論 文

大 韓 造 船 學 會 誌
第21卷 第2號 1984年 6月
Journal of the Society of
Naval Architects of Korea
Vol. 21, No. 2, June 1984

# 船體橫振動應答의 Modal Analysis에 관한 考察

韓 尙 甫* · 金 極 天**

# An Investigation into the Application of the Modal Analysis to the Calculation of Transverse Vibration Responses of Ship Hulls

by

S.B. Han* · K.C. Kim**

## Abstract

The degree of deviation from the orthogonality relations of the actual ship's natural modes and its effects on the vibration responses are numerically investigated.

The results show that, for the practical application of the modal analysis, it is not an essential requirement in utiliation of the expansion theorem to assume the added mass being constant regardless of the mode shapes, or to take the dry hull's natural modes. That is, it is more reasonable to take the actual ship-s natural modes as the set of the normal modes and to get the solution of the normal coordinates equation by neglecting both the inertia coupling and the stiffeness coupling.

## 記 號

$C_{rs}$ : 一般化 減衰係數
$EI(x)$ : 굽힘 剛性度
$kAG(x)$ : 有效剪斷剛性度
$F$ : 起振力의 크기
$J(x)$ : 단위 길이當 質量慣性 모우먼트
$K_{rs}$ : 一般化 剛性係數
$L$ : 船體의 길이
$M_{rs}$ : 一般化 慣性係數
$Y_r(x)$ : 基準振動型의 橫變位
$Y_u$ : 基準振動型의 加振點 變位
$Y_v$ : 基準振動型의 受振點 變位
$Z_r(t)$ : 一般化 起振力
$\Gamma_r(x)$ : $Y_r$의 기울기에 대한 剪斷 寄與分
$\Psi_r(x)$ : $Y_r$의 기울기에 대한 굽힘 寄與分
$C_r$ : mode係數
$c_l(x)$ : 外的減衰의 等價 rectlinear 減衰係數
$c_a(x)$ : 外的減衰의 等價 angular減衰係數
$a$ : 受振點의 應答加速度
$m(x)$ : 단위 길이당 質量(船體에서 附加水質量包含)
$\Delta m_{rs}$ : $r$次 振動型과 $s$次 振動型에 있어서의 附加水質量의 差
$p(x,t)$ : 起振力
$q(x,t)$ : 起振굽힘모우먼트
$t$ : 時間變數
$x$ : 길이 座標
$y(x,t)$ : 橫振動應答 變位
$\alpha E$ : 構造部材의 normal粘性係數
$\beta G$ : 構造部材의 剪斷粘性係數
$\gamma(x,t)$ : $y$의 기울기에 대한 剪斷寄與分

接受日字 : 84年 5月 10日.
* 學生會員, 서울大學校 大學院
** 正 會 員, 서울大學校 工科大學

$\delta_r$ : modal 對數減衰率

$\eta_r(t)$ : 基準座標系

$\psi(x,t)$ : $y$의 기울기에 대한 굽힘 寄與分

$\omega$ : 圓振動數

$\Delta$ : 附加水質量을 포함한 船舶의 重量

## Ⅰ. 緖 言

船體橫振動應答의 計算에 대한 Timoshenko보 類推 modal analysis 方法의 應用은 McGoldrick[1]로 부터 비롯 된다. 이 方法이 내포하는 基本的 問題點은 附加水質量이 振動節數에 따라 변화하기 때문에 固有振動型의 直交性과 展開定理의 適用에 있어서 數理的 正確性이 保障되지 않는다는 점이다. 또한 減衰機構의 복잡성 때문에 減衰係數 算定方法이 아직도 定立되지 못하고 있는 것도 부수적인 문제점이다. 이와 같은 문제점을 내포하기는 하나, McGoldrick의 연구 결과는 船體振動應答의 直接的인 計算 및 實船實驗에 있어서 mode 係數法에 의한 data reduction에 크게 기여하고 있다.

