

# 对数正規確率紙를 利用한 壽命試驗 데이터의 解析方法

## Analysis of the Reliability Test Data by Log. Normal Probability Paper

徐 浩 福\*  
Ho Bok Seo

### 1. 머릿말

測定値의 데이터를 그림으로 나타내면 “종을 거꾸로 얹어 놓은 모양(Bell Shaped Curve)”의 正規分布를 이루는 것은 잘 알려진 사실이다.

그러나 壽命試驗 데이터의 경우는 分布의 형이 찌그러지게 된다.

壽命分布는 Weibull分布<sup>(1)</sup>에 따르므로 Weibull分布에 의한 해석을 하여야 하는 것이 원칙이나 對數正規分布로 近似시켜서 해석을 하여도 실용상 큰 지장은 없다. 壽命試驗의 경우는 파괴시험이며 장시간의 시험을 요하므로 적은 시료를 시험하는 것이 일반적이다. 특히 자동차공업에 있어서 壽命試驗은 중요한 品質特性의 하나이며 자동차의 조립에 쓰이는 수만개 부품의 壽命을 예측하는 것은 매우 중요한 일이다.

따라서 이 적은 시료에서 얻어낸 데이터가 이용하여 “어떻게 수명의 예측을 올바르게 할 것인가?” 하는 문제, 즉 信頼性의 推定(Reliability Inference)과 로트의 判定이 중요한 문제인 것이다. 이러한 문제의 한 가지 방법으로서 외국에서 이미 널리 활용되고 있는 對數正規確率紙를 이용한 壽命데이터의 해석 방법을 소개하고자 한다.

### 2. 對數正規分布와 對數正規確率紙

母平均  $\mu$ , 母標準偏差  $\sigma$ 인 正規分布曲線은 다

음의 確率密度函數로 나타내어진다.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

이 正規分布의 累積分布曲線은 그림1과 같은 곡선이 되며 이 곡선 상의 임의의 점  $x$ 에서 높이  $\Phi(x)$ 는

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

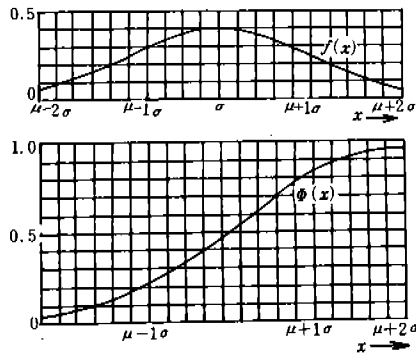


그림 1. 正規分布曲線 및 正規分布의 累積分布曲線

그림1에서 알 수 있는 바와 같이 累積分布曲線은 S자를 늘여 놓은 듯한 곡선의 모양을 이루고 있다. 그러나 가로축에  $\mu \pm u\sigma$ 의 눈금을 잡고 이에 대응하는  $\Phi(x)$ 의 값을 구하여 세로축에 잡으면 누적분포곡선은 직선으로 바뀌게 된다.

正規確率紙는 세로축에  $\Phi(x) \times 100$ 의 눈금을 잡

\* 正會員, 大宇自動車(株)

고 가로축에 대응하는  $x$ 의 값을 등간격을 취한 그래프이다. 正規確率紙는 以上에서 설명한 원리를 이용하여 간편하게 分布의 正規性을 조사하거나 평균치나 표준편차 등을 近似的으로 해석하는 데에 널리 쓰이는 확률지(Probability Paper)의 일종이다. 그러나 앞에서 설명한 바와 같이 壽命試驗데이터는 對數正規分布에 近似하게 되므로 壽命데이터  $x$  대신 對數를 취한 값  $\ln x$ 를 이용하여 對數正規分布로서 해석한다.

正規分布의  $x$ 를  $\ln x$ 로 바꾸면 對數 正規分布 曲線은

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}} & x \geq 0 \\ f(x) &= 0 & x < 0 \end{aligned} \right\}$$

로 된다.

여기서 母平均  $\mu$ 가 母標準偏差  $\sigma$ 에 비하여 충분히 큰 경우는 이 분포도 正規分布에 따르게 된다. 마찬가지로 對數正規確率紙는 正規確率紙의 가로축 눈금을  $x$ 대신  $\ln x$ 로 취한 것이며 가로 및 세로축에  $\ln x$  및  $\Phi(x) \times 100$ 의 눈금을 갖는 그래프 용지이다. 對數正規確率紙를 사용하게 되면 壽命데이터가 직선으로 나타나게 되어 統計分布의 모양을 알 수 있게 되며 이를 이용하여 수명의 예측이나 平均值, 散布 등의 推定을 일정한 確률로서 할 수 있다. 이때 동일 母集團에서 얻어낸 시료가 아니거나 피로한계에 가까운 점에서 시험하여 얻어진 데이터의 경우는 近似值線(line of best fit)에서 많이 벗어나게 되므로 주의하여야 한다.

