
 論 文

大韓造船學會誌
 第21卷 第2號 1984年 6月
 Journal of the Society of
 Naval Architects of Korea
 Vol. 21, No. 2, June 1984

龜裂을 가진 四角平板의 數值解法에 依한 J-積分值

金 東 燮* · 朴 鍾 殷**

Numerical Analysis of J-integral Value in the Rectangular Plate with a Crack

by

D. S. Kim* · J. E. Park**

ABSTRACT

A line integral is exhibited which has the same value for all paths surrounding the tip of crack in a two dimensional strain field of elastic-plastic material. Finite element method was used to determine Rice's J -integral value in centrally cracked plate.

These numerical J -integral values were compared with corresponding values of reference with low hardening and high yield strength. The J -integral value was also computed for a crack extension and different load condition.

For increasing crack length the value of J -integral also increases, this means that the crack is unstable. To prove path independent, three paths were used in the analysis and proved.

記 號

$A(\Delta A)$: area
 a : crack length
 B_i : body force
 b : plate width
 E_{ij} : Green strain tensor
 G : energy release rate
 I_2 : second invariant of deviatoric stress tensor
 J : J -integral
 K : stress intensity factor
 K_c : fracture toughness
 n_x, n_y : direction cosine
 P : potential energy

S_{ij} : Kirchoff stress tensor
 $T_i(T_x, T_y)$: surface traction
 $U_i(U_x, U_y)$: displacement
 U_0 : strain energy density
 ϵ_{ij} : strain tensor
 ν : Poisson ratio
 $\bar{\sigma}$: equivalent stress
 σ_{ij} : stress tensor
 σ'_{ij} : deviatoric stress

1. 緒 論

近間에 船舶, 壓力容器, 構造物 등의 熔接部位에서 豫期하지 않았던 突發的인 事故가 發生하여 많은 人命, 財産의 被害를 가져왔는데, 이 問題들을 解決하고자,

接受日字 : 1984年 2月 27日.

* 正會員, 嶺南大學校 工科大學

** 正會員, 서울大學校 工科大學

破壞力學이 發展하였다.

破壞力學의 學問的인 始初는 潛在龜裂을 가진 完全脆性材料의 破壞現象을 說明해 주는 Griffith의 脆性破壞理論으로부터 始作되었으며(1920年), 이 Griffith의 理論은, 그 後 Orowan과 Irwin이 塑性에너지項까지를 考慮함으로써, 鋼材에도 適用될 수 있는 理論으로 修正되었다(1948年).

다음으로 Irwin은 龜裂이 있는 物體의 龜裂先端附近에서의 應力狀態를 나타내기 위하여 應力擴大係數(stress intensity factor) K 를 導入하였으며[15](1958年), 龜裂進展에 따른 에너지 關係를 나타내기 위하여 에너지解放率(energy release rate) G 를 定義하였다[2]. 또한 Irwin은 龜裂進展에 對한 臨界值로 破壞靱性值(fracture toughness) K_c 를 定義하였다.

이때의 破壞靱性值 K_c 는 應力擴大係數 K 가 그 意味를 잃지 않는 線形彈性破壞力學의 分野에만 適用될 수 있다[3].

그러나, 一般의인 金屬材料에서는 龜裂先端附近에 比較의 큰 塑性域이 生길때가 많이 있다.

이러한 大規模降伏에 對한 破壞問題를 해석하기 위하여 여러 方法들이 行해지고 있는데, 여기에는 實驗的方法[4, 5]뿐 아니라 電子計算器를 利用한 有限要素法도 많이 試圖되고 있다[6].

이 大規模降伏 破壞問題등의 非線形 破壞問題를 解析하는 方法中 가장 널리 알려진 方法이 Cottrell과 Well의 龜裂開口變位(crack opening displacement)와 Rice[7]의 J -積分이다.

한편 材料內部에 缺陷이 있는 境遇에 缺陷周圍의 應力分布를 考察한 過程을 보면, 無限平板에 缺陷이 있을때 Inglis[8]는 曲線 座標系를 使用하여 周圍의 應力을 解析하였고(1913年), Westergaard[9]는 復素應力函數를 利用하여 周圍의 應力分布를 求하였다(1939年), 또한, Williams[10]는 polynomial series의 應力函數를 利用하여 龜裂周圍의 應力을 求하였으며(1957年), Dugdale은 塑性域까지를 考慮하여 應力을 解析하였으며, 야올러 數值解法으로 應力解析을 하는 方法도 提示하였다(1970年).

最近에는 積分經路에 無關한 性質을 가진 J -積分에 對한 關心이 높아졌으며 이를 利用하는 많은 方法들이 提示되었다. 또, 最近 컴퓨터의 發展에 따라, 이것을 利用한 數值解法的인 方法도 破壞力學의 研究에 많이 活用되고 있다[16].

