◉研究論文

Fourier級數를 應用한 二階 線形 常微分方程式의 解法에 관한 研究

王之錫* · 金基俊* · 李英浩*

A Study on the Solutions of the 2nd Order Linear Ordinary Differential Equations Using Fourier Series

Wang, Jee-Seok · Kim, Ki-Joon · Lee, Young-Ho

Abstract

The methods solving the 2nd order linear ordinary differential equations of the form

$$y''+H(x)y'+G(x)y=P(x)$$

using Fourier series are presented in this paper.

These methods are applied to the differential equations of which the exact solutions are known, and the solutions by Fourier series are compared with the exact solutions.

The main results obtained in these studies are summarized as follows;

1) The product and the quotient of two functions expressed in Fourier series can be expressed also in Fourier series and the relations between the Fourier coefficients of the series are obtained by multiplying term by term.
2) If the solution of the 2nd order linear ordinary differential equation exists in a certain interval, the solution can be obtained using Fourier series and can be expressed in Fourier series.
3) The absolute errors of Fourier series solutions are generally less in the center of the interval than in the end of the interval.
4) The more terms are considered in Fourier series solutions, the less the absolute errors.

1. 序 論

常微分方程式은 工學의 거의 모든 分野에서 자주 接하는 問題로서 그의 成功的인 解析은 問題解決의 必須條件이다. 常微分方程式의 解析은 주어진 初期條件이나 혹은 境界條件을 滿足하고 微分方程式에 代入하여 이를 滿足시키는 函數를 찾는 것으로 그의 解法은 一般的인 方法이 있는 것이 아니고 境遇에 따라 다르며 또한 解가 存在한다 하더라도 우리가 알고 있는 函數로 表現할 수 없는 境遇가 大部分이다. 오히려 特殊한 몇가지 境遇에 대하여서만 우리가 알고 있는 函數로 解를 表現할 수 있고 一般的으로는 表現할

* 正會員, 韓國海洋大學

수 없는 것이 大部分이다. 따라서 工學的인 現象을 適當히 假定하여 우리가 알고 있는 函數로 表現할 수 있는 解가 나오도록 微分方程式을 誘導하는 境遇가 많고 이것이 如意치 않을 때는 數値解析을 利用하기도 하는데, 이것은 常微分方程式을 解析하는 하나의 方法은 되나 解法上의 問題때문에 境界點으로부터 멀어질수록 誤差가 累積되는 缺點을 隨伴하게 된다.

本硏究에서는 二階 線形 常微分方程式의 解가 어떤 區間에서 存在한다면, 이것을 Fourier級數를 利用하여 풀 수가 있음을 보이고 그의 解法을 提示하였다. 또한 正確한 解를 알고 있는 常微分方程式에 대하여 本硏究에서 提示한 解法으로 풀고 正確한 解와 比較하였다.

2. 函數의 Fourier級數 展開

어떤 函數 $F(x)$가 區間 $a\leqq x\leqq b$에서 定義되고 連續이라 할 때 이 函數를 Fourier級數로써 表示할 수가 있는데, cosine項으로만 表示하면 다음과 같이 된다.

$$F(x)=\sigma_0+2\sum_{m=1}^{\infty}\sigma_m \cos\frac{m\pi}{l}(x-a) \quad (1)$$

여기서 $l=b-a$로서 區間의 길이이고

$$\sigma_m=\frac{1}{l}\int_a^b F(x)\cos\frac{m\pi}{l}(x-a)dx,$$
$$m=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\infty$$

이다.

또한 $F(x)$를 sine項으로만 表示하면

$$F(x)=2\sum_{m=1}^{\infty}\varepsilon_m\sin\frac{m\pi}{l}(x-a) \quad (2)$$

여기서

$$\varepsilon_m=\frac{1}{l}\int_a^b F(x)\sin\frac{m\pi}{l}(x-a)dx,$$
$$m=1,\ 2,\ \cdots,\infty$$

이다.

한편 cosine項과 sine項으로 $F(x)$를 表示하면 다음과 같다.

$$F(x)=\frac{\sigma_0}{2}+\sum_{m=1}^{\infty}\left\{\sigma_m\cos\frac{m\pi}{l}(x-a)+\varepsilon_m\sin\frac{m\pi}{l}(x-a)\right\} \quad (3)$$

式 (1), (2), (3)을 $e^{ix}=\cos x+i\sin x$의 關係를 利用하여 複素數로 表示하면 다음과 같이 된다.

$$F(x)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sigma_m e^{im\pi(x-a)/l} \quad (1)'$$

$$F(x)=-i\sum_{m=-\infty}^{\infty}\varepsilon_m e^{im\pi(x-a)/l} \quad (2)'$$

$$F(x)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}a_m e^{im\pi(x-a)/l} \quad (3)'$$

여기서 $a_m=(\sigma_m-i\varepsilon_m)/2$이다.

Fourier係數 σ_m, ε_m, a_m은 各各 다음과 같은 性質이 있다.

$\sigma_{-m}=\sigma_m$, $\varepsilon_{-m}=-\varepsilon_m$, $a_{-m}=\bar{a}_m$, $\varepsilon_0=0$, $a_0=\sigma_0/2$

Fourier係數 σ_m 및 ε_m을 求하기 위하여서는 積分을 하여야 하는데, $F(x)$가 特殊한 境遇에만 被積分函數 $F(x)\cos\frac{m\pi}{l}(x-a)$ 및 $F(x)\sin\frac{m\pi}{l}(x-a)$의 積分이 可能하고, $F(x)$가 數値로 주어지거나 $F(x)$의 一般的인 形態에 대하여서는 積分이 可能하지 않다. 이境遇 σ_m 및 ε_m을 近似的으로 求하는 方法을 本硏究의 附錄에 提示해 놓았다.

3. Fourier級數의 演算

여기서는 Fourier級數의 加, 減, 乘, 除 및 微分, 積分을 역시 Fourier級數로 나타낼 때 各係數사이의 關係를 求하려고 한다.

① 2 級數의 合, 差, 微分 및 積分

2 級數의 合과 差는 次數가 같은 項의 係數를 가지고 合과 差를 求하면 되므로 별로 어렵지 않다. Fourier級數의 積分은 項別로 積分하면 된다. 微分의 境遇도 項別로 微分하면 되나 여기에는 약간의 考慮되어야 할 事項이 있는데 仔細한 것은 參考文獻 1)을 參考하기 바란다.