### 3. 對數正規確率紙에 의한 壽命데이터의 解析方法

壽命試驗은 앞서서도 설명한 바와 같이 파괴 시험이고 시간이 많이 걸리게 되므로 적은 시료를 시험하여 이 결과에 따라 수명의 예측이나 信頼性의 推論을 하지 않으면 안된다. 동일한 시험 조건에서 동일하다고 생각되는 시료를 랜덤하게 뽑아서 수명시험에 걸었을 때 수명시험의 결과는 다소 큰 散布(dispersion)를 나타내는 것이 보

통이다. 시료의 크기가 적고 散布가 크므로 다른 시험결과와 비교하거나 規格과의 對比에 있어서 散布를 고려하지 않은 平均值만의 對比는 아무런 의미가 없는 것이다.

따라서 이러한 對比 또는 判定을 하는 경우에 일정한 判定基準, 예를들면 殘存確率<sup>(1)</sup>  $PU_{90}$  또는  $PU_{10}$  등을 정하여 놓고 이에 대응하는 壽命特性은 어떠한가? 또 이들 두 점간의 壽命의 變化, 즉 散布度(degree of dispersion)는 어떻게 변화하는가? 등에 따라서 判定하게 되면 매우 쉽게 비교할 수 있게 된다.

자동차공업의 경우에는 사용하는 부품 또는 제품에 대하여 그림 2와 같이 각각 이러한 殘存確率을 信頼性 試驗規格으로 정하여 놓고 이들의 값에 일정한 信頼範圍를 정하여 수명의 예측에 사용한다.

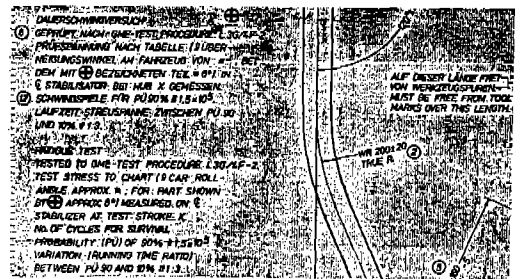


그림 2. 殘存確率에 의한 壽命 試驗規格

이제부터 對數正規確率紙에 의한 壽命 데이터의 해석방법에 관하여 설명하고자 한다. 그림 3은 비교하고자 하는 2가지 시험결과를 플로트한 것이다. 判定기준의 하나는 90% 殘存確率에서의 故障壽命(cycle to failure; CTF로 표시하기도 한다)이다.

6개를 시험하던, 30개를 시험하던 간에 시험된 시료의 殘存率에 따라 몇회 정도의 수명 시험에 견디어 낼 수 있는가를 결정할 수 있게 된다. 이와 같은 방법을 이용하게 되면 동일한 부품을 연속하여 시험했을 때 수명의 예측을 올바르게 할 수 있게 된다.  $PU_{90}$ 을 정한 것은 임의적이며, 필요에 따라  $PU_{95}$ ,  $PU_{99}$ 를 지정하고 이에 따른 耐久壽命(CTF)을 지정할 수도 있다. 여기서 지정한 殘存確率은 10, 15 또는 1%의 故障이 생겨

수명시험결과:

설계치 X

PU<sub>90</sub> 34,500 CTF

Degree of Dispersion 90 : 10% = 1 : 12.9

Sample Mean 181,150 CTF

Sample Size 10

설계치 Y

PU<sub>90</sub> 82,000 CTF

Degree of Dispersion 90 : 10% = 1 : 2.28

Sample Mean 128,571 CTF

Sample Size 6

Statistical Test Evaluation Based on the Log. Normal Distribution

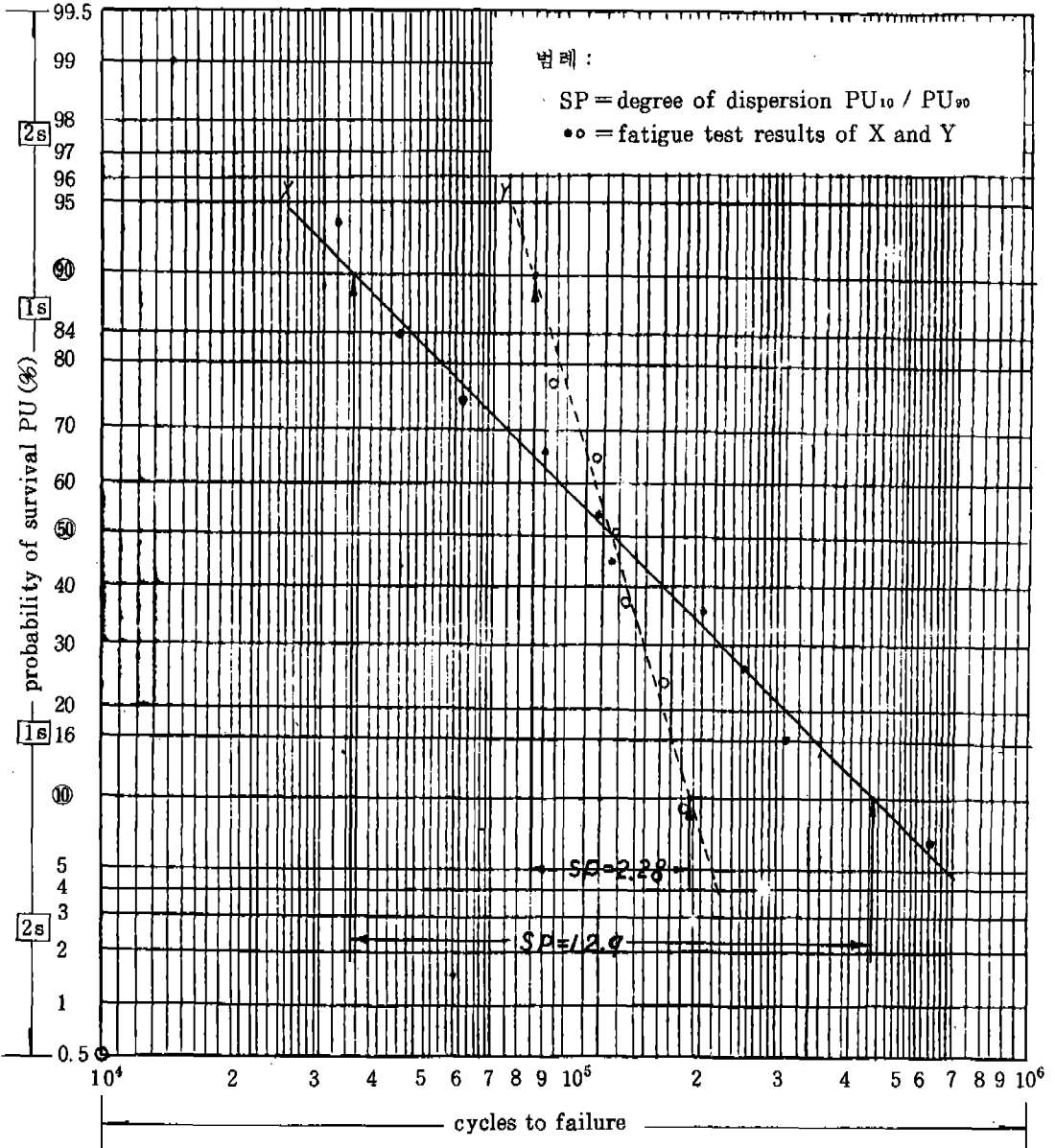


그림 3. 2개의 耐久試驗 데이터의 比較

도 좋다는 의미는 아님을 주의하여야 한다. 確率紙上의 직선의 기울기는 동일부품을 연속하여 시험하는 경우의 散布의 尺度이다. 이 기울기는 故障壽命 (CTF) 과의 관계, 즉  $PU_{90}$  에 대한  $PU_{10}$  의 比로도 정의할 수 있다.

만일 이 비율이 크면 散布가 크고 기울기는 낮아지게 된다. 비교적 많은 양을 생산하게 되면

散布가 적어지게 된다.

제품의 信賴性이라고 하는 것은 새로운 제품이 최고 몇회 정도의 耐久試驗에 견디어 낼 수 있는가 하는 것이 아니고 가장 좋은 제품과 가장 나쁜 제품간의 차이가 얼마나 적은가 하는 데에 있는 것이다. 殘存確率에 의한 耐久性의 評價에 있어서는  $PU_{90}$  의 값뿐만 아니라  $PU_{90}$  과  $PU_{10}$  간