本 研究에서는 그 中 한 方法인, 彈塑性領域에서 有限要素法으로 應力, 變形度를 求하고 適切한 積分經路

를 取해서 그 經路에 對한 J -積分值를 求하여 材料의 破壞에 對한 特性值를 決定하는 方法을 使用하였다.

또, 解析方法으로 降伏後 加工硬化(strain hardening) 曲線을 갖고 有限幅의 龜裂이 存在하는 材料에 對해 有限要素法으로[4, 11, 12] 彈塑性解析을하여 [13, 14] 龜裂周圍의 塑性狀態와 一定荷重狀態에 對한 J -積分值를 求하였다.

2. J -積分

2.1. J -積分의 定式化

龜裂을 가진 物體가 平衡狀態이면, 變位 U 가 a 로 指定된 境界 S_1 과 表面力 T 가 Q 로 指定된 境界 S_2 上에는

$$\begin{aligned} U_i &= a_i && \text{on } S_1 \\ T_i^{(n)} &= \sigma_{ij}n_j = Q_i && \text{on } S_2 \end{aligned} \quad (2.1)$$

이 成立하며, 平衡方程式

$$-\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + B_i = 0 \quad (2.2)$$

를 만족한다.

一般의으로 微小要素가 微小變形中 單位두께당 行한 機械의 일은

$$W = \int_0^{\epsilon_{ij}} \sigma_{ij} d\epsilon_{ij} = U_0 \quad (2.3)$$

이다. 여기서, U_0 : strain energy density

지금 龜裂끝을 包含하는 領域에서의 에너지解放率을 나타내기 위하여 Fig.1과 같이 內部領域이 S_0 인 境界를 取하고, body force가 없다고 假定하면 龜裂이 微小面積 ΔA 만큼 進展했을 때의 에너지해방을 G 는

$$G = -\frac{\Delta P}{\Delta A}$$

이므로,

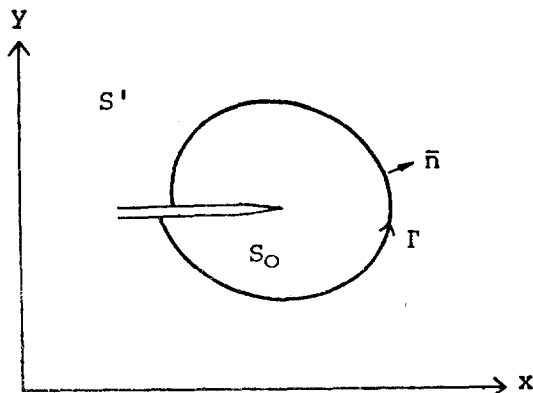


Fig. 1 Crack Tip Integral Path

龜裂을 가진 四角平板의 數值解法에 依한 J-積分值

全系의 total potential energy變化는

$$G\Delta A = -\Delta P = -\int_{s_0} \Delta U_0 dS + \int_r T_i \Delta U_i ds \quad (2.4)$$

로 된다.

龜裂길이가 微小量 Δa 만큼 擴張되어도 龜裂끝 附近의 應力場, 變位場은 變하지 않는다고 하면, 龜裂이 進展하기 前의 龜裂끝 附近의 strain energy density와 變位를 各各 $U_0(x, y)$, $U_i(x, y)$, 龜裂이 進展한 後의 strain energy density와 變位를 $U_0(x - \Delta a, y)$, $U_i(x - \Delta a, y)$ 라 할 수 있다.

그러므로 ΔU_0 와 ΔU_i 는

$$\Delta U_0 = -\frac{\partial U_0(x, y)}{\partial x} \Delta a \quad (2.5)$$

$$\Delta U_i = -\frac{\partial U_i(x, y)}{\partial x} \Delta a$$

와 같이 된다.

한편 積分經路 Γ 를 龜裂끝에 가깝게 取하고 式(2.5)를 式(2.4)에 代入하면

$$G = \int_{s_0} \frac{\partial U_0}{\partial x} ds - \int_r T_i \frac{\partial U_i}{\partial x} ds \quad (2.6)$$

으로 되고 右邊 첫번째 式을 Gauss定理를 利用하여 새로운 J-積分을 定義하면

$$J = \int_r (w dy - T_i \frac{\partial U_i}{\partial x} ds) \quad (2.7)$$

여기서 $w = U_0$ 가 된다.

2.2. J-積分과 K_I 및 G_I 과의 關係

線形彈性 破壞力學에서는 應力擴大係數 K 가 龜裂끝 附近의 應力場, 變位場을 特定지워주고, K 의 臨界值인 破壞靱性值(K_c)는 破壞의 開始를 決定해 주는 材料의 變數이다.