② 2 級數의 곱(積)

Fourier級數로 表示된 2 函數의 곱을 역시 Fourier級數로 나타낼 때 各係數사이의 關係를 求하여 보자. 지금 區間 $a\leqq x\leqq b$에서 定義되고 連續인 2개의 函數 $F_1(x)$, $F_2(x)$를 各各 Fourier級數로 表示하여 다음과 같다고 한다.

$$F_1(x)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\omega_m e^{im\pi(x-a)/l}$$
$$F_2(x)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\gamma_m e^{im\pi(x-a)/l} \qquad (4)$$

여기서 勿論 Fourier係數 ω_m과 γ_m은 複素數이다. 2 級數의 곱을 $F(x)$라 하고 이것을 Fourier級數로 나타내어

$$F(x)=F_1(x)\cdot F_2(x)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}a_m e^{im\pi(x-a)/l} \qquad (5)$$

라고 한다. 式 (4)를 式 (5)에 代入하여 2 級數를 項別로 곱하고 次數가 같은 項을 全部 모아서 整理하면 다음과 같이 $F(x)$의 Fourier係數 a_m를 얻는다.

$$a_m=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\omega_{m-n}\gamma_n=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\omega_n\gamma_{m-n} \qquad (6)$$

③ Fourier級數의 나누기

Fourier級數로 表示된 函數를 다른 函數로 나눈 몫(商)이 區間 $a\leqq x\leqq b$에서 定義되고 連續일 때 이것을 Fourier級數로 나타낼 수 있는데 이때의 Fourier係數를 除函數와 被除函數의 Fourier係數로 나타내어 보자. 지금 $F_1(x)$를 $F_2(x)$로 나눈 몫을 $F(x)$라 하고 이것이 區間 $a\leqq x\leqq b$에서 定義되고 連續이라 하면 Fourier級數로 나타내어

$$\frac{F_1(x)}{F_2(x)}=F(x)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}a_m e^{im\pi(x-a)/l} \qquad (7)$$

여기서 $F(x)$의 Fourier係數 a_m을 $F_1(x)$, $F_2(x)$의 Fourier係數 ω_m, γ_m로 나타내려고 한다.
式(7)을 고쳐서 쓰면

$F_1(x)=F_2(x)F(x)$

이므로 여기에다 前項에서 說明한 곱의 定理인 式 (6)의 關係를 適用하면

$$\omega_m=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\gamma_{m-n}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}(\gamma_{m+n}a_{-n}+\gamma_{m-n}a_n)+\gamma_m a_0 \qquad (8)$$

ω_m, γ_m, a_n이 Fourier係數이므로 다음과 같이 놓을 수 있다.

$$\omega_m=\frac{u_m-iv_m}{2},\quad \gamma_m=\frac{\alpha_m-i\beta_m}{2},$$
$$a_n=\frac{\sigma_n-i\varepsilon_n}{2} \qquad (9)$$

第2節에서 言及한 Fourier係數의 性質을 利用하고 式 (9)를 式 (8)에 代入하여 整理하면 다음 式들을 얻는다.

$$u_m=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\{(\alpha_{m+n}+\alpha_{m-n})\sigma_n+(\beta_{m+n}-\beta_{m-n})\varepsilon_n\}+\frac{\alpha_m\sigma_0}{2} \qquad (10)$$

$$v_m=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\{(\beta_{m+n}+\beta_{m-n})\sigma_n-(\alpha_{m+n}-\alpha_{m-n})\varepsilon_n\}+\frac{\beta_m\sigma_0}{2} \qquad (11)$$

式 (10)을 $m=0$에 대하여 다시 쓰고, $\alpha_0\fallingdotseq 0$이므로 이 式으로부터 σ_0를 求하면

$$\sigma_0=\frac{2u_0}{\alpha_0}-\frac{2}{\alpha_0}\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n\sigma_n+\beta_n\varepsilon_n) \qquad (12)$$

가 된다.

式 (12)를 式 (10) 및 (11)에 代入하여 整理하면

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\alpha_{m+n}+\alpha_{m-n}}{2}-\frac{\alpha_m\alpha_n}{\alpha_0}\right)\sigma_n+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\beta_{m+n}-\beta_{m-n}}{2}-\frac{\alpha_m\beta_n}{\alpha_0}\right)\varepsilon_n=u_m-\frac{\alpha_m u_0}{\alpha_0} \qquad (13)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\beta_{m+n}+\beta_{m-n}}{2}-\frac{\beta_m\alpha_n}{\alpha_0}\right)\sigma_n+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\alpha_{m-n}-\alpha_{m+n}}{2}-\frac{\beta_m\beta_n}{\alpha_0}\right)\varepsilon_n=v_m-\frac{\beta_m u_0}{\alpha_0} \qquad (14)$$

式 (13), (14)를 매트릭스形態로 表示하면

$$\begin{aligned}&[X_1]\{\sigma\}+[Y_1]\{\varepsilon\}=\{A\}\\&[X_2]\{\sigma\}+[Y_2]\{\varepsilon\}=\{B\}\end{aligned} \qquad (15)$$

여기서

$\{\sigma\}=[\sigma_1,\ \sigma_2,\ \cdots,\ \sigma_n,\ \cdots]^T$

$\{\varepsilon\}=[\varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\ \cdots,\ \varepsilon_n,\ \cdots]^T$

이고 매트릭스 $[X_1]$, $[Y_1]$, $[X_2]$, $[Y_2]$의 m째번 行(Row), n째번 列(Column)의 要素는 各各 다음과 같다.

$$[X_1]=\left[\frac{\alpha_{m+n}+\alpha_{m-n}}{2}-\frac{\alpha_m\alpha_n}{\alpha_0}\right]$$
$$[Y_1]=\left[\frac{\beta_{m+n}-\beta_{m-n}}{2}-\frac{\alpha_m\beta_n}{\alpha_0}\right]$$
$$[X_2]=\left[\frac{\beta_{m+n}+\beta_{m-n}}{2}-\frac{\beta_m\alpha_n}{\alpha_0}\right]$$

$$[Y_2]=\left[\frac{\alpha_{m-n}-\alpha_{m+n}}{2}-\frac{\beta_m\beta_n}{\alpha_0}\right]$$

또한 $\{A\}$와 $\{B\}$의 m째번 要素는 各各

$$\{A\}=\left\{u_m-\frac{\alpha_m u_0}{\alpha_0}\right\},\quad \{B\}=\left\{v_m-\frac{\beta_m u_0}{\alpha_0}\right\}$$

이다.

式 (15)를 다시 쓰면

$$\begin{bmatrix}[X_1] & [Y_1]\\ [X_2] & [Y_2]\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\{\sigma\}\\ \{\varepsilon\}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\{A\}\\ \{B\}\end{Bmatrix} \qquad (15)'$$

이 되고 이 式으로부터 $\{\sigma\}$, $\{\varepsilon\}$을 求할 수 있다.

$$\begin{Bmatrix}\{\sigma\}\\ \{\varepsilon\}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}[X_1] & [Y_1]\\ [X_2] & [Y_2]\end{bmatrix}^{-1}\begin{Bmatrix}\{A\}\\ \{B\}\end{Bmatrix} \qquad (16)$$

式 (16)으로부터 求한 σ_1, σ_2, $\cdots$, σ_n, $\cdots$ 및 ε_1, ε_2, $\cdots$, ε_n, $\cdots$를 式 (12)에 代入함으로써 σ_0를 求하고, 式 (9)에 代入함으로써 a_n을 求한다.