Statistical Test Evaluation Based on the Log. Normal Distribution

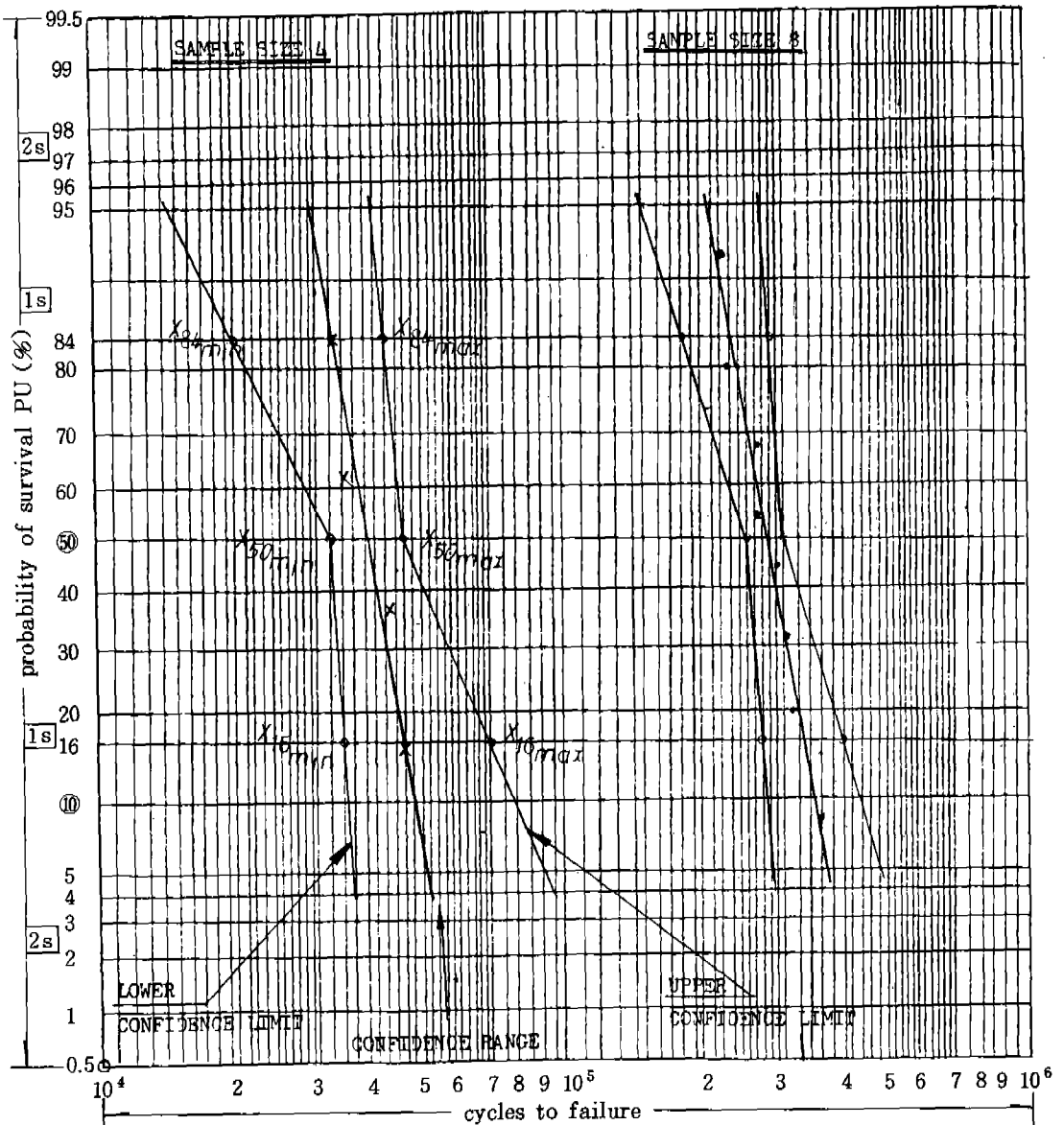


그림 4. 試料의 크기에 따른 信賴區間의 差異

시험 조건: 시험하중 1770 N, 시험주파수  $15 \pm 4$  Hz

내구시험규격: 상부콘트롤램의 수명의 기대치는 잔존확률 90%에서  $2.5 \times 10^4$  cycle 이상일 것 ( $PU_{90} = 2.5 \times 10^4$  cycle)

산포도는 2 이하일 것 (dispersion 90:10% = 1:2 max)