材料가 線形彈性일때 뿐 아니라 材料에 小規模降伏이 있는 境遇에도 線形彈性破壞力學은 適用된다. 그러나 材料의 性質이 非線形이거나 龜裂끝 附近에 比較的 큰 塑性域이 存在할때에 線形彈性破壞力學은 適用될 수 없다.

J-積分은 線形彈性破壞力學 뿐 아니라, 非線形破壞力學에 까지도 適用될 수 있는 方法中의 하나이다.

本 研究에서는 J-積分을 2次元의인 問題, 即 平面應力과 平面變形度에 對해 龜裂끝을 包含하는 任意的 經路를 따르는 線積分으로 表示한다.

J-積分의 物理的 意味는 龜裂의 增加分에 對한 位置에 에너지 P 의 減小量이다[2]. 即

$$J = -\frac{dP}{dA} \text{이다.}$$

또 線形彈性破壞力學에서의 J-積分值는 에너지 解放

率 G 와 같게 된다. 即

$$J = \frac{1-\nu^2}{E} K_I^2 = G_I \quad (2.8)$$

(forplane strain)

로 되며 여기서 K_I, G_I 은 Mode I에서의 應力擴大係數와 Energy解放率이다.

J-積分은 材料가 彈性이면, 線形이든 非線形이든 龜裂끝을 包含하는 積分經路에 無關한 값을 가지므로, 應力-變形度가 彈性을 벗어나 塑性으로 가더라도 塑性變形理論을 쓰면, 非線形彈性和 마찬가지로 볼 수 있으므로, 積分經路에 無關하게 된다.

그러나, 塑性域에 除荷가 일어나면 非線形彈性理論을 適用할 수 없다. 따라서 龜裂이 進展하는 境遇에는 이미 龜裂끝部分에서 除荷가 일어나므로 J-積分은 龜裂의 進展이 일어나려는 瞬間까지에만 適用될 수 있다.

3. 平板의 彈塑性 解析

物體가 彈性限界 內에 있을 때에는 應力과 變形度를 連結하는 構成方程式을

$$\{\sigma\} = [D^e] \{\epsilon\} \quad (3.1)$$

로 쓸 수 있으나 物體가 彈性限界를 넘으면 式(3.1)을 適用할 수 없는 塑性變形이 나타나기 始作한다.

이 塑性變形에는 降伏의 現象이 있으므로, 이에 對해 式(3.1)을 適用할 수 있는 限界를 定하는 降伏條件이 必要하다.

一但 降伏이 始作되면, 非彈性材料의 構成方程式은 增分理論을 使用하여 非線形 擧動의 應力과 變形度를 解析할 수 있다. 여기서 增分理論의 式은

$$d\sigma = [D] d\epsilon \quad (3.2)$$

와 같이 된다[14].

3.1. 假定

彈性限界를 定하는 降伏條件 및 塑性領域에서의 構成方程式을 決定하기 위하여 다음과 같은 假定을 設定하였다.

- 1) 材料는 均質이며 等方性이다.
- 2) 材料의 特性은 時間에 對해 無關하다.
- 3) 材料의 降伏條件으로 von-Mises의 條件式을 使用한다.
- 4) 塑性 變形에는 體積의 變化가 없다.
- 5) 增分理論을 使用한다.
- 6) Prandtl-Reuss의 假設을 適用한다.

3.2. 構成方程式

應力增分과 變形度增分사이의 關係를 彈性狀態와 塑性狀態에 對해 다음과 같이 定義하였다.

一般的인 變形度는

$$\begin{Bmatrix} d\epsilon_x \\ d\epsilon_y \\ d\gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} d\epsilon_x^e \\ d\epsilon_y^e \\ d\gamma_{xy}^e \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} d\epsilon_x^p \\ d\epsilon_y^p \\ d\gamma_{xy}^p \end{Bmatrix} \quad (3.3)$$

로 주어진다.

1) 彈性領域

彈性領域에서는 Hook의 法則에 의해

$$\begin{Bmatrix} d\sigma_x \\ d\sigma_y \\ d\tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} d\epsilon_x \\ d\epsilon_y \\ d\gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (3.4)$$

의 關係가 成立한다.

2) 塑性領域

式(3.3)의 塑性 變形度 増分 $d\epsilon_x^p, d\epsilon_y^p, d\gamma_{xy}^p$ 를 Prandtl-Reuss의 假設에 의해

$$\begin{Bmatrix} d\epsilon_x^p \\ d\epsilon_y^p \\ d\gamma_{p,xy}^p \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma'_x \\ \sigma'_y \\ 2\tau'_{xy} \end{Bmatrix} d\lambda \quad (3.5)$$

로 表示되며 $d\lambda$ 는 比例常數이다.