4. 初期值問題

다음의 微分方程式을 區間 $a\leqq x\leqq b$에서 풀려고 한다.

$$y''+H(x)y'+G(x)y=P(x) \qquad (17)$$

初期條件은 $x=a$일 때 $y'=q$, $y=r$이다. 函數 $H(x)$, $G(x)$, $P(x)$가 區間 $a\leqq x\leqq b$에서 定義되고 連續이면 初期條件을 滿足하는 式 (17)의 解는 唯一하게 하나뿐이므로[3] y''를 다음 式과 같이 Fourier級數로 놓을 수 있다.

$$y''=\sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m e^{im\pi(x-a)/l} \qquad (18)$$

여기서 $l=b-a$, $a_m=(\sigma_m-i\varepsilon_m)/2$이고 σ_m, ε_m는 앞으로 求하여질 未知數이다. $\sigma_m/2$ 및 $-\varepsilon_m/2$이 各各 Fourier係數 a_m의 實部, 虛部라는 것을 注目하면, 다음 性質이 있음은 周知의 事實이다.

$$\sigma_{-m}=\sigma_m,\quad \varepsilon_{-m}=-\varepsilon_m,\quad a_{-m}=\bar{a}_m,\quad \varepsilon_0=0,$$

$$a_0=\frac{\sigma_0}{2}$$

式 (18)을 積分하면 다음과 같이 된다.

$$y'=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{l}{im\pi}a_m e^{im\pi(x-a)/l}+a_0x+c_1',\ (m\neq 0) \qquad (19)$$

여기서 c_1'는 積分常數이다. 初期條件, $x=a$ 일 때 $y'=q$를 利用하여 c_1'를 求하면

$$c_1'=q-a_0a-\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{l}{im\pi}a_m,\ (m\neq 0) \qquad (20)$$

이 된다. 한편 式 (19)의 a_0는 實數이므로 a_0x를 다음과 같이 Fourier의 cosine級數로 展開한다.

$$a_0x=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\phi_m e^{im\pi(x-a)/l} \qquad (21)$$

여기서

$$\phi_m=\frac{1}{l}\int_a^b a_0x\cos\frac{m\pi}{l}(x-a)dx$$

$$=\frac{a_0lf_m}{m^2\pi^2},\ (m\neq 0)$$

$$f_m=(-1)^m-1$$

$$\phi_0=\frac{1}{l}\int_a^b a_0x\,dx=\frac{a_0(a+b)}{2}$$

이다.

式 (21)을 式 (19)에 代入하여 整理하면

$$y'=\sum_{m=-\infty}^{\infty}b_m e^{im\pi(x-a)/l} \qquad (22)$$

여기서

$$b_0=\frac{a_0(a+b)}{2}+c_1'$$

$$b_m=\frac{l}{im\pi}a_m+\phi_m,\ (m\neq 0)$$

이다.

式 (22)를 한번 더 積分하면

$$y=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{l}{im\pi}b_m e^{im\pi(x-a)/l}+b_0x+c_2',\ (m\neq 0) \qquad (23)$$

여기서 c_2'는 積分常數이다. 初期條件 $x=a$일 때 $y=r$를 利用하여 c_2'를 求하면

$$c_2'=r-b_0a-\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{l}{im\pi}b_m,\ (m\neq 0) \qquad (24)$$

b_0도 實數이므로 b_0x를 Fourier의 cosine級數로 展開하면

$$b_0x=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\psi_m e^{im\pi(x-a)/l} \qquad (25)$$

여기서

$$\psi_m=\frac{1}{l}\int_a^b b_0x\cos\frac{m\pi}{l}(x-a)dx=\frac{b_0lf_m}{m^2\pi^2},$$

$$(m\neq 0)$$

$$\psi_0=\frac{1}{l}\int_a^b b_0x\,dx=\frac{b_0(a+b)}{2}$$

式 (25)를 式 (23)에 代入하여 整理하면

$$y=\sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m e^{im\pi(x-a)/l} \tag{26}$$

여기서

$$c_0=\frac{b_0(a+b)}{2}+c_2'$$

$$c_m=\frac{l}{im\pi}b_m+\psi_m,\quad (m\neq 0)$$

이다.

한편 函數 $H(x)$, $G(x)$, $P(x)$를 다음과 같이 Fourier의 cosine級數로 展開한다.

$$\left.\begin{aligned} H(x)&=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\alpha_m e^{im\pi(x-a)/l}\\ G(x)&=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\beta_m e^{im\pi(x-a)/l}\\ P(x)&=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\gamma_m e^{im\pi(x-a)/l}\end{aligned}\right\} \tag{27}$$

여기서

$$\alpha_m=\frac{1}{l}\int_a^b H(x)\cos\frac{m\pi}{l}(x-a)dx$$

$$\beta_m=\frac{1}{l}\int_a^b G(x)\cos\frac{m\pi}{l}(x-a)dx$$

$$\gamma_m=\frac{1}{l}\int_a^b P(x)\cos\frac{m\pi}{l}(x-a)dx$$

이다.

式 (27)의 첫번째 式과 式 (22)로부터 $H(x)y'$를 2 級數의 곱에 관한 式 (6)을 利用하여 Fourier級數로 表示하면

$$H(x)y'=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\alpha_m e^{im\pi(x-a)/l}\cdot\sum_{m=-\infty}^{\infty}b_m e^{im\pi(x-a)/l}$$

$$=\sum_{m=-\infty}^{\infty}u_m e^{im\pi(x-a)/l} \tag{28}$$

여기서

$$u_m=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\alpha_{m-n}b_n \tag{29}$$

이다. 또한 式 (27)의 두번째 式과 式 (26)으로부터 $G(x)y$를 같은 方法으로 表示하면

$$G(x)y=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\beta_m e^{im\pi(x-a)/l}\cdot\sum_{m=-\infty}^{\infty}c_m e^{im\pi(x-a)/l}$$

$$=\sum_{m=-\infty}^{\infty}v_m e^{im\pi(x-a)/l} \tag{30}$$

여기서

$$v_m=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\beta_{m-n}c_n \tag{31}$$

이다.

式 (18), (28), (30) 및 式(27)의 세번째 式을 式 (17)에 代入하여 整理하면 다음과 같이 된다.

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty}(a_m+u_m+v_m-\gamma_m)e^{im\pi(x-a)/l}=0 \tag{32}$$

여기서 $a_m=(\sigma_m-i\varepsilon_m)/2$이고 u_m와 v_m을 實部와 虛部로 나누어 整理하기 위하여 다음과 같이 쓴다.

$$u_m=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\alpha_{m-n}b_n=\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_{m+n}b_{-n}+\alpha_{m-n}b_n)$$

$$+\alpha_m b_0, \tag{29}'$$

$$v_m=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\beta_{m-n}c_n=\sum_{n=1}^{\infty}(\beta_{m+n}c_{-n}+\beta_{m-n}c_n)$$

$$+\beta_m c_0, \tag{31}'$$

여기서 $\alpha_{-m}=\alpha_m$, $\beta_{-m}=\beta_m$라는 事實을 注目하고, 式 (22)에서 b_0, b_n, b_{-n}, 式 (26)에서 c_0, c_n, c_{-n}를 各各 σ_0, σ_n, ε_n로 나타내어 式 (29)′, (31)′에 代入하여 整理하면

$$u_m=\alpha_m q+A_m\sigma_0+\sum_{n=1}^{\infty}D_{mn}\varepsilon_n+i\sum_{n=1}^{\infty}C_{mn}\sigma_n, \tag{33}$$

$$v_m=E_m+F_m\sigma_0+\sum_{n=1}^{\infty}G_{mn}\sigma_n+\sum_{n=1}^{\infty}H_{mn}\varepsilon_n$$

$$+i\left(\sum_{n=1}^{\infty}T_{mn}\varepsilon_n-W_m\sigma_0\right) \tag{34}$$

여기서

$$A_m=\frac{\alpha_m l}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_{m+n}+\alpha_{m-n})\frac{lf_n}{2n^2\pi^2},$$

