

# 分割링에 관한 應力解析

## Stress Analysis of Split Ring

李永武\*·趙宣彙\*\*·南俊祐\*\*\*  
(Y. M. Lee · S. W. Cho · J. W. Nam)

### Abstract

Stress analysis of split ring with four different radius ratios under the compressive load is made by the photoelastic experiment and the numerical analysis through the FEM.

The results of the two methods agreed well.

Above results are also compared with those of the theoretical formula in order to confirm the range in which the formula of the curved bar is applied in connection with the radius ratio.

The results of the two methods agreed well with those of the formula for the radius ratio, 3/2 and 9/7 within small errors of around 7% and 5% respectively.

### 기 호

D : 시편의 직경  
E : 영 율  
 $f\sigma$  : 재료고유의 프린지 값  
h : 시편의 두께  
N : 프린지 차수  
n : 정수차 프린지 값  
P : 하 중  
p : 최대 주응력  
q : 최소 주응력  
 $r_o$  : 분할링의 외부반경  
 $r_i$  : 분할링의 내부반경  
 $\gamma$  : Analyzer의 회전각도  
 $\nu$  : 포아송비  
 $\sigma_y$  : y축 방향의 법선응력

$\sigma_z$  : z축 방향의 법선응력  
 $\tau_{yz}$  : y, z면의 전단응력  
S : 임의의 stress trajectory  
 $\beta$  : p와 p-q 그래프의 접선이 이루는 각  
 $\sigma_r$  : 반경방향의 법선응력  
 $\sigma_\theta$  : 원주방향의 법선응력  
M : 굽힘 모멘트

### 1. 序 論

工作機械의 소형 分割링 클러치, 피스톤링과 같이 分割形의 링은 用途, 形狀 그리고 荷重狀態도 多樣하다. 그러므로 이에 對한 正確한 應力解析은 機械要素의 應力評價 또는 實際의인 設計에 도움을 줄 수 있다.

本 論文에서는 Fig. 1과 같이 半徑方向으로 壓

\* 서울대·大學院

\*\* 서울대·工大·機械設計學科

\*\*\* 國民大·工大·機械設計學科

縮荷重을 받는 分割링에 對하여 光彈性實驗을 通하여 얻어진 實驗結果와 有限要素法으로 求한 數值解析의 結果를 比較 檢討하였다. 또한 H Golovin, L. Parandtl<sup>(1)</sup> 에 의해서 구해진 순수굽힘을 받는 曲線보에 對한 應力公式과도 比較 檢討하였다.

本 實驗에서는 에폭시 레진(epoxy resin)을 試片으로하여 等傾線圖와 等色線을 求하여 slope-equilibrium method<sup>(2)</sup> 를 利用해서 各 斷面에서의 應力分布狀態 및 最大應力을 考察하였다. 또한 理論公式이 이들의 結果에 어느정도 適用될 수 있는 지도 比較하였으며 分割링의 半徑比의 變化에 따른 應力分布狀態도 比較하였다.

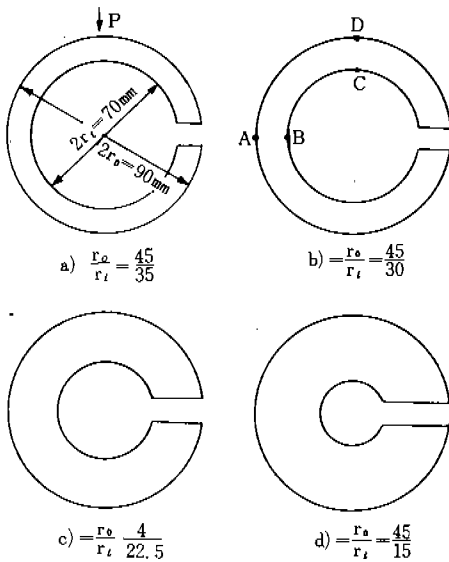


Fig. 1 Specimen of different configurations

2. 實驗裝置 및 實驗方法

(1) 試片

實驗에 使用된 試片은 두께 6mm의 에폭시 레진으로 그 機械的 性質은 영률이 280kg/mm<sup>2</sup>, 引張強度 2.5kg/mm<sup>2</sup>, 포아송比가 0.37이다. 이 材料를 Fig. 1과 같은 모양의 두께 3mm 模型板에 양면데이프를 부착하여 加工하였으며, 加工應力이 생기지 않도록 30,000 rpm의 高速 에지 피니싱 머신(edge finishing machine)을 使用하였다.