또 一般的인 von-Mises의 等價應力 降伏條件은

$$f^2 = \frac{3}{2} [\sigma'^2_x + \sigma'^2_y + \sigma'^2_z + 2(\tau'^2_{yz} + \tau'^2_{zx} + \tau'^2_{xy})] = \bar{\sigma}^2 \quad (3.6)$$

이다.

한편 塑性變形동안에 行한 塑性일은

$$\bar{W}^p = \bar{\sigma} d\epsilon_p = \sigma'_{ij} d\epsilon^p_{ij} \quad (3.7)$$

平面問題로 單純化시키면 式(3.6)은

$$\bar{\sigma} = \sigma_x^2 - \sigma_x \sigma_y + \sigma_y^2 + 3\tau_{xy}^2$$

로 되고 이에 對應되는 等價塑性變形度増分 $\bar{d\epsilon}^p$ 는

$$\bar{d\epsilon}^p = \frac{2}{\sqrt{3}} [(d\epsilon_x^p)^2 + (d\epsilon_y^p)^2 + (d\epsilon_z^p)^2 + \frac{1}{4}(d\gamma_{xy}^p)^2] \quad (3.8)$$

로 된다.

加工硬化가 있을 때 加工硬化 曲線의 기울기 H' 은

$$X \begin{pmatrix} (\sigma_x + \nu\sigma_y)^2 & (\sigma_x + \nu\sigma_y)(\nu\sigma_y + \sigma_y) & (1-\nu)\tau_{xy}(\sigma_x + \nu\sigma_y) \\ (\sigma_x + \nu\sigma_y)(\nu\sigma_x + \sigma_y) & (\nu\sigma_x + \sigma_y)^2 & (1-\nu)\tau_{xy}(\nu\sigma_x + \sigma_y) \\ (1-\nu)\tau_{xy}(\nu\sigma_x + \sigma_y) & (1-\nu)\tau_{xy}(\nu\sigma_x + \sigma_y) & (1-\nu^2)\tau_{xy}\tau_{xy} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} d\epsilon_x \\ d\epsilon_y \\ d\gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (3.15)$$

3.3. 増分形 假想일의 原理

非線形問題는 増分理論을 適用하여 變形의 全過程을 몇 段階로 分割한 다음, 各段階를 區分的으로 線形解析을 해야한다. 그래서 増分理論을 適用할 수 있는 假想일의 原理를 式으로 表示하면 平衡方程式

$$[S_{ij}(\delta_{kj} + U_{k,j})]_{,i} + \bar{F}_k = 0 \quad (3.16)$$

및 境界條件

$$H' = \frac{d\bar{\sigma}}{d\epsilon_p} \quad (3.9)$$

으로 주어지고

$$d\epsilon^p_{ij} = \frac{3\bar{\sigma}d\bar{\sigma}}{2\sigma'_{ij}H'} \quad (3.10)$$

이므로 式(3.10)으로부터 比例常數 $d\lambda$ 를 求하면

$$d\lambda = \frac{3}{2} \frac{\bar{\sigma}d\bar{\sigma}}{\sigma^2 H'} \quad (3.11)$$

로 된다.

또한 式(3.3)으로부터 應力増分을 求하면

$$\begin{Bmatrix} d\sigma_x \\ d\sigma_y \\ d\tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} d\epsilon_x \\ d\epsilon_y \\ d\gamma_{xy} \end{Bmatrix} - \frac{E}{1-\nu^2} \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\nu \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma'_x \\ \sigma'_y \\ \tau'_{xy} \end{Bmatrix} d\lambda \quad (3.12)$$

가 되고 降伏條件式 式(3.6)에서

$$2\bar{\sigma}d\bar{\sigma} = 3[\sigma'_x\sigma'_y, 2\tau_{xy}] \begin{Bmatrix} d\sigma_x \\ d\sigma_y \\ d\tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (3.13)$$

이 되므로 式(3.13)을 式(3.12)에 代入하여 $d\lambda$ 를 求하면

$$d\lambda = \frac{1}{R} [(\sigma'_x + \nu\sigma'_y)d\epsilon_x + (\nu\sigma'_x + \sigma'_y)d\epsilon_y + (1-\nu)\tau'_{xy}d\gamma_{xy}] \quad (3.14)$$

여기서

$$R = \frac{4(1-\nu^2)}{9E} \bar{\sigma}^2 H' + (\sigma'_x + \nu\sigma'_y)\sigma'_x + (\sigma'_y + \nu\sigma'_x)\sigma'_y + 2(1-\nu)\tau'_{xy}\tau'_{xy}$$