$$D_{mn}=\frac{\alpha_m l}{n\pi}-(\alpha_{m+n}+\alpha_{m-n})\frac{l}{2n\pi},$$

$$C_{mn}=(\alpha_{m+n}-\alpha_{m-n})\frac{l}{2n\pi},$$

$$E_m=\beta_m r+\frac{\beta_m ql}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(\beta_{m+n}+\beta_{m-n})\frac{lqf_n}{n^2\pi^2},$$

$$F_m=\frac{\beta_m l^2}{8}+\sum_{n=1}^{\infty}(\beta_{m+n}+\beta_{m-n})\frac{l^2 f_n}{4n^2\pi^2},$$

$$G_{mn}=\frac{\beta_m l^2}{n^2\pi^2}-(\beta_{m+n}+\beta_{m-n})\frac{l^2}{2n^2\pi^2},$$

$$H_{mn}=\frac{\beta_m l^2}{2n\pi}+\frac{P_m l}{n\pi},$$

$$P_m=\sum_{n=1}^{\infty}(\beta_{m+n}+\beta_{m-n})\frac{lf_n}{n^2\pi^2},$$

$$T_{mn}=(\beta_{m-n}-\beta_{m+n})\frac{l^2}{2n^2\pi^2}$$

$$W_m=\sum_{n=1}^{\infty}(\beta_{m-n}-\beta_{m+n})\frac{l^2 f_n}{2n^3\pi^3},$$

$$f_n=(-1)^n-1$$

式 (33), (34)를 式 (32)에 代入하여 Fourier係數를 實部와 虛部로 나누어 表示하면

$$a_m+u_m+v_m-\gamma_m=R_m+iM_m \tag{35}$$

여기서

$$\left.\begin{aligned}R_m=&\frac{\sigma_m}{2}+\alpha_m q+A_m\sigma_0+\sum_{n=1}^{\infty}D_{mn}\varepsilon_n+E_m\\&+F_m\sigma_0+\sum_{n=1}^{\infty}G_{mn}\sigma_n+\sum_{n=1}^{\infty}H_{mn}\varepsilon_n-\gamma_m\\M_m=&-\frac{\varepsilon_m}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}C_{mn}\sigma_n+\sum_{n=1}^{\infty}T_{mn}\varepsilon_n-W_m\sigma_0\end{aligned}\right\} \tag{36}$$

이다. 式 (35)를 式 (32)에 代入하면

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty}(R_m+iM_m)e^{im\pi(x-a)/l}=0 \tag{37}$$

$\alpha_{-m}=\alpha_m$, $\beta_{-m}=\beta_m$, $\sigma_{-m}=\sigma_m$, $\varepsilon_{-m}=-\varepsilon_m$이므로 $R_{-m}=R_m$, $M_{-m}=-M_m$, $M_0=0$이 되고 이 事實을 利用하여 式 (37)을 整理하면

$$R_0+2\sum_{m=1}^{\infty}\left\{R_m\cos\frac{m\pi}{l}(x-a)+M_m\sin\frac{m\pi}{l}(x-a)\right\}=0 \tag{38}$$

x의 모든 값에 대하여 式 (38)이 成立하기 위하여서는

$R_0=0$, $R_m=0$, $M_m=0$, $(m=1, 2, \cdots, \infty)$

이 되어야 한다.

$R_0=0$이므로 式 (36)의 첫번째 式으로 부터 σ_0를 求하면

$$\sigma_0=\{\gamma_0-E_0-\alpha_0 q-\sum_{n=1}^{\infty}G_{0n}\sigma_n-\sum_{n=1}^{\infty}(D_{0n}+H_{0n})\varepsilon_n\}/(0.5+A_0+F_0) \tag{39}$$

이것을 式 (36)에 代入하고 $R_m=0$, $M_m=0$라는 事實을 利用하면 式 (36)은 다음과 같이 된다.

$$\frac{\sigma_m}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{G_{mn}-\frac{(A_m+F_m)G_{0n}}{0.5+A_0+F_0}\right\}\sigma_n+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{D_{mn}+H_{mn}-\frac{(A_m+F_m)(D_{0n}+H_{0n})}{0.5+A_0+F_0}\right\}\varepsilon_n=\gamma_m-E_m-\alpha_m q+\frac{(A_m+F_m)(\alpha_0 q+E_0-\gamma_0)}{0.5+A_0+F_0} \tag{40}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(C_{mn}+\frac{W_m G_{0n}}{0.5+A_0+F_0}\right)\sigma_n+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{T_{mn}+\frac{W_m(D_{0n}+H_{0n})}{0.5+A_0+F_0}\right\}\varepsilon_n-\frac{\varepsilon_m}{2}=\frac{W_m(\gamma_0-E_0-\alpha_0 q)}{0.5+A_0+F_0} \tag{41}$$

式 (40), (41)은 $m=1, 2, 3, \cdots, \infty$에 대하여 成立되어야 하므로 이 式들을 매트릭스形態로 表現하면 다음과 같다.

$$\left.\begin{aligned}&\frac{1}{2}\{\sigma\}+[X]\{\sigma\}+[Y]\{\varepsilon\}=\{Z\}\\&[\varphi]\{\sigma\}+[\xi]\{\varepsilon\}-\frac{1}{2}\{\varepsilon\}=\{\eta\}\end{aligned}\right\} \tag{42}$$

여기서 $\{\sigma\}=[\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \cdots]^T$, $\{\varepsilon\}=[\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \cdots]^T$ 이고, $[X]$, $[Y]$, $[\varphi]$, $[\xi]$의 m번째 行, n번째 列의 要素는 다음과 같다.

$$[X]=\left[G_{mn}-\frac{(A_m+F_m)G_{0n}}{0.5+A_0+F_0}\right],$$

$$[Y]=\left[D_{mn}+H_{mn}-\frac{(A_m+F_m)(D_{0n}+H_{0n})}{0.5+A_0+F_0}\right]$$

$$[\varphi]=\left[C_{mn}+\frac{W_m G_{0n}}{0.5+A_0+F_0}\right],$$

$$[\xi]=\left[T_{mn}+\frac{W_m(D_{0n}+H_{0n})}{0.5+A_0+F_0}\right]$$

또한 $\{Z\}$와 $\{\eta\}$의 m번째 要素는 各各

$$\{Z\}=\left\{\gamma_m-E_m-\alpha_m q+\frac{(A_m+F_m)(\alpha_0 q+E_0-\gamma_0)}{0.5+A_0+F_0}\right\}$$

$$\{\eta\}=\left\{\frac{W_m(\gamma_0-E_0-\alpha_0 q)}{0.5+A_0+F_0}\right\}$$

이다.