(2) 材料의 프린지(fringe)값 測定

試片 材料의 프린지 값은 一般의으로 定하여져 있지만 溫度와 時間에 따라 조금씩 變하므로 實驗의 正確性을 위해서 實驗前에 프린지 값을 測定하였다. 試片과 같은 材料의 두께 6mm, 直徑 45mm의 圓板을 製作하여 壓縮荷重 120kg, 160kg을 가하여 Y축상의 프린지 값을 Tardy method<sup>(3)</sup>를 利用하여 求하였다. 여기서 얻어진 프린지 次數 N과 프린지 값은 Table 1과 같으며 이것들을 平均하여 材料의 프린지 값 fσ를 1.1kg/mm로 하였다. 以上에서 본 材料의 特性은 Table 2와 같다.

Table 1. Experimentally measured material fringe values

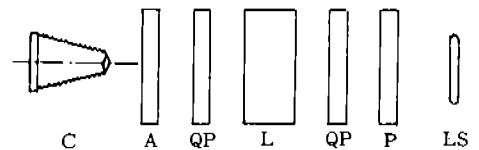
P	120 kg		P	160 kg	
	$\frac{N \cdot f \sigma}{Y(mm)}$	N		$\frac{N \cdot f \sigma}{Y(mm)}$	N
15.0	2.238	1.0919	10	3.566	1.0957
17.5	1.972	1.1025	15	2.955	1.1028
22.5	1.500	1.0865	20	2.327	1.0883
25	1.238	1.1064	25	1.667	1.1096
40	0.183	1.2129	30	1.117	1.0849

Table 2. Specifications of epoxy resin.

영 율(E)	280 kg/mm <sup>2</sup>
프 와 송 비(ν)	0.375
재료의 프린지값(fσ)	1.1 kg/mm
인 장 강 도	2.5 kg/mm <sup>2</sup>

(3) 實驗裝置

本 實驗에 使用된 裝置는 日本 Riken Keiki 社 製인 PA-420型으로 直徑 420mm의 polarizer와



LS : light sources                      L : loading equipment  
 P : polarizer                              A : analyzer  
 QP : quarter wave plate              C : camera

Fig. 2 Schematic arrangement of photoelastic apparatus

analyzer, 2개의 1/4-波長板을 가진 diffused light polariscope<sup>1)</sup>이며 회전기를 利用하여 쉽게 等傾線을 求할 수 있다는 長點이 있다.

(4) 實驗方法

Fig. 1 과 같이 精確한 壓縮荷重을 加하기 위하여 試片의 位置를 荷重點의 位置와 일치 하도록 調整하였고 試片의 아래 部分에서는 接點이 하나가 되도록 하였다. 等傾線을 구하기 위해서 等色線이 나타나지 않게  $p=0.8\text{kg}$ 으로 하여 各各을 촬영하였으며 白色의 平面偏光을 利用하였고 이를 위해 1/4-波長板을 主軸에 對하여 45℃ 씩 回轉하였다. 等色線은 analyzer를 0°, 90° 씩 回轉하여 暗視野와 明視野를 얻어서 求하였다.

Fig. 1 의 A-B斷面에서의 應力分布狀態를 알기 위해서 A-B線上에 點1~6을 表示하여 各點에서의 프린지次數를 Tardy method<sup>3)</sup>를 利用하여 求하였다. 內徑 B-C面에서의 應力分布狀態를 求하기 위해서 Z축에서 反시계 方向으로 10° 씩

等間隔으로 나눈 뒤에 各點에서의 프린지次數를 測定하였다. A-B面에 있어서의 應力分布圖는 slope-equilibrium method<sup>2)</sup>를 利用하였다.