로 되므로 塑性領域에서의 構成方程式은 式(3.14)를 式(3.12)에 代入하면 다음과 같이 된다.

$$\begin{Bmatrix} d\sigma_x \\ d\sigma_y \\ d\tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{pmatrix} - \frac{1}{R}$$

$$U_k = \bar{U}_k \text{ on } S_1 \\ T_k = \bar{T}_k \text{ on } S_2 \quad (3.17)$$

을 만족하는 i 번째區間的 假想일의 原理는 다음 과같다.

$$\int_V \Delta S_{ij} \delta E_{ij}^{(i-1)} dV + \int_V S_{ij}^{(i-1)} \delta \Delta E_{ij} dV = \int_{S_1} \Delta T_k \delta U_k dS + \int_V \Delta \bar{F}_k \delta U_k dV \quad (3.18)$$

따라서 i 번째 荷重增分이 決定되면 式(3.18)에 의해 i 번째 變位 및 應力의 增分量이 求해진다.

本 研究에서는 個個의 要素를 降伏시키는데 必要한 荷重增分量들을 計算하여, 其中 最小의 荷重增分量을 택해, 그 變形段階에서의 荷重增分量으로 택하였다.

4. J-積分值의 計算

4.1. 計算에의 適用

龜裂을 가진 四角平板을 有限要素法으로 應力解析을 하면, 有限要素法에 의해 求해진 龜裂끝 附近의 應力, 變形度는 充分한 精度를 갖는다고 볼 수 없다.

그래서 J-積分의 積分經路에 無關한 性質을 利用하여 應力, 變形度가 充分한 精度를 갖는, 龜裂로부터 比較的 먼저진 要素들을 通하는 積分經路를 取하고, 이에 對한 J-積分值를 求해 破壞力學의 變數로 使用한다.

本 研究에서 解析하고자 하는 試片은 幅 6.35cm, 길이 8.128cm, 두께 0.762cm이고, 中央에 龜裂을 가진 四角平板이다.

이러한 次元을 가진 板은 材料의 降伏強度와 荷重條件 및 龜裂의 크기에 따라서 平面應力 狀態나 平面變形度 狀態가 될 수 있으나, 本 研究에서는 平面變形度 狀態로 假定하였다.

1) 要素의 特性

本 研究에서는 computer容量과 計算時間의 節約을 위해 103個의 節點과 166個의 三角形 要素를 取하여 J-積分值를 求하였고, 아울러 要素의 數가 늘어남에 따른 J-積分值의 接近傾向을 알기 위하여, 같은 試片을 117個의 節點과 195個의 四角形要素를 取해 J-積分值를 求하였다(Fig. 2).

한 要素內에서 J-積分의 積分經路는 要素의 한 邊에 平行하고, 나머지 두 邊의 中點을 通過하는 經路를 擇했다(부록). 또한 全體의 積分經路는 J-積分의 積分經路에 無關함을 보이기 위해 3個의 積分經路를 取하였다.

2) 材料의 特性

材料의 特性은 Fig.3 과 같이 降伏이 일어나기 前에는 線形彈性이고, 降伏이 始作되면 加工硬化 特性을 갖는 應力-變形度曲線으로 그 函數는

$$\begin{aligned} \sigma &= c(\alpha + \epsilon^p)^x \\ \alpha &= (\sigma_y/c)^{1/x} \end{aligned} \quad (4.1)$$

로 주어진다.