式 (42)를 unit matrix를 使用하여 다시 쓰면

$$\left.\begin{aligned}&[X_I]\{\sigma\}+[Y]\{\varepsilon\}=\{Z\}\\&[\varphi]\{\sigma\}+[\xi_I]\{\varepsilon\}=\{\eta\}\end{aligned}\right\} \tag{43}$$

여기서

$$[X_I]=[X]+\frac{1}{2}[I],\quad [\xi_I]=[\xi]-\frac{1}{2}[I]$$

$[I]$; unit matrix

式(43)을 다음과 같이 쓸 수도 있다.

$$\begin{bmatrix}[X_I] & [Y] \\ [\varphi] & [\xi_I]\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\{\sigma\} \\ \{\varepsilon\}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\{Z\} \\ \{\eta\}\end{Bmatrix} \qquad (43)'$$

이 式으로부터 $\{\sigma\}$, $\{\varepsilon\}$을 求할 수 있다.

$$\begin{Bmatrix}\{\sigma\} \\ \{\varepsilon\}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}[X_I] & [Y] \\ [\varphi] & [\xi_I]\end{bmatrix}^{-1}\begin{Bmatrix}\{Z\} \\ \{\eta\}\end{Bmatrix} \qquad (44)$$

式 (44)로부터 σ_m, $\varepsilon_m(m=1, 2, 3, \cdots)$을 求할 수 있으므로 이들을 式 (39)에 代入함으로써 σ_0를 求할 수 있고, 따라서 式 (26)의 Fourier係數 c_m을 求할수 있다.

$$c_m=\left(\frac{l}{m\pi}\right)^2\left\{\frac{f_m q}{l}+\frac{f_m\sigma_0}{4}+f_m\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varepsilon_n}{n\pi}-\frac{\sigma_m}{2}+i\left(\frac{\varepsilon_m}{2}-\frac{f_m\sigma_0}{2m\pi}\right)\right\} \qquad (45)$$

이 係數를 式 (26)에 代入함으로써 微分方程式 (17)의 初期値問題의 解를 얻는다.

5. 境界値問題

境界値問題도 初期値問題와 그 根本方法과 過程이 같다. 다만 境界條件을 滿足시키기 위한 積分常數가 달라지므로서 結果는 약간 相異하게 된다. 여기서는 初期値問題의 境遇와 다른 部分에 대하여 그 結果만을 記術하고자 한다.

지금 式 (17)의 微分方程式을 區間 $a\leqq x\leqq b$에 대하여 풀려고 한다.

$$y''+H(x)y'+G(x)y=P(x) \qquad (17)$$

境界條件은 $x=a$일 때 $y=q$, $x=b$일 때 $y=r$이다. 初期値問題의 境遇와 마찬가지로

$$y''=\sum_{m=-\infty}^{\infty}a_m e^{im\pi(x-a)/l} \qquad (18)$$

로 놓고 이것을 두번 積分하여 y를 求한 다음 境界條件을 써서 積分常數 c_1', c_2'를 求하면 다음과 같다.

$$\left.\begin{aligned} c_1'&=\frac{r-q}{l}-\frac{a+b}{2}a_0-\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{f_m b_m}{im\pi}, \\ &(m\neq 0) \\ c_2'&=q-ac_1'-\frac{a(a+b)}{2}a_0-\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{lb_m}{im\pi}, \\ &(m\neq 0)\end{aligned}\right\} \qquad (46)$$

前節에서와 같은 過程으로 σ_0, σ_m, ε_m에 관한 聯立方程式을 세우면 다음과 같다.

$$\sigma_0=\{r_0+\alpha_0\frac{q-r}{l}-E_0+\sum_{n=1}^{\infty}C_{0n}\varepsilon_n-\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_0 B_n+F_0 B_n+H_{0n})\sigma_n\}/(0.5+A_0) \qquad (47)$$

$$\frac{\sigma_m}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{(\alpha_m+F_m)B_n+H_{mn}-\frac{A_m(\alpha_0 B_n+F_0 B_n+H_{0n})}{0.5+A_0}\right\}\sigma_n+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{A_m C_{0n}}{0.5+A_0}-C_{mn}\right)\varepsilon_n=r_m-E_m+\frac{\alpha_m(q-r)}{l}-\frac{A_m\{r_0-E_0+\alpha_0(q-r)/l\}}{0.5+A_0} \qquad (48)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left\{D_{mn}-\frac{Q_m(\alpha_0 B_n+F_0 B_n+H_{0n})}{0.5+A_0}\right\}\sigma_n+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{P_{mn}+\frac{Q_m C_{0n}}{0.5+A_0}\right\}\varepsilon_n-\frac{\varepsilon_m}{2}=\frac{Q_m}{0.5+A_0}\left\{E_0+\frac{\alpha_0(r-q)}{l}-r_0\right\} \qquad (49)$$

여기서

$$A_m=\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_{m+n}+\alpha_{m-n})\frac{lf_n}{2n^2\pi^2}, \quad B_n=\frac{lf_n}{n^2\pi^2},$$

$$C_{mn}=(\alpha_{m+n}+\alpha_{m-n})\frac{l}{2n\pi},$$

$$D_{mn}=(\alpha_{m+n}-\alpha_{m-n})\frac{l}{2n\pi}$$

$$E_m=\frac{\beta_m(q+r)}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(\beta_{m+n}+\beta_{m-n})\frac{f_n(r-q)}{n^2\pi^2}$$

$$F_m=\sum_{n=1}^{\infty}(\beta_{m+n}+\beta_{m-n})\frac{lf_n}{n^2\pi^2},$$

$$H_{mn}=\frac{\beta_m(2+f_n)-(\beta_{m+n}+\beta_{m-n})}{2}\left(\frac{l}{n\pi}\right)^2$$

$$P_{mn}=\frac{\beta_{m-n}-\beta_{m+n}}{2}\left(\frac{l}{n\pi}\right)^2$$

$$Q_m=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\beta_{m+n}-\beta_{m-n})f_n}{2n\pi}\left(\frac{l}{n\pi}\right)^2$$

$$f_n=(-1)^n-1$$

式 (48), (49)를 매트릭스形態로 表示하면

$$\begin{bmatrix}[X_I] & [Y] \\ [\varphi] & [\xi_I]\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\{\sigma\} \\ \{\varepsilon\}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\{Z\} \\ \{\eta\}\end{Bmatrix} \qquad (50)$$

여기서

$$[X_I]=\Big[(\alpha_m+F_m)B_n+H_{mn}-\frac{A_m(\alpha_0B_n+F_0B_n+H_{0n})}{0.5+A_0}\Big]+\frac{1}{2}[I]$$

$$[Y]=\Big[\frac{A_mC_{0n}}{0.5+A_0}-C_{mn}\Big],$$

$$[\varphi]=\Big[D_{mn}-\frac{Q_m(\alpha_0B_n+F_0B_n+H_{0n})}{0.5+A_0}\Big]$$

$$[\xi_I]=\Big[P_{mn}+\frac{Q_mC_{0n}}{0.5+A_0}\Big]-\frac{1}{2}[I],$$

$$\{Z\}=\Big\{r_m-E_m+\frac{\alpha_m(q-r)}{l}+\frac{A_m\Big(E_0+\dfrac{r-q}{l}\alpha_0-r_0\Big)}{0.5+A_0}\Big\}$$

$$\{\eta\}=\Big\{\frac{Q_m}{0.5+A_0}\Big(E_0+\frac{r-q}{l}\alpha_0-r_0\Big)\Big\}$$

$[I]$; unit matrix

式 (50)으로부터 $\{\sigma\}$, $\{\varepsilon\}$을 求할 수 있다.

$$\begin{Bmatrix}\{\sigma\}\\\{\varepsilon\}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}[X_I] & [Y]\\ [\varphi] & [\xi_I]\end{bmatrix}^{-1}\begin{Bmatrix}\{Z\}\\\{\eta\}\end{Bmatrix} \qquad (51)$$

이 式으로부터 σ_m, $\varepsilon_m(m=1,\ 2,\ 3,\cdots)$을 求하고 이것들을 式 (47)에 代入함으로써 σ_0를 求할 수 있으며 따라서 式 (26)의 Fourier係數 c_m을 求할 수 있다.

$$c_m=\Big(\frac{l}{m\pi}\Big)^2\Big\{\frac{f_m(r-q)}{l^2}+f_m\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f_n\sigma_n}{n^2\pi^2}-\frac{\sigma_m}{2}+i\Big(\frac{\varepsilon_m}{2}-\frac{f_m\sigma_0}{2m\pi}\Big)\Big\} \qquad (52)$$

式 (52)를 式 (26)에 代入함으로써 微分方程式 (17)의 境界値問題의 解를 얻는다.