Statistical Test Evaluation Based on the Log. Normal Distribution

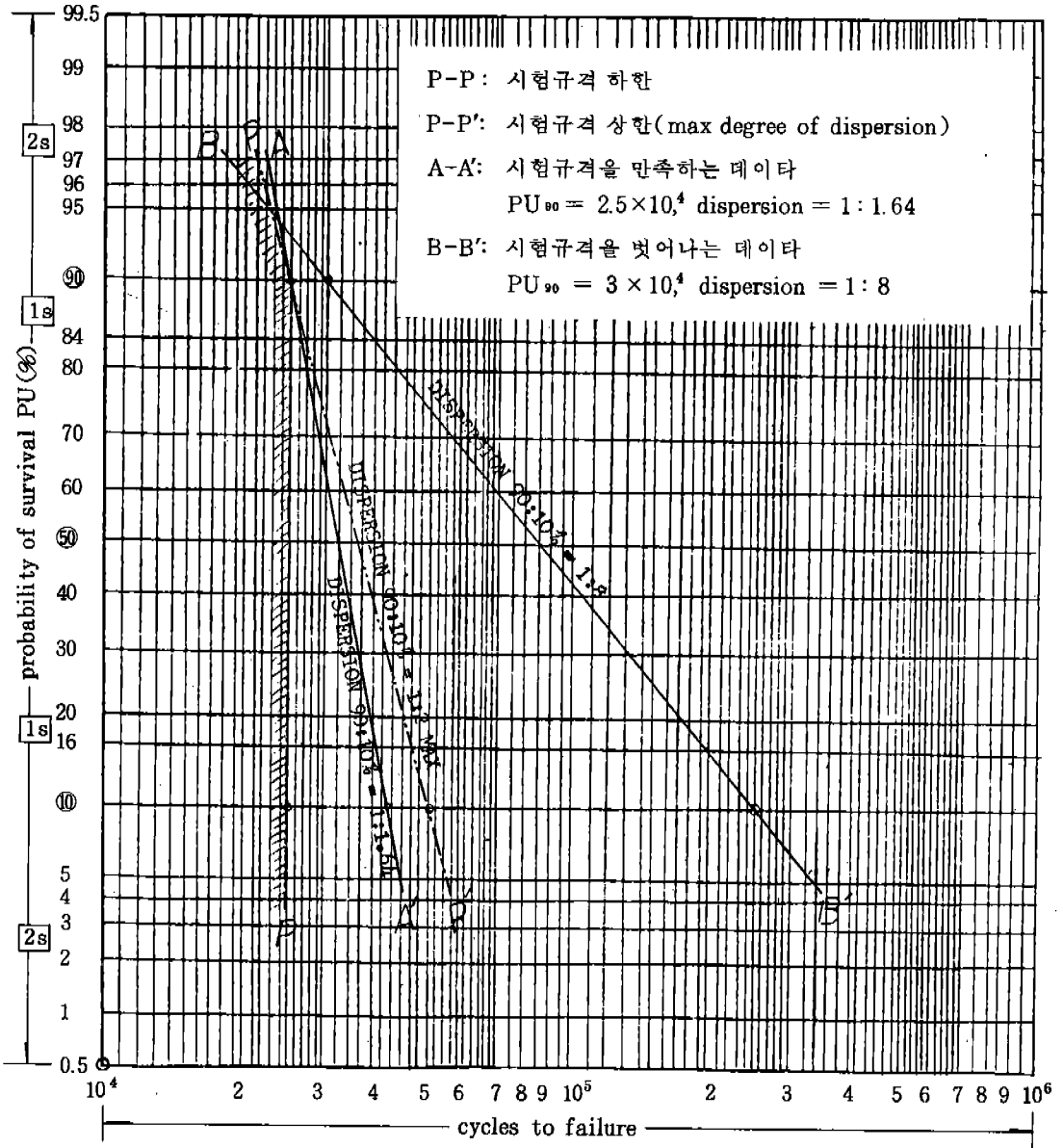


그림 5. 耐久試驗 데이터의 解析方法

의 散布度 (degree of dispersion) 역시 고려하지 않으면 안된다. 그림3에 나타낸 2가지의 설계치는 다음과 같다.