4.2. 龜裂의 進展

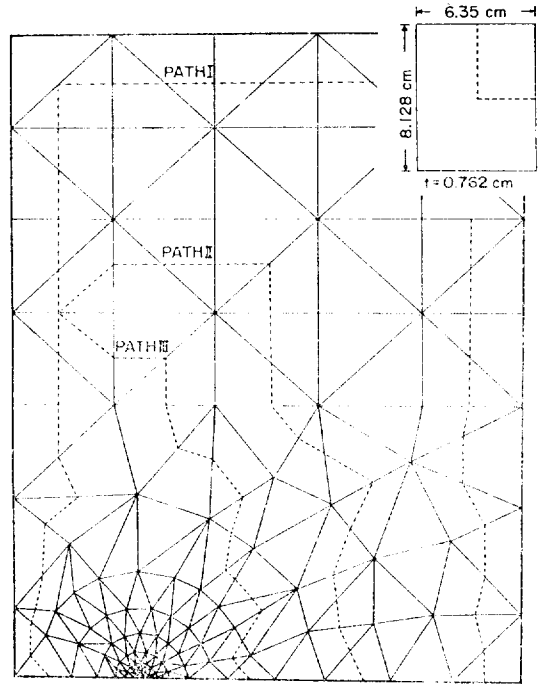


Fig. 2 Centrally Cracked Plate Subjected to Uniaxial Tension and Modeling

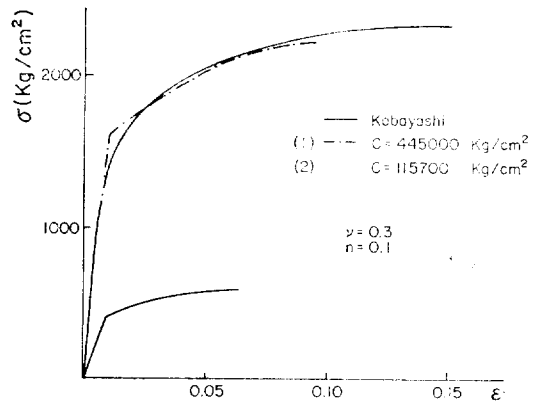


Fig. 3 Stress-strain Curve

一般的으로 韌性이 큰 材料의 龜裂進展은, 材料의 板 두께에 比해서, 比較的 큰 塑性이 龜裂끝 附近에 存在할 때 일어난다[1].

龜裂이 進展하면, 龜裂끝의 앞 領域이 降伏되는 동안 進展하는 龜裂끝의 後方領域은, 特異性을 갖게 된다. 이러한 狀態에서의 J-積分值의 變化를 알기위하여 龜裂이 進展한 要素에 對해 그 要素에 作用하는 힘과 크기가 같고 方向이 反對인 relief force를 줌으로써,

除荷에 의하여 龜裂을 進展시키는 方法과, 龜裂이 進展한 要素에 直接 境界條件을 變化시켜 龜裂을 進展시키는 方法이 있는데, 本 研究에서는 後者の 方法을 擇해 서 龜裂進展에 따른 J -積分値의 變化를 求하였다.

4.3. 數值計算例 및 考察

2個의 Model에 對해 龜裂길이와 荷重狀態에 따른 J -積分値를 求하였다.

Table 1은 Fig. 3의 (1)의 境遇에 對해서 J -積分値를 求하였고, J -積分値가 積分經路에 無關함을 보이기 위해, 3個의 經路에 대한 값들을 비교하였다.

Fig. 4에는 本 program의 檢證을 위해 計算된 J -積分値를 Kobayashi의 結果와 比較하였고, 또 要素數를 달리하는데 따른 傾向을 알기위해 195個의 요소와 166個의 要素에 對하여 求한 J -積分値를 圖示하였다. 그림에서 보는 바와 같이 σ/σ_y 의 값이, 적은 領域에서는 잘 맞으나 클수록 잘 맞지 않는 것은 mesh size에 의한 영향때문인 것 같다.

Fig. 5는 균열이 進展함에 따른 J -積分値를 彈性狀態의 J -積分値로 標準化하여 圖示한 것이다. 여기서 $\sigma/\sigma_y=0.25$ 일때 龜裂이 增加함에 따라, $J/J_{elastic}$ 이 약간씩 커지는 傾向이나, $\sigma/\sigma_y=0.5$ 인 境遇에 對해서는 減

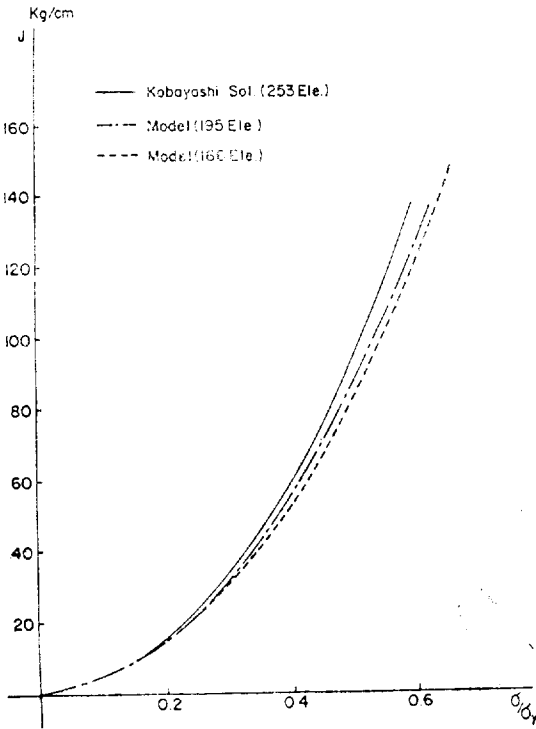


Fig. 4 The Value of J -integral

Table 1. J -integral and Path Independency of Fatigued Crack

Load	J -integral		
	Path I	Path II	Path III
σ/σ_y	kg/cm	J_2/J_1	J_3/J_1
0.16	9.27(9.28)	0.95	0.94
0.20	13.75(13.75)	0.95	0.94
0.25	22.2 (23.0)	0.95	0.93
0.35	43.0	0.95	0.93
0.50	88.0 (96.0)	0.95	0.93
0.60	126.5(137)	0.95	0.93
0.70	178	0.95	0.93
0.75	238 (254)	0.94	0.93