6. 計算結果의 比較

以上에서 提示한 常微分方程式의 解法을 檢討하기 위하여, 正確한 解를 알고 있는 微分方程式에 대하여 本硏究에서 提示한 Fourier級數 解法으로 解析하고 正確한 解와 比較하였다. Fourier級數 解法은 原則的으로 無限大次項까지 合하도록 되어 있고 이 境遇 式 (44) 및 (51)의 正四角形行列(Square matrix)의 次數가 無限大가 된다. 그러나 次數가 增加함에 따라 Fourier 係數가 急激히 적어지기 때문에 實際로는 充分히 큰 次數의 項까지만 計算하면 된다. 따라서 考慮된 次數가 많으면 많을수록 誤差는 줄어들게 되는데, 여기서는 考慮된 次數에 대한 絶對誤差를 나타내었다.

微分方程式

$$y''-\frac{x^2+1}{x(x^2-1)}y'+\frac{x^2+1}{x^2(x^2-1)}y=\frac{0.4x^4+4x^3+39.6x^2+4x+40}{x^2(x^2-1)}e^{-0.1x} \qquad (53)$$

境界條件: $x=2$일 때 $y=15$,
$x=10$일 때 $y=32$

의 正確한 解는

$$y=-14.7x+7.12\Big(xl_nx+\frac{1}{2x}\Big)+40e^{-0.1x} \qquad (54)$$

이다. Fig. 1은 이것을 區間 $2\leqq x\leqq 10$에 대하여 그래프로 나타낸 것이다. Fig. 2 및 Fig. 3은 Fourier級數解法에 의한 解와 正確한 解의 差를 Fourier級數에 考慮된 次數에 대하여 나타내고 있다.

微分方程式 (53)에서 初期條件 $x=2$일 때 $y'=-8$, $y=12$이면 이의 正確한 解는

$$y=-16.54x+7.53\Big(xl_nx+\frac{1}{2x}\Big)+40e^{-0.1x} \qquad (55)$$

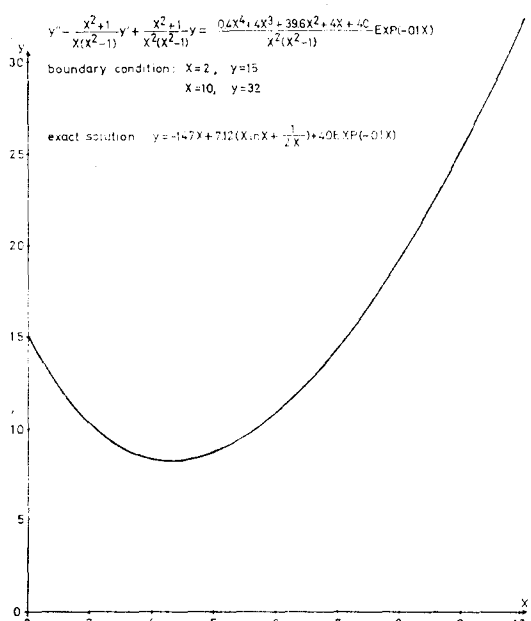

Fig. 1. Exact solution of equation(53); boundary value problem.

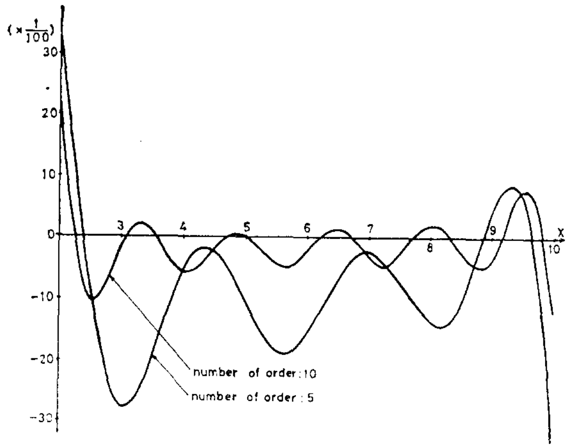

Fig. 2. Absolute error of Fourier series solution for the number of order 5 and 10.

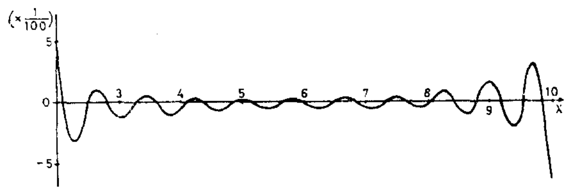

Fig. 3. Absolute error of Fourier series solution for the number of order 20.

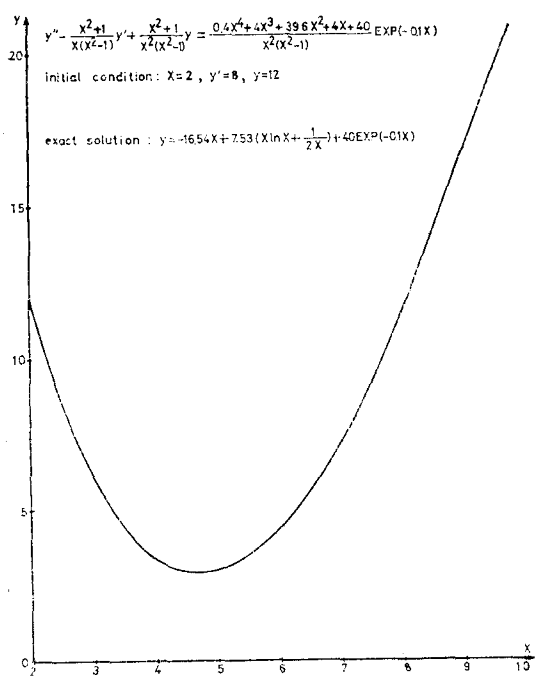

Fig. 4. Exact solution of equation (53); initial value problem.

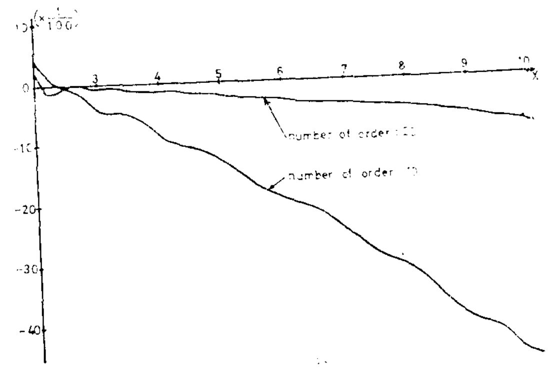

Fig. 5. Absolute error of Fourier series solution for the number of order 10 and 20.

