 ν'_{ij}의 対角行列이 되므로 行列 G'를 다음과 같이 定義하면 편리하다.[11]

$G'=\sigma_\varepsilon^2\nu'^{-1}$ ⋯⋯ ㉕

㉕式을 G'^{-1}를 구하면 다음과 같다.

$G'^{-1}=\dfrac{\nu'}{\sigma_\varepsilon^2}$ ⋯⋯ ㉖

〈最小自乘推定〉

T期後에 $x_1, x_2, \cdots\cdots x_T$를 觀察하였다면 ㉔式 事前分布를 실제자료에 의하여 변환시켜야 할 것이다.

$X=[x_1, x_2, \cdots\cdots X_T]^t$로 하면

$$Z=\begin{matrix} Z^t(1) \\ Z^t(2) \\ \vdots \\ Z^t(T)\end{matrix} = \begin{matrix} Z_1(1)\,Z_2(1)\cdots\cdots Z_k(1) \\ Z_1(2)\,Z_2(2)\cdots\cdots Z_k(2) \\ \vdots \\ Z_1(T)\,Z_2(T)\cdots\cdots Z_k(T)\end{matrix}$$

以上의 最小自乘正規方程式의 解를 求하는 것은 時系列 變數에 의하여 b를 推定하는 것이므로 正規方程式의 一般型은 다음과 같다.[12]

$Z^tZ\hat{b}=Z^tX$ ⋯⋯ ㉗

$G=Z^tZ \quad g=Z^tX$

이므로

$G\hat{b}=g$ ⋯⋯ ㉘

最小自乘推定値 $\hat{b}$는 다음과 같다.

$\hat{b}=g^{-1}$ ⋯⋯ ㉙

㉙式의 計算은 T期間의 마지막에 행해져야 하며 $\hat{b}=\hat{b}(T)$가 되는 것이다.

만약 最小自乘推定値가 扁倚되지 않는다면 b는 다음과 같다.

$b=E(\hat{b}/b)$ ⋯⋯ ㉚

分散 共分散 行列은 다음과 같다.

$C_{ov}(\hat{b})\equiv\nu=G^{-1}\sigma_\varepsilon^2$ ⋯⋯ ㉛

ν의 要素는 $v_{ij}\equiv C_{ov}(\hat{b}_i, \hat{b}_j)$이고, ν는 대칭이다. ㉛式은 σ_ε^2를 알고 있을 때 b를 推定하는 경우는 $\hat{b}$로 充分하다는 것이고 다음과 같은 多變量正規分布를 가진다는 것을 意味한다.

$$f(\hat{b}\mid b\,;Z,\sigma_\varepsilon^2)=(2\pi)^{-\frac{1}{2}k}|\nu^{-1}|\exp$$

$$\left\{\frac{1}{2}[\hat{b}-b]^t\nu^{-1}[\hat{b}-b]\right\}\cdots\cdots ㉜$$

$f(\hat{b}\mid b\,;Z,\sigma_\varepsilon^2)=N(b,\nu)$

㉔式에서 b의 事前分布가 고려된다면 $\hat{b}$의 주변確率分布는 Z와 σ_ε^2가 b를 平均하므로 계산가능하다. 이것을 표현하면 다음과 같다.[13]

$g(b)=\int_{-\infty}^{\infty}f(\hat{b}\mid b)\,h_0(b)db$

$N(\bar{b}',\nu_m)$ ⋯⋯ ㉝

㉝式에서 ν_m을 計算하면 다음과 같다.

$\nu_m=\nu'+\nu$

$=(G'^{-1}+G^{-1})\sigma_\varepsilon^2$ ⋯⋯ ㉞

〈事後分布〉

b의 事後分布는 $\hat{b}$이 주어지면 T期에서 計算可能하다.

$h_T(b\mid b)=\dfrac{h_0(b)f(\hat{b}/b)}{g(\hat{b})}$ ⋯⋯ ㉟

㉟式에서 $h_T(b/\hat{b})$는 다음과 같다.

$h_T(b\mid\hat{b})=N(\bar{b}'', \nu'')$ ⋯⋯ ㊱

㊱式에서 平均 b''와 行列 ν''의 分散 共分散 型式이 決定된다. 즉,

$\nu''^{-1}=\nu'^{-1}+\nu^{-1}$ ⋯⋯ ㊲

$\bar{b}''=\nu''(\nu'^{-1}\bar{b}'+\nu^{-1}\hat{b})$ ⋯⋯ ㊳

㊲式을 G''로 표현하는 것도 可能하다.

$G''=G'+G$

$=\sigma_\varepsilon^2\nu'^{-1}+Z^tZ$ ⋯⋯ ㊴

㊳式은 다음과 같이 표현하는 것도 可能하다.

$\bar{b}''=G''^{-1}(G\bar{b}'+G\hat{b})$

$=G''^{-1}(G\bar{b}'+g)$ ⋯⋯ ㊵

以上의 過程을 볼 때 正規事前分布가 전제될 때 事後分布도 正規分布야만 한다는 事實과 事後分布도 正規分布야만 한다는 事實과 事後分布의 母數는 事前分布의 母數와 같이 單純線型結合이어야만 한다는 점이다.

〈豫測〉

b의 事後分布가 주어지고 T期間이 計算되면 $T+\gamma$ 期間의 豫測은 事後分布 $x_{T+\gamma}$에 依存한다. 그러므로 $T+\gamma$기간의 요구조건은 다음과 같이 주어진다.

$E(x_{T+\gamma})-\sum_{i=1}^{K}b_i Z_i(T+\gamma)$

$\{b_i\}$는 ㊱式에 의하여 結合分布로 되고 $E(x_{T+\gamma})$는 平均과 같이 正規分布된 確率變數가 된다.