$$X : PU_{90} = 34500 \text{ cycle to failure (CTF)}$$

$$\text{Dispersion } 90\% : 10\% = 1 : 12.9$$

$$Y : PU_{90} = 82000 \text{ cycle to failure (CTF)}$$

$$\text{Dispersion } 90\% : 10\% = 1 : 2.28$$

설계치 Y가 설계치 X보다 훨씬 좋은 것을 그림에서 알 수 있다. 散布를 고려하지 않고 2개의 시료의 평균치를 비교하면 설계치 X쪽이 보다 나은 것 같이 보인다. 시료의 크기, 즉 그림에서 직선을 구성하는데 이용할 수 있는 데이터의 양은 시험결과와 정밀한 해석을 하는데 매우 중요한 역할을 한다. 일반적으로 시험결과와 해석에 있어서의 確實性 (certainty)은 시료의 수, 즉 데이터의 양이 증가함에 따라 증가하게 된다. 따라서 최소한 10개 이상을 시험하는 것이 바람직하다. 시료의 크기와 직선의 기울기에 따라 시험 결과의 不確實性 (uncertainty)은 統計적으로 계산할 수도 있다. 그림 4는 시료가 4개인 경우와 8개인 경우의 시험결과이다. 직선의 좌우측에 소위 信賴限界라고 하는 限界線이 그어져 있다. 이들 限界線은 동일한 로트에서 뽑은 부품을 耐久壽命試驗에 걸었을 때 예상될 수 있는 실제 시험결과를 95%의 確率로 信賴할 수 있는 信賴範圍 (confidence range)의 한계인 것이다. 이 시험 결과에서 알 수 있는 바와 같이 시료수가 8개인 경우의 信賴範圍가 시료수 4개인 경우에 비하여 훨씬 더 좁은 것을 알 수 있다.

#### 4. 시험방법의 해석 (Interpretation of Test Procedures)

대부분의 경우 설계부문에서는 제품 또는 부품의 동적 시험방법을 도면에 규정하여 놓고 있다. 자동차의 새 시부품인 상부 콘트롤암(upper control arm)에 관한 설계를 그림5에 나타내었다. 시험방법을 나타낸 밑에 確率紙를 이용하여 해석하는 방법을 설명해 놓았다. 직선 P-P는 시험규격의 최소한계이며 직선 P-P'는  $PU_{90}$ 과  $PU_{10}$  간에 허용할 수 있는 最大許用散布 (maxium allowable disper-

sion ; 이 시험에서는 1 : 2 인)를 나타낸다.

직선 A-A는 설계조건 A인 상부 콘트롤 암에 近似值線으로  $PU_{90}$ 에서의 값은 규격치보다 크지만 散布度 (degree of dispersion)가 1 : 8로서 매우 크므로 규격을 벗어나고 있다.

#### 5. 데이터의 타점방법

모든 시험은 동일시험 조건에서 실시하여야 하며 실제 고장이 발생되었을 때의 耐久試驗 사이클回數만을 이용하여 타점한다. 고장이 나지 않은 부품을 포함하는 경우의 통계적 해석 방법도 있으나 여기서는 다루지 않기로 한다. 실제로 타점 (plotting)은 對數正規確率紙를 이용한다.

<순서>

- (1) 얻어진 耐久試驗 데이터를 큰 값에서 작은 값의 순으로 정리한다.
- (2) 아래의 공식을 이용하여 대응하는 殘存確率값을 계산한다.

$$PU(\%) = \frac{3m-1}{3n+1} \times 100$$

m : 데이터의 順位 (rank of data)

n : 시료의 크기

例 : 그림 1의 설계치 X

내구시험데이터	순 위	잔존확률 (PU%)
$620 \times 10^3 \text{ CTF}$	1	6.5
$300 \times \text{ ''}$	2	16.1
$235 \times \text{ ''}$	3	25.8
$195 \times \text{ ''}$	4	35.5
$121 \times \text{ ''}$	5	45.2
$117 \times \text{ ''}$	6	54.8
$92 \times \text{ ''}$	7	64.5
$57 \times \text{ ''}$	8	74.2
$43 \times \text{ ''}$	9	83.9
$31 \times \text{ ''}$	10	93.5

$$\begin{aligned} \text{평균내구회수} &= \frac{\text{내구시험 데이터의 합계}}{\text{시료의 크기}} \\ &= \frac{1,811,000}{10} = 181,100 \text{ (Cycles)} \end{aligned}$$

(3) 메이타를 對數正規確率紙上에 타점한다(그림 3 참조).

(4) 타점된 점을 상하로 2 등분하는 직선(line of best fit)를 긋는다.

(5) 信賴限界線의 계산

$$S_{10\sigma X} = \log(X_{50}) - \log(X_{84})$$

$X_{50}$ ,  $X_{84}$ : 그림 3에서  $PU_{50}$ ,  $PU_{84}$ 에 대응하는 값(단, E는 표의 값)

$$C_{min} = \log(X_{50}) + E \cdot S_{10\sigma X}$$

$$C_{max} = \log(X_{84}) - E \cdot S_{10\sigma X}$$

$$X_{50\ max} = \text{Anti } \log(C_{max}),$$

$$X_{84\ min} = \text{Anti } \log(C_{min})$$

$$S_{max} = \frac{S_{10\sigma X}}{U}$$

$$S_{min} = \frac{S_{10\sigma X}}{L} \quad (\text{단, } U, L \text{은 표의 값})$$

$$X_{1\sigma\ max} = \text{Anti } \log(C_{max} + S_{max}),$$

$$X_{1\sigma\ min} = \text{Anti } \log(C_{max} - S_{min})$$

$$X_{84\ max} = \text{Anti } \log(C_{max} - S_{min})$$

$$X_{84\ min} = \text{Anti } \log(C_{min} - S_{min})$$

X의 값을 그림에 그려 넣고 직선으로 잇는다(그림 4 참조). 또 앞의 예제에서 수명의 관측을 일정시간 단위로 구분하여 관측하는 경우는 고장수가 1개 이상이 되는 경우가 있다. 이 경우