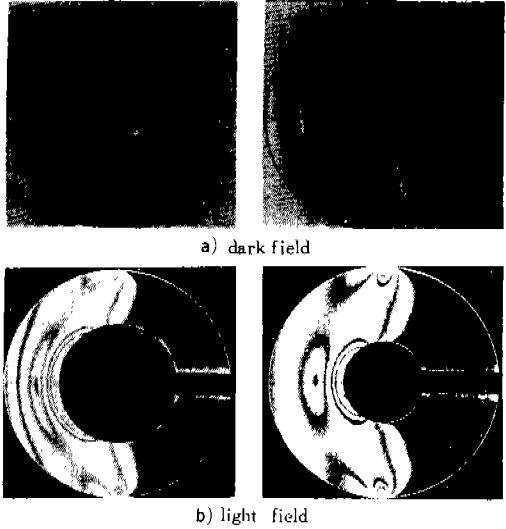


Fig. 4 Photographs of isochromatics ( $r_o/r_i=2, 3$ )

3. 結果 및 考察

(1) 光彈性實驗에 依한 解析

A-B面의 應力分布는 A-B面이 對稱面이므로 slope-equilibrium method로써 求하였다. 對稱面인 A-B는 剪斷應力이 없으므로 主應力面이다. 또한 A-B는 Fig. 3의 等傾線이 수직으로 통과하는 stress trajectory이며 Fig. 3에서 모든 等傾線이 통과하는 點 isotropic point 가 A-B上에 존재함을 알 수 있다.

斷面 A-B에서 主應力  $\sigma_y = \sigma_r$ ,  $\sigma_z = \sigma_\theta$  이다. 內徑 B-C面은 自由境界面이므로 法線應力이 없기 때문에 프린지次數에 의해서 求한 값이 接線應力이 된다. Fig. 9와 Fig. 10은 A-B面의 應力分布狀態를 보여준다. Fig. 11은 B-C面의 應力分布狀態를 보여준다.

(2) 有限要素法에 依한 解析

半徑比 9/7, 3/2, 2, 3인 各各의 경우에 대하여 Fig. 5와 같이 modelling하여 汎用 SAP IV를 利用하여 데이터만 入力하여 應力分布를 求했다. 節點數는 224個, 要素數가 181個인 四角形의 平

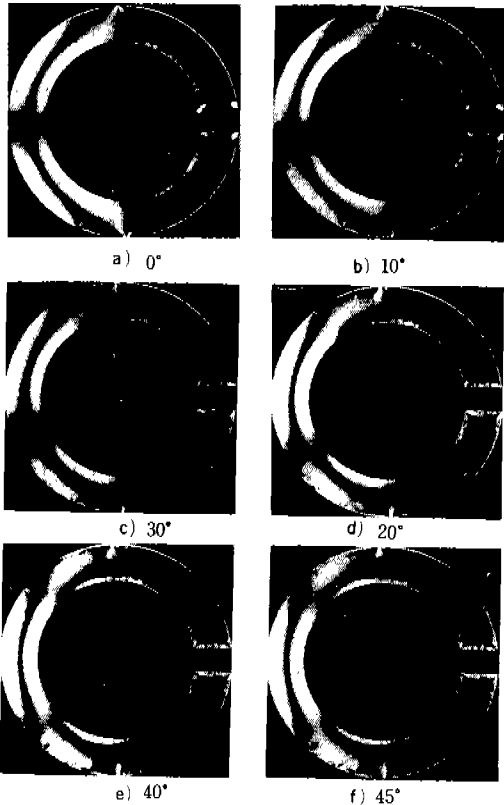


Fig. 3 Photographs of isoclinics ( $r_o/r_i=3/2$ )

面應力으로 하였고 應力기울기가 큰 部分은 잘게 나누었다. 境界條件은 Fig. 5 와 같다. 出力의 結果值 中에서 斷面 73°, 77°, 81°에서의  $\sigma_\theta$ ,  $\sigma_r$  값이 Fig. 6 에 表示되었다.