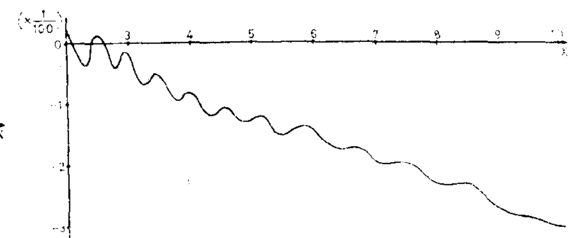

Fig. 6. Absolute error of Fourier series solution for the number of order 30.

이고, Fig. 4는 이것을 區間 $2 \leqq x \leqq 10$에 대하여 그래프로 나타낸 것이다.

Fig. 5 및 Fig. 6은 Fourier級數 解法의 絶對誤差를 나타내고 있다.

微分方程式

$$y'' - 2y' + y = xe^x - e^x \tag{56}$$

境界條件; $x=0$일 때 $y=8$,

$x=4$일 때 $y=25$

의 正確한 解는

$$y = 8e^x - 2.55xe^x - \frac{x^2e^x}{2} + \frac{x^3e^x}{6} \tag{57}$$

이다. Fig. 7은 이것을 區間 $0 \leqq x \leqq 4$에 대하여 그래프로 나타낸 것이고, Fig. 8 및 Fig. 9는 Fourier級數 解法의 絶對誤差를 考慮된 次數에 대하여 나타낸 것이다. 또한 微分方程式 (56)에서 初期條件 $x=0$일 때 $y'=5.5$, $y=8$이면 이의 正確한 解는

$$y = 8e^x - 2.5xe^x - \frac{x^2e^x}{2} + \frac{x^3e^x}{6} \tag{58}$$

이고 Fig. 10은 이것을 區間 $0 \leqq x \leqq 4$에 대하여, Fig. 11 및 Fig. 12는 Fourier級數解法의 絶對誤

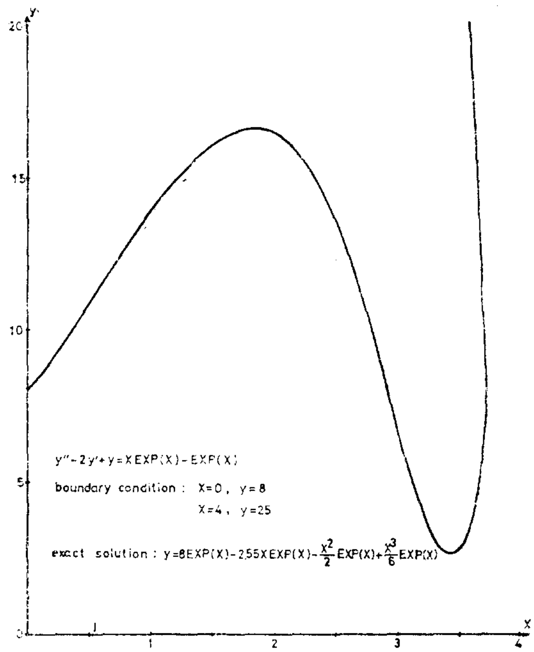

Fig. 7. Exact solution of equation(56); boundary value problem.

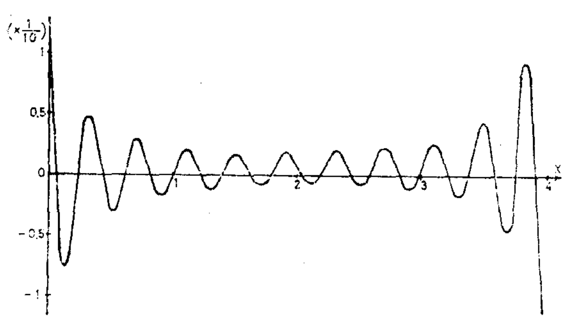

Fig. 8. Absolute error of Fourier series solution for the number of order 20.

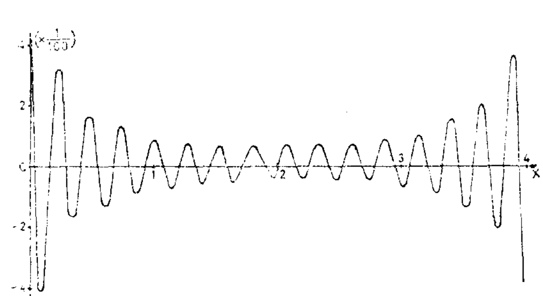

Fig. 9. Absolute error of Fourier series solution for the number of order 30.

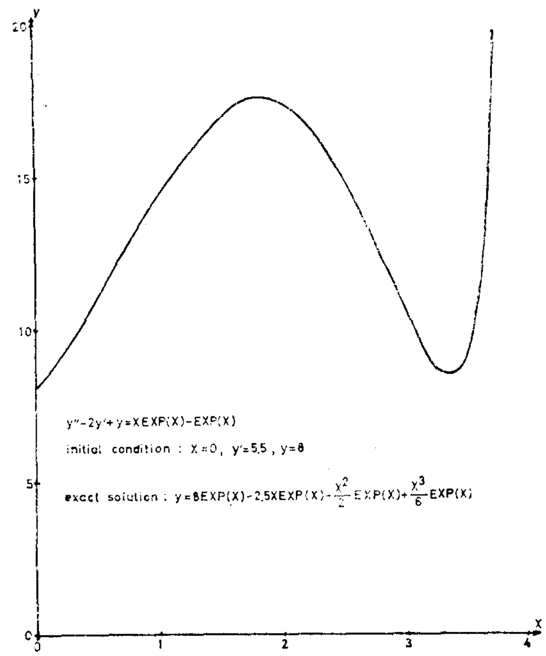

Fig. 10. Exact solution of equation(56); initial value problem.

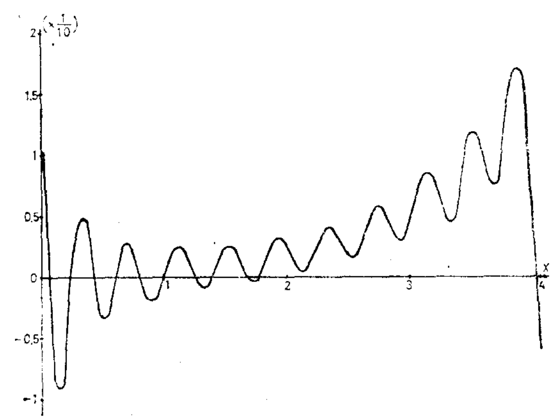

Fig. 11. Absolute error of Fourier series solution for the number of order 20.

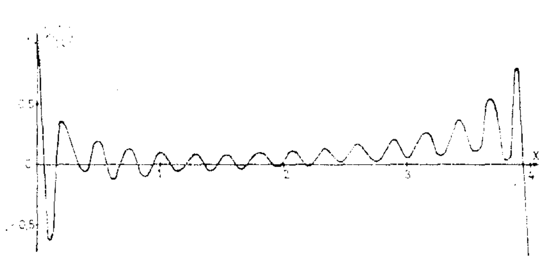

Fig. 12. Absolute error of Fourier series solution for the number of order 30.