$\sum_{i=1}^{K}\bar{b}''_i\ Z_i(T+\gamma)=Z^t(T+\gamma)\bar{b}''$ ⋯⋯ ㊶

分散은 다음과 같다.

---

11) G. K. Bhallacharyya and R. A. Jhonson, *Statistical Concepts and Method* (N. Y. : Jhon Wiley & Sons, 1979), pp. 268～269.

12) *Ibid.*, p. 89.

13) Douglus C. Montgomery and Lynwood A. Jhonson, *op. cit.*, p. 301.

$$\sum_{i=1}^{K}\sum_{j=1}^{K} Z_i(T+\gamma)Z_j(T+\gamma)\nu''_{ij}$$
$$=Z^t(T+\gamma)\nu''Z(T+\gamma) \cdots\cdots\cdots\cdots ㊷$$

그러므로 $x_{T+\gamma}$는 다음과 같다.

$$x_{T+\gamma}=E(x_{T+\gamma})+\varepsilon_{T+\gamma} \cdots\cdots\cdots\cdots ㊸$$

㊸式의 誤差項 $\varepsilon_{T+\gamma}$는 $N(0,\sigma_\varepsilon^2)$로 전제하고 b와는 獨立이다. $X_{T+\gamma}$는 ㊵式의 平均과 ㊷式의 分散과 더불어 事後平均을 소유한 正規分布된 確率變數이므로 다음과 같이 표현된다.

$$Z^t(T+\gamma)=\nu''Z(T+\gamma)+\sigma_\varepsilon^2 \cdots\cdots\cdots\cdots ㊹$$

$x_{T+\gamma}$의 分布는 $T+\gamma$ 期間의 豫測誤差를 推定하는 것과 同一한 것이다.

$$e_T(T+\gamma)=x_{T+\gamma}-xT+\gamma\ (T)$$

㊹式에서 주어진 分散과 平均이 0인 正規分布를 전제하므로 豫測이 可能한 것이다.

$x_{T+\gamma}$에 대한 確率 T期의 事後分布가 전제된다. 以上에서 $x_{T+\gamma}$ 期間의 $100(1-\gamma)\%$의 예측구간은 다음과 같이 표현된다.

$$M(T+\gamma)\pm u_{r/2}\ s(T+\gamma) \cdots\cdots\cdots\cdots ㊺$$

期間의 $T+1\,T+2\cdots\cdots T+\gamma$와 같이 累積的인 경우에서의 $x_r(T)$는 다음과 같이 정의한다.

$$X_T(T) \equiv \sum_{j=1}^{r} X_{T+j}$$
$$=\sum_{j=1}^{r} Z_t(T+j)b \cdots\cdots\cdots\cdots ㊻$$

平均과 함께 確率變數는 다음과 같이 표현된다.

$$\sum_{j=1}^{r} Z^t(T+j)\bar{b}'' \cdots\cdots\cdots\cdots ㊼$$

分散은 다음과 같다.

$$\left[\sum_{j=1}^{r} Z(T+j)\right]^t \nu''\left[\sum_{j=1}^{r} Z(T+j)\right]+r\sigma_\varepsilon^2$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots ㊽$$

累積要求가 正規分布이면 $x_r(T)$의 Bayesian豫測區間은 ㊺式에 의하여 구해질 수 있다.

5. 맺음말

Bayesian時系方法은 (b_i)가 線型일 때 process 模型에 適用可能하다. σ_ε^2와 ε_t는 正規分布로 가정할 때 線型模型에는 가능하나 非線型模型에서는 最小自乘法의 적용이 不可能하므로 Bayesian推定方法이 부적당하게 된다. 要求過程이 正規分布를 이루면 多變量正規分布인 b를 選擇해야만 가능하다. Bayesian推定方法은 새로운 觀察資料의 事前情報가 많을 때 未來期間에 대한 確率分布의 推定이 正確하게 될 수 있다. Bayes推定量의 性質을 요약하면 一致推定量 漸進的인 有效推定量 最小充分統計量函數라는 점이다. 한편 利用面에서 最大推定量과 비교해 볼 때 標本크기가 적을 경우는 Bayes 推定量을 안심하고 利用할 수 있다. 더우기 近代에 이르러 意思決定問題가 대두됨에 따라 Bayes方法은 適用対象이 擴大되고 있는 점이 주목할만하다.

參 考 文 獻

1) 朴聖炫, 回歸分析, 서울：大英社, 1981.
2) 尹起重, 數理統計學, 서울：博英社, 1983.
3) 林陽澤, 統計學, 서울：大英社, 1982.
4) Bhallacharyya, G. K. and R. A. Jhonson, *Statistical Concepts and Method*, N. Y. : Jhon Wiley & Sons, 1977.
5) Bickel, P. J. and K. A. Doksun, *Mathematical Statistics*, Holden-Day Inc., 1977
6) Craig, R. A. and Hogg, *Introduction to Mathematical Statistics*, 3rd ed., N. Y.: Macmillan, 1970.
7) Draper, N. R. and H. Smith, *Applied Regression Analysis*, N. Y. : Jhon Wiley & Sons, Inc., 1966.
8) Montgomery, Douglas C. and Lynwood A. Jhonson, *Forecasting and Time Series Analysis*, New York : McGraw-Hill Book Co., 1976.
9) Nerlove, Marc, Grether, D. M. and Jose L. Carvalho, *Analysis of Economic Time Series*, N. Y. : Academic Press, 1979.
10) Seber, G. A. F., *Linear Regression Analysis*, N. Y. : Jhon Wiley & Sons, Inc., 1977.