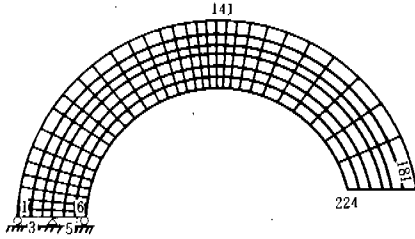
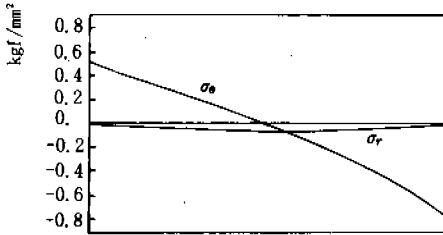
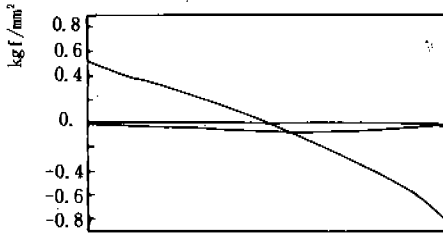


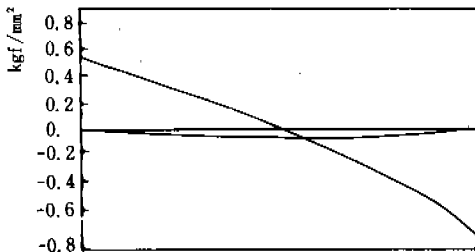
Fig. 5 Mesh of model for FEM



(a)  $\sigma_\theta$  and  $\sigma_r$  at  $\theta=73^\circ$  by FEM  
(←cross section→)



(b)  $\sigma_\theta$  and  $\sigma_r$  at  $\theta=77^\circ$  by FEM



(c)  $\sigma_\theta$  and  $\sigma_r$  at  $\theta=77^\circ$  by FEM

Fig. 6.  $\sigma_\theta$  and  $\sigma_r$  by FEM.

(3) 結果의 比較

光彈性實驗<sup>(1)</sup>에 依한 結果와 有限要素法<sup>(2)</sup>에 依한 結果는 斷面 A-B에서 거의 일치하였다(Fig.

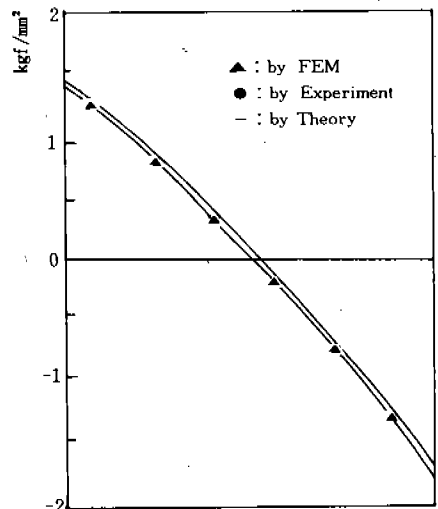
10). 斷面 B-C에서도 거의 일치하였다(Fig. 11). A 點에서의 最大引張應力은 實驗에 의해서  $\sigma_\theta = 0.546 \text{ kg/mm}^2$ , 有限要素法에 依하면  $0.5397 \text{ kg/mm}^2$ 으로 誤差는 1%였고 B 點에서의 最大壓縮應力은 實驗值은  $0.804 \text{ kg/mm}^2$ 이며 有限要素法에 의하면  $0.8297$ 로써 誤差는 3%였다. 또한 순수굽힘을 받는 곡선보로 解析했을때  $\sigma_r$ 와  $\sigma_\theta$ 는 다음과 같이 구해진다.

$$\sigma_r = \frac{4M}{hr_o^3 N} \left[ \left(1 - \frac{r_i^2}{r_o^2}\right) \ln \frac{r}{r_i} - \left(1 - \frac{r_i^2}{r^2}\right) \ln \frac{r_o}{r_i} \right]$$