$a/b=0.25$
()내는 reference[4]

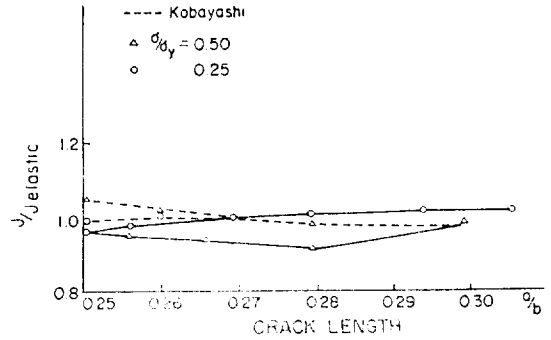


Fig. 5 Normalizing

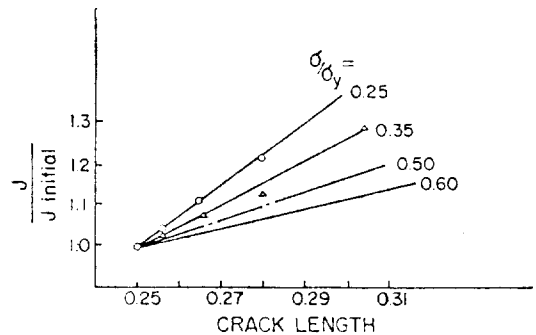


Fig. 6 J -integral as Crock Extends

小하는 傾向이다.

Fig. 6은 進行된 龜裂에 對해서, 荷重狀態에 따른 J -積分値의 變化를 求한 것이다. 이 그림에서 보는 바와 같이 龜裂의 길이가 커지면 J -積分値도 增加한다는 것을 알 수 있다.

Fig. 7은 實際熔接構造物에 使用되는 材料(ASTM

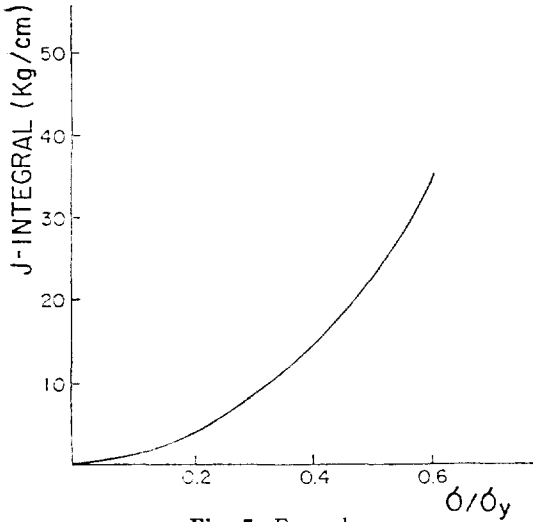


Fig. 7 Example

standard A588.65)에 對한 J-積分值를 求해 圖示한 것이다.

5. 結 論

龜裂을 가진 四角平板에 對해 有限要素法으로 彈塑性 解析을 하고, J-積分值를 求하여 다음과 같은 結論을 얻었다.

- 1) 龜裂을 包含하는 任意의 經路에 對한 J-積分值는 一定하다.
- 2) 本 program으로 어떤 材料이든 材料의 特性值만 주면 J-積分值를 求할 수 있으며, 또 材料의 靱性值를 알면 J-積分值로부터 그에 對應하는 應力을 求할 수 있다.
- 3) 一定 荷重狀態에서 龜裂길이가 늘어나면 J-積分值도 커진다. 이는 破壞力學에서 J-積分值가 臨界變數로 (J)使用되며, 一旦 龜裂이 進展하면 繼續해서 龜裂이 進展해 감을 意味한다.

附 錄

數值計算에 適用되는 要素內에서의 積分經路

Fig. A.1에서와 같이 要素內에서의 J-積分의 積分經路를 三角形要素의 한 邊에 平行하고 다른 두 邊의 中點을 지나가게 取한다.

이 경우 한 要素內에서의 J-積分值 ΔJ를 求하면 다음과 같다.