일정 시간 단위로 관측한 경우

순 위 (m)	수 명 ( $N \times 10^5$ )	$N_m$ 시의 고장수 ( $x_m$ 개)	잔존 확률 (PU %)
1	6.20	1	6.5
2	3.00	2	16.1
4	1.95	1	35.5
5	1.21	1	45.2
6	1.17	3	54.8
9	0.43	1	83.9
10	0.32	1	93.5

는 순위(rank)를 붙이는 방법만이 다르며 나머지는 동일하게 해석하면 된다.

아래의 표는 예제를 일정시간 단위로 구분하여 관측하였을 경우의 殘存確率을 계산한 표이다.

이상에서 설명한 近似值線(line of best fit) 및 信賴限界線의 계산을 컴퓨터 플로터(computer controled plotter)를 이용하여 신속히 해석하는 방법도 이미 개발되어 실용화 되어있다(美國의 GM社 및 西獨의 Adam Opel社).

주(1) Weibull분포 - Weibull분포의 확률밀도 함수는

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= \frac{m}{\alpha} (x-\gamma) e^{-\frac{(x-\gamma)^m}{\alpha}} & x \geq \gamma \\ f(x) &= 0 & x < \gamma \end{aligned} \right\}$$

로 나타내며  $\alpha$ : 척도함수,  $m$ : 형상모수,  $\gamma$ : 위치모수의 세 가지 모수에 따라 曲線의 形狀이 決定된다. 特別  $m=1$ 일때는 指數分布를 나타내며  $m=2\sim 4$ 에서는 正規分布에 近似하게 된다.

주(2) 殘存確率(probability of survival): 임의의 시점에 있어서 確率 $R_{(t)}$  %로 殘存할 確率을 말하며  $PU_{50}$ ,  $PU_{84}$ ,  $PU_{90}$  등으로 나타낸다.

References

1. Reliability Engineering-Procedures, Tables work sheets and problems, GM Institute.
2. E. Kreyszig, "Introductory Mathematical Statistics," 1970.
3. 塩見弘, 信賴性工學入門, 1972
4. 中里博明·武田知己, 二項確率紙の使い方, 1971. 2
5. 眞壁肇, ワイブル確率紙の使い方, 1977

正規確率紙 (NOPP) 上에서 信賴區間을 구하기 위한 數值表

sample size (n)	90 % confidence			95 % confidence			99 % confidence		
	E	U	L	E	U	L	E	U	L
2	4.465	.0627	1.960	8.986	.031	2.240	45.019	.0063	2.807
3	1.686	.277	1.731	2.484	.159	1.920	5.730	.022	2.302
4	1.176	.342	1.613	1.591	.268	1.765	2.920	.154	2.066
5	.953	.422	1.525	1.243	.348	1.666	2.059	.227	1.930
6	.823	.480	1.490	1.050	.408	1.594	1.646	.287	1.828
7	.743	.523	1.449	.925	.454	1.549	1.401	.336	1.756
8	.670	.557	1.419	.836	.491	1.512	1.237	.376	1.703
9	.620	.584	1.392	.769	.522	1.479	1.118	.409	1.658
10	.580	.608	1.370	.715	.548	1.453	1.028	.438	1.619
11	.546	.628	1.353	.672	.570	1.432	.955	.465	1.587
12	.518	.644	1.338	.635	.589	1.411	.897	.486	1.561
13	.494	.660	1.323	.604	.605	1.393	.847	.506	1.536
14	.473	.673	1.313	.577	.621	1.378	.805	.524	1.514
15	.455	.685	1.301	.554	.634	1.365	.769	.539	1.495
16	.438	.696	1.291	.533	.646	1.354	.721	.554	1.479
17	.423	.705	1.282	.514	.657	1.342	.708	.567	1.464
18	.410	.712	1.274	.497	.667	1.333	.683	.579	1.449
19	.398	.722	1.267	.482	.676	1.323	.660	.589	1.438
20	.387	.729	1.259	.468	.685	1.316	.640	.600	1.425
21	.376	.738	1.253	.455	.692	1.308	.620	.610	1.414
22	.367	.743	1.248	.443	.700	1.300	.604	.618	1.404
23	.358	.748	1.241	.432	.707	1.293	.588	.627	1.395
24	.350	.755	1.237	.422	.713	1.287	.573	.634	1.386
25	.342	.758	1.231	.413	.719	1.281	.560	.642	1.378
26	.335	.764	1.228	.404	.724	1.274	.547	.648	1.370
27	.328	.770	1.224	.396	.728	1.269	.535	.656	1.363
28	.322	.774	1.219	.388	.735	1.265	.524	.661	1.355
29	.316	.777	1.214	.380	.739	1.261	.513	.668	1.350
30	.310	.781	1.212	.373	.743	1.255	.503	.672	1.343
31	.305	.785	1.208	.367	.748	1.252	.494	.678	1.338
32	.300	.789	1.205	.360	.751	1.247	.485	.684	1.332
33	.295	.792	1.202	.355	.756	1.244	.477	.687	1.326
34	.290	.796	1.198	.349	.759	1.239	.469	.692	1.321
35	.286	.799	1.196	.343	.763	1.237	.461	.697	1.317