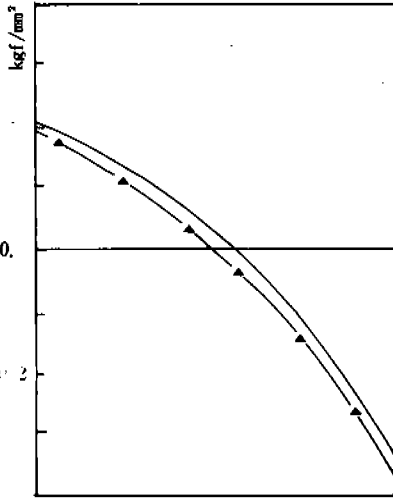
$$\sigma_\theta = \frac{4M}{hr_o^3 N} \left[ \left(1 - \frac{r_i^2}{r_o^2}\right) \left(1 + \ln \frac{r}{r_i}\right) - \left(1 + \frac{r_i^2}{r^2}\right) \ln \frac{r_o}{r_i} \right]$$

$$N = \left(1 - \frac{r_i}{r_o}\right)^2 - 4 \frac{r_i^2}{r_o^2} \ln^2 \frac{r_o}{r_i}$$

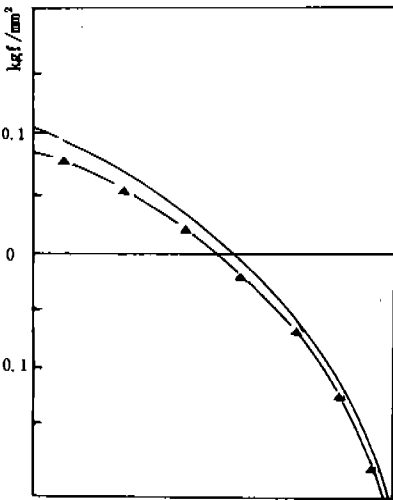
平均모우멘트  $M = 4 \times 37.5 = 150 \text{ kg} \cdot \text{mm}$ 로 했을 때 위의 式에 依한  $\sigma_\theta)_A = 0.5422 \text{ kg/mm}^2$ ,  $\sigma_\theta)_B = 0.7703 \text{ kg/mm}^2$ 이 된다. 이 結果를 위의 두 結果值와 比較했을 때  $70^\circ \sim 90^\circ$  근처에서 近似하게 일치함을 알 수 있다. 즉, 理論公式은  $70^\circ \sim 90^\circ$  사이에서 近似하게 適用됨을 알 수 있다. 半徑方向의 應力은 有限要素法에 依한 結果值가  $0.0646 \text{ kg/mm}^2$ 으로 最大壓縮應力의 8%로써 무시할 수 있을 정도로 작았다. 半徑比에 따른  $\sigma_\theta$



a)  $\frac{r_o}{r_i} = \frac{9}{7}$



b)  $\frac{r_o}{r_i} = 2$



c)  $\frac{r_o}{r_i} = 3$

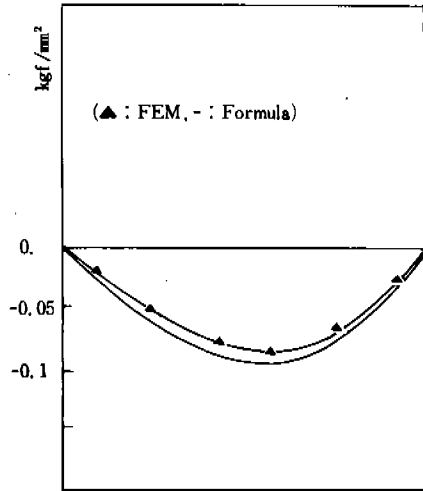
Fig. 7  $\sigma_r$  on section A-B

Table 3. Comparison of results according to radius ratios.

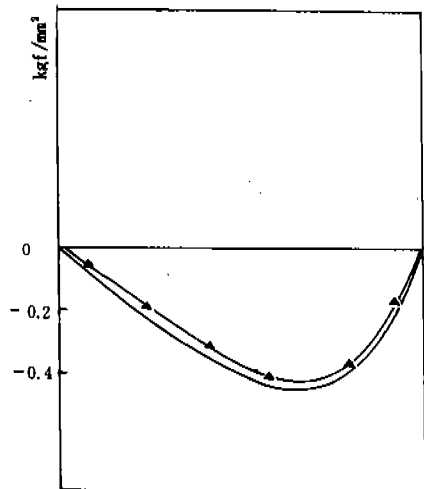
반경비	3 / 2	2	3	9 / 7
$\sigma_r$ 최대값				
FEM값	-0.804	-0.38901	-0.01752	-1.83
공식값	-0.7703	-0.3447	-0.020	-1.75
오차	7%	12%	12.5%	5%

와  $\sigma_r$  값을 Fig. 7 과 Fig. 8 에서 비교하였다. 荷重  $P=4kg$  일 때 단면 A-B의 半徑比에 따른  $\sigma_r$  값의 有限要素法과 理論公式에 의한 比較值를 Table 3에 나타내었다. Table 3에서 알 수 있는 바와 같이 半徑比가 3/2, 9/7인 경우에는 작은 誤差의 범위 내에서 일치하지만 半徑比가 2, 3인 경우에는 誤差가 10% 以上으로 상당히 큼을 알 수 있다.