差를 그래프로 나타낸 것이다.

以上의 絶對誤差를 보면 모든 境遇에 대하여 次數가 增加하면 誤差는 顯著히 減少하고, 一般的으로 區間의 中間部分보다 兩端部分이 誤差가 크다는 것을 알 수 있는데, 이는 Fourier級數 解法의 區間을 잡을 때 解가 必要한 區間보다 더 크게 잡음으로써 解決되리라 본다.

7. 結 論

(1) Fourier級數로 나타낸 두 函數의 곱(積)을 역시 Fourier級數로 나타낼 때 各級數의 係數사이에는 式 (6)의 關係가 있다.

(2) Fourier級數로 나타낸 두 函數의 商을 역시 Fourier級數로 나타낼 때 各級數의 係數사이에는 式 (16)의 關係가 成立한다.

(3) 二階 線形常微分方程式의 解가 어떤 區間에서 存在할 때 Fourier級數를 利用함으로써 그 解를 求할 수 있고 Fourier級數로 表示할 수 있다.

(4) 二階 線形 常微分方程式의 Fourier級數 解法은 考慮된 次數가 많을수록 誤差가 작고, 區間의 兩端部分이 中間部分보다 誤差가 比較的 크다.

參 考 文 獻

1) Ruel V. Churchill and James W. Brown, "Fourier Series and Boundary Value Problems", McGraw-Hill, 1982.
2) Erwin Kreyszig, "Advanced Engineering Mathematics", Wiley, 1972.
3) C. Ray Wylie, "Advanced Engineering Mathematics", McGraw-Hill, 1975.

〔附 錄〕

Fourier係數의 計算

Fourier의 cosine係數 σ_m 및 sine係數 $\mathcal{E}_m$은

$$\sigma_m=\frac{1}{l}\int_a^b F(x)\cos\frac{m\pi}{l}(x-a)\,dx \qquad ①$$

$$\mathcal{E}_m=\frac{1}{l}\int_a^b F(x)\sin\frac{m\pi}{l}(x-a)\,dx \qquad ②$$

로 表示되는데 이 때 函數 $F(x)$는 區間 $a\leqq x\leqq b$에서 定義되고 連續이어야 한다. 또한 $l=b-a$로써 區間의 길이가 된다. $F(x)$가 特殊한 境遇에만 式 ① 및 ②의 積分이 可能하고 $F(x)$가 數値로 주어지거나 $F(x)$의 一般的인 形態에 대하여서는 積分이 可能하지 않은데 여기서는 이 境遇 數値積分을 利用하는 한 方法을 提示하려고 한다.

Fig. A에 보이는 바와 같이 주어진 區間($a\leqq x\leqq b$)을 $2n$等分 하고 各點의 座標를 x_0, x_1, $x_2\cdots x_{2i-2}$, x_{2i-1}, $x_{2i}\cdots x_{2n}$라고 한다. 또한 各點에 있어서 $F(x)$의 값을 F_0, F_1, $F_2\cdots F_{2i-2}$, F_{2i-1}, $F_{2i}\cdots F_{2n}$이라고 하면, $\mathcal{E}_0=0$이 되고 σ_0는 Simpson의 定積分公式에 의하여

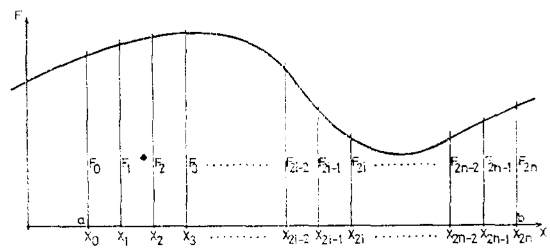

Fig. A. Function $F(x)$ and the division of the interval.

$$\sigma_0=\frac{1}{l}\int_a^b F(x)dx$$
$$=\frac{\Delta x}{3l}(F_0+4F_1+2F_2+\cdots 2F_{2i-2}+4F_{2i-1}+2F_{2i}\cdots+4F_{2n-1}+F_{2n}) \qquad ③$$

이다. 여기서 $\Delta x=l/(2n)$로써 等分의 간격을 나타낸다.

한편 $m\neq 0$에 대하여 σ_m, $\mathcal{E}_m$을 求하는 方法은 다음과 같다. Simpson의 定積分公式을 誘導할 때와 마찬가지로 區間의 앞에서부터 차례로 3點을 잡아, $F(x)$를 이 3點을 지나는 二次曲線으로 看做하여 이것을 式 ① 및 ②에 代入하여 積分하면 된다. 즉

$$l\sigma_m=\sum_{i=1}^{n}\int_{x2i-2}^{x2i}(a_ix^2+b_ix+c_i)\cos\frac{m\pi}{l}(x-a)dx \qquad ④$$

$$l\mathcal{E}_m=\sum_{i=1}^{n}\int_{x2i-2}^{x2i}(a_ix^2+b_ix+c_i)\sin\frac{m\pi}{l}(x-a)dx \qquad ⑤$$

여기서 a_i, b_i, c_i는 다음 3式으로부터 求한다.

$$\left.\begin{aligned}F_{2i-2}&=a_ix^2_{2i-2}+b_ix_{2i-2}+c_i\\F_{2i-1}&=a_ix^2_{2i-1}+b_ix_{2i-1}+c_i\\F_{2i}&=a_ix^2_{2i}+b_ix_{2i}+c_i\end{aligned}\right\} \qquad ⑥$$

$i=1,\ 2,\ 3\cdots n$

式 ④ 및 ⑤는 積分이 可能하므로, 式 ⑥으로부터 求한 a_i, b_i, c_i를 式 ④ 및 ⑤에 代入하고 定積分하여 σ_m, $\mathcal{E}_m$을 求하면 다음과 같다.

$$\sigma_m=\frac{l}{m^2\pi^2}\Big[G_A+\sum_{i=1}^{n-1}\Big\{G_i\cos\frac{m\pi}{l}(x_{2i}-a)$$

$$-H_i \sin\frac{m\pi}{l}(x_{2i}-a)\Big\}\Big] \quad ⑦$$

$$\mathcal{E}_m=\frac{l}{m^2\pi^2}\Big[H_A+\sum_{i=1}^{n-1}\Big\{G_i \sin\frac{m\pi}{l}(x_{2i}-a)$$

$$+H_i \cos\frac{m\pi}{l}(x_{2i}-a)\Big\}\Big] \quad ⑧$$

여기서

$$G_A=\frac{1}{2\Delta x}\{3F_0-4F_1+F_2+(-1)^m(F_{2n-2}$$

$$-4F_{2n-1}+3F_{2n})\}$$

$$G_i=\frac{1}{2\Delta x}\{F_{2i-2}-4F_{2i-1}+6F_{2i}-4F_{2i+1}+F_{2i+2}\}$$

$$H_i=\frac{1}{2\Delta x}\{F_{2i-2}-2F_{2i-1}+2F_{2i+1}-F_{2i+2}\}$$

$$H_A=\frac{m\pi}{l}\{F_0-(-1)^m F_{2n}\}+\frac{l}{m\pi(\Delta x)^2}$$

$$\{2F_1-F_0-F_2+(-1)^m(F_{2n-2}-2F_{2n-1}+F_{2n})\}$$