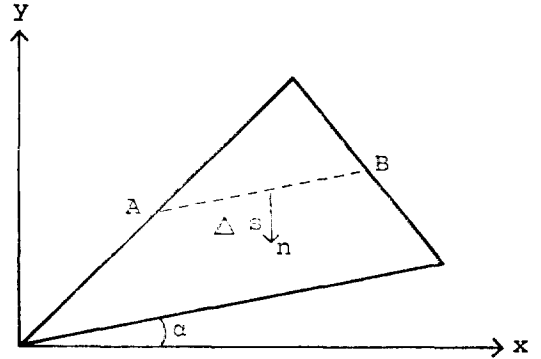


Fig.A.1 Path through the Element

$$\Delta J = \int_{AS} w dy - \int_{AS} T_i \frac{U \partial_i}{\partial x} ds \tag{A.1}$$

式(A.1)을 平面問題에 對해서 定理하면

$$\begin{aligned} \Delta J = & \int_{AS} [\sigma_x \epsilon_x + \sigma_y \epsilon_y + \tau_{xy} (\frac{\partial U_y}{\partial x} + \frac{\partial U_x}{\partial y})] \sin \alpha ds \\ & - \int_{AS} [(\sigma_x \epsilon_x + \tau_{xy} \frac{\partial U_x}{\partial x}) \sin \alpha \\ & - (\tau_{xy} \epsilon_y + \sigma_x \frac{\partial U_y}{\partial x}) \cos \alpha] ds \end{aligned} \tag{A.2}$$

이고

式(A.2)에 變形度 應力 關係式을 代入하여 定理하면

$$\begin{aligned} \Delta J = & \frac{(1-\nu^2) ds}{2E} [(\sigma_y^2 - \sigma_x^2) \sin \alpha + 2\tau_{xy} (\sigma_x + \sigma_y) \cos \alpha \\ & + 2w_x (\sigma_y \cos \alpha - \tau_{xy} \sin \alpha)] \end{aligned} \tag{A.3}$$

(for plane strain)

여기서 $w_x = \frac{1}{2} (\frac{\partial U_y}{\partial x} - \frac{\partial U_x}{\partial y})$

즉 rotation tensor이다.

參 考 文 獻

- [1] G.R. Irwin, "Relation of Crack Toughness Measurements to Practical Applications", Welding J. Res. Suppl. p.519s, 1962.
- [2] Rice J.R., "Mathematical Analysis in the Mechanics of Fracture", Fracture ed. by Liebowitz Vol. II pp.191-311, Academic Press, 1971.
- [3] Knott J.F., "Fundamentals of Fracture Mechanics", John Wiley & Sons. New York, Tronto, 1973.
- [4] A.S. Kobayashi, S.T. chiu, R. Beeuwkes, "A Numerical and Experimental Investigation on the use of J-Integrals" J. of Engineering Frac-

- ture Mechanics, pp.293-305, Vol. V, 1973.
- [5] D.M. Ann, B.M. Kwak “J-積分을 이용한 低炭素鋼의 破壊靱性値決定” 大韓機械學會 論文集 pp. 133-142 三卷 四號 1979.
- [6] S.K. Chan, I.S. Tuba, W.K. Walson, “On the Finite Element Method in Linear Fracture Mechanics, pp.293-305, Vol. V, 1973.
- [7] Rice J.R., “A Path Independent Integral and the Approximate Analysis of Strain Concentration by Notches and Cracks”, J. of Appl. Mech p. 379-, July 1968.
- [8] Inglis C.E., “Stress in a Plate due to the Presence of Cracks and Sharp Corners”, Trans. Ins. Naval Arch. IV, 219, 1913.
- [9] Westergaard H.M., “Bearing Pressure and Cracks” J. of Appl Mech. Series A p.49, June 1939.
- [10] Williams M.L., “On the Stress Distribution on the base of a Stationary Crack” J. of Appl. Mech. p.109, Vol. 24, 1957.
- [11] C.E. Turner, J.S.T. Cheung, “Computation of Post Yield Behavior in Notch Band and Tension Test Pieces”, J. of Strain Analysis pp.303-312, Vol. VII, NO. 4, 1972.
- [12] H. Anderson, “Finite Element Analysis of a Fracture Toughness Test Specimen in the Non-linear Range” J. of Mech. and Physics of Solids, pp.33-51, Vol. 20, 1972.
- [13] 山田嘉昭 “塑性, 粘弾性” Computer による 構造工学 講座 II-2 培風館, 1977.
- [14] 梁永淳 “橫荷重을 받는 船殼板의 非線形 解析” 서울大學校 工学博士學位論文. 1979.
- [15] G.R. Irwin, Kies J.A., Smith H.L., “Fracture Strengths Relative to Onset and Arrest of Crack Propagation” Proc. Test Materials p.58. 640, 1958.
- [16] 白鳥, 三好, 松下, “數値破壊力學”, 第2刷, 實教出版(株), 1981.