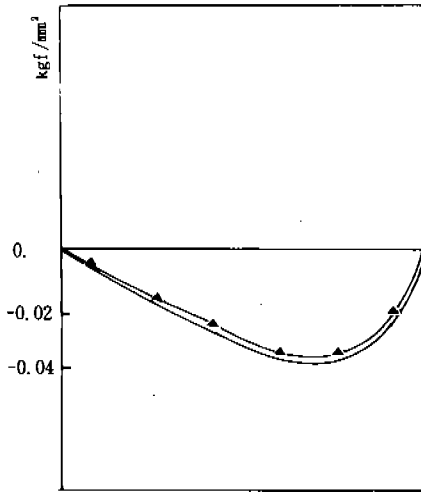
Fig. 9, Fig. 10 그리고 Fig. 11에 實驗值(-o-)와 有限要素法(-△-) 그리고 理論式(—)에 의



a)  $\frac{r_o}{r_i} = \frac{9}{7}$



b)  $\frac{r_o}{r_i} = 2$



c)  $\frac{r_o}{r_i} = 3$

Fig. 8  $\sigma_y$  on section A-B

한 결과를 비교하였다. 즉 Fig. 7, Fig. 8, Fig. 9, Fig. 10 그리고 Fig. 11로부터 실험값과 有限要素法の 결과는 全斷面に 걸쳐서 잘 일치함을 알 수 있다. Fig. 12에는 半徑比가 3/2, 2인 경우에 斷面 B-C와 A-D에서의 應力分布를 실제 斷面に 有限要素法の 결과值로 단위없이 傾向값을 나타내었다.

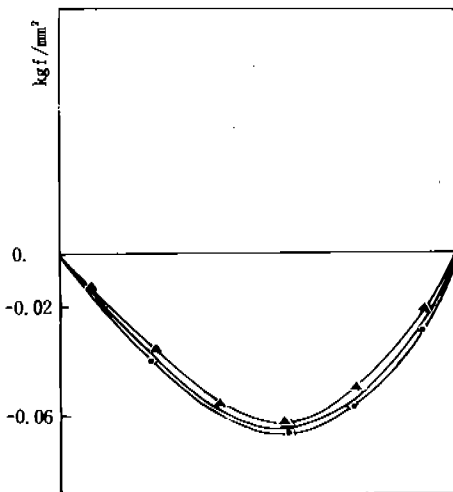


Fig. 9  $\sigma_y$  on section A-B ( $r_o/r_i=3/2$ )

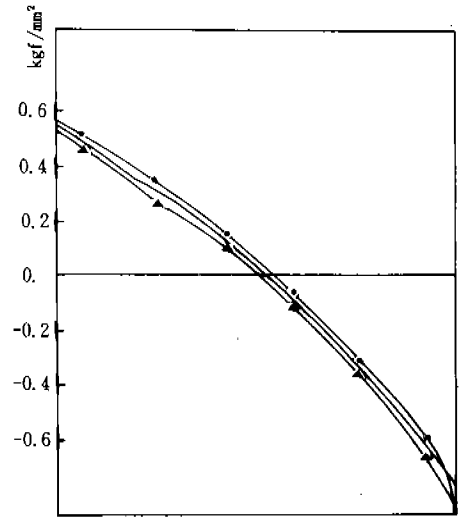
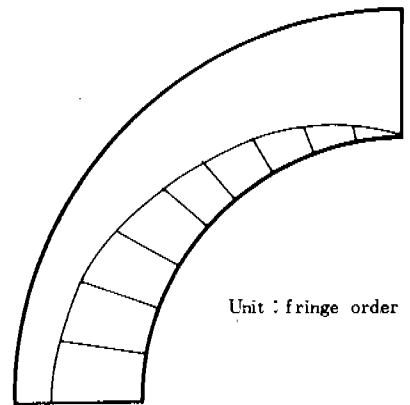