sample size (n)	90 % confidence			95 % confidence			99 % confidence		
	E	U	L	E	U	L	E	U	L
36	.282	.802	1.193	.338	.767	1.233	.454	.701	1.312
37	.277	.804	1.190	.333	.769	1.229	.447	.705	1.308
38	.274	.807	1.188	.329	.773	1.227	.440	.709	1.304
39	.270	.809	1.185	.324	.776	1.224	.434	.713	1.300
40	.266	.812	1.183	.320	.779	1.221	.428	.716	1.296
41	.263	.814	1.181	.316	.781	1.218	.422	.719	1.292
42	.260	.816	1.178	.312	.784	1.216	.417	.722	1.289
43	.257	.818	1.176	.308	.787	1.213	.411	.725	1.284
44	.253	.821	1.174	.304	.789	1.210	.406	.730	1.281
45	.250	.823	1.173	.300	.792	1.208	.401	.732	1.278
46	.248	.825	1.171	.297	.794	1.206	.396	.735	1.276
47	.245	.826	1.168	.294	.797	1.203	.392	.737	1.272
48	.242	.829	1.167	.290	.799	1.201	.387	.741	1.269
49	.240	.830	1.165	.287	.801	1.199	.383	.743	1.266
50	.237	.832	1.163	.284	.803	1.197	.379	.745	1.263
55	.226	.840	1.156	.270	.812	1.188	.360	.758	1.251
60	.216	.847	1.149	.258	.820	1.180	.344	.768	1.240
65	.306	.853	1.143	.246	.827	1.173	.325	.777	1.230
70	.198	.859	1.138	.237	.833	1.166	.314	.785	1.222
75	.192	.864	1.134	.229	.839	1.161	.304	.792	1.214
80	.186	.868	1.129	.222	.844	1.156	.295	.799	1.207
85	.180	.872	1.125	.216	.849	1.151	.286	.805	1.201
90	.175	.875	1.122	.210	.853	1.146	.279	.810	1.195
95	.171	.879	1.118	.204	.857	1.142	.272	.815	1.190
100	.167	.882	1.116	.199	.861	1.139	.266	.820	1.185
120	.147	.895	1.109	.175	.876	1.130	.230	.838	1.171
150	.134	.904	1.099	.160	.886	1.118	.210	.852	1.155
175	.124	.911	1.091	.148	.895	1.109	.195	.863	1.143
200	.116	.917	1.085	.138	.901	1.102	.182	.872	1.134
225	.110	.922	1.080	.131	.907	1.095	.172	.879	1.126
250	.104	.926	1.076	.124	.912	1.091	.163	.885	1.119
275	.099	.929	1.072	.118	.916	1.086	.155	.891	1.113
300	.095	.933	1.069	.113	.920	1.082	.149	.896	1.108
325	.092	.935	1.066	.109	.923	1.079	.143	.899	1.104
350	.088	.937	1.064	.105	.926	1.076	.138	.903	1.100
375	.085	.940	1.062	.101	.928	1.073	.133	.906	1.096
400	.082	.941	1.060	.098	.931	1.071	.129	.909	1.093
425	.080	.943	1.058	.095	.933	1.069	.125	.912	1.091
450	.078	.945	1.056	.092	.935	1.067	.121	.915	1.088
475	.075	.946	1.054	.090	.936	1.065	.118	.917	1.085
500	.074	.948	1.053	.088	.934	1.070	.115	.919	1.083