Fig. 10  $\sigma_z$  on section A-B ( $r_o/r_i=3/2$ )



$\sigma_\theta$  on section B-C ( $r=30\text{mm}$ ) by photoelasticity

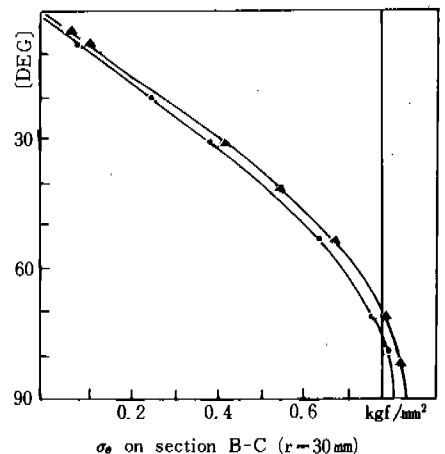


Fig. 11  $\sigma_\theta$  on section B-C ( $r_o/r_i=3/2$ )

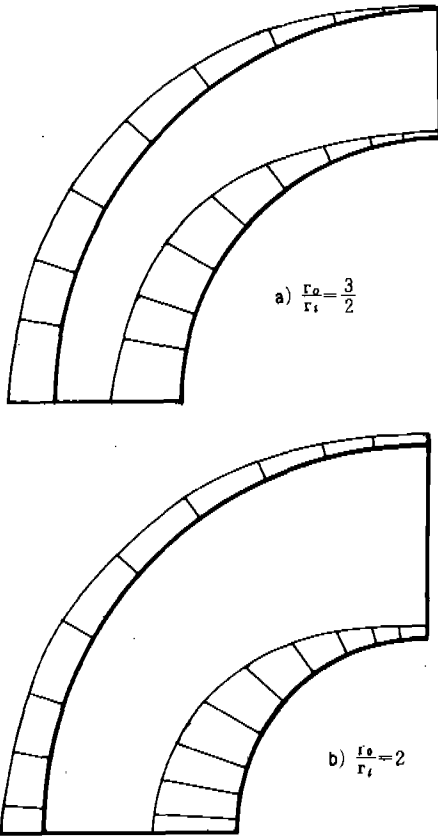


Fig. 12 Stress distribution on section A-D and B-C

#### 4. 結論

半徑方向의 壓縮荷重을 받는 分割링에 對하여 光彈性實驗과 有限要素法에 依한 數值解析의 結果 및 曲線보의 理論式을 適用한 結果를 比較檢

討한 結果 다음과 같은 結論을 얻을 수 있었다.

- (1) 90° 断面에서 最大壓縮 및 引張應力은 實驗值의 有限要素法의 結果를 比較할 때 잘 일치하였다.
- (2) 半徑比에 따른 有限要素法과 曲線보 公式의 結果로부터 半徑比 3/2, 9/7인 경우가 더 잘 일치하므로 이 公式을 適用할 수 있다. 誤差는 7% 범위이다.
- (3) 光彈性實驗과 有限要素法의 結果는 全断面에 걸쳐서 잘 일치하였다.

#### 參考文獻

- (1) S. P. Timoshenko and J. N. Goodier, Theory of Elasticity, McGraw-Hill Kogakusa, Ltd. (1970)
- (2) Frocht, M. M., Photoelasticity, Vol. II (1941), John Wiley & Sons (1941)
- (3) J. W. Dally and W. F. Riley, Experimental Stress Analysis, McGraw-Hill Book Company (1965)
- (4) Klaus-Jürgen Bathe, E. L. Wilson and F. E. Peterson, SAPIV, Report NO. EERC 73-11 Revised (1974)
- (5) Kuske, A and Roberston G, Photoelastic Stress Analysis, John Wiley & Sons (1974)
- (6) C. S. Desai and J. F. Abel, Introduction to the Finite Element Method, Van Nostrand Reinbond Company (1972)