앞에서 언급한 基本的 問題點의 解決을 위하여 Bishop 등[2]이 乾船體의 固有振動型을 基準振動型으로 취하고, 慣性力項에 대한 附加水質量의 寄與分 및 減衰力을 起振力과 더불어 外力項으로 흡수하는 理論體系를 제시했다. 그러나 실제 계산에 있어서는 이 外力項의 취급이 새로운 難題로 제기된다.

本 硏究에서는 종래 다루어 오던 방법대로 接水船體의 固有振動型을 바탕으로 한 展開定理의 適用을 전제로 했을때, 附加水質量으로 인하여 直交條件式이 만족되지 않는 정도와 이것이 궁극으로적 應答크기의 計算値에 미치는 영향을 實船에 대하여 數值實驗的으로 고찰하였다. 아울러 實船實驗 結果로부터 mode係數法에 의하여 modal 對數減衰率을 算定할 때 回轉慣性 效果를 고려하는 경우와 고려하지 않는 경우의 差異도 고찰하였다.

## Ⅱ. Timoshenko보 橫振動應答의 modal analysis

앞서 발표한 報文 [3]에서, 分布起振力 및 分布起振 모우먼트가 동시에 작용할 때 構造部材의 內部減衰는 Kumai[4]의 理論에 따라 처리하고 外的減衰를 rectlinear成分과 angular成分으로 구분하여 等價粘性減衰로 처리할 경우, 展開定理에 의거한 振動應答 計算

$$y(x,t)=\sum_{r=1}^{\infty} Y_r(x)\eta_r(t) \tag{1}$$

$$\psi(x,t)=\sum_{r=1}^{\infty} \Psi_r(x)\eta_r(t) \tag{2}$$

$$\gamma(x,t)=\sum_{r=1}^{\infty} \Gamma_r(x)\eta_r(t) \tag{3}$$

에 있어서 $\eta_r(t)$는 方程式

$$M_{rr}\eta_r(t)+\sum_{s=1}^{\infty} C_{rs}\eta_r(t)+K_{rr}\eta_r(t)=Z_r(t),\quad r=1,2,\cdots \tag{4}$$

의 解 임을 보였다. 여기서, $M$ 및 $K$는 直交條件式

$$\int_0^L (mY_rY_s+J\Psi_r\Psi_s)dx=M_{rs}=\begin{cases}0, & r\neq s\\ M_{rr}, & r=s\end{cases} \tag{5}$$

$$\int_0^L (EI\Psi_r'\Psi_s'+kAG\Gamma_r\Gamma_s)dx=K_{rs}=\begin{cases}0, & r\neq s\\ K_{rr}=\omega^2M_{rr}, & r=s\end{cases} \tag{6}$$

에 의해 산정되고, $C_{rs}$ 및 $Z_r(t)$는 다음과 같다.

$$C_{rs}=C_{sr}=\int_0^L \alpha EI\Psi_r'\Psi_s'dx+\int_0^L \beta kAG\Gamma_r\Gamma_sdx+\int_0^L c_lY_rY_sdx+\int_0^L c_a\Psi_r\Psi_sdx \tag{7}$$

$$Z_r(t)=\int_0^L pY_rdx+\int_0^L q\Psi_rdx \tag{8}$$

## Ⅲ. 船體橫振動應答 計算

實船의 固有振動型을 基準振動型으로 취하여 展開定理 (1), (2), (3)을 적용한다. 이 경우 附加水質量 效果 때문에 (5), (6)에서 $r\neq s$일때 $M_{rs}\neq 0$, $K_{rs}\neq 0$이다. $r$次 振動型과 $s$次 振動型에서의 附加水質量의 差를 $\Delta m_{rs}$로 表記하고 附加水質量의 回轉慣性에 대한 寄與度는 매우 작으므로 $J$의 振動節數에 따른 변화는 무시하면, $r\neq s$때 $M_{rs}$ 및 $K_{rs}$ 값들은

$$M_{rs}=\frac{\int_0^L \Delta m_{rs}Y_rY_sdx}{(\omega_r/\omega_r)^2-1} \tag{9}$$

$$K_{rs}=\frac{\int_0^L \Delta m_{rs}Y_rY_sdx}{(1/\omega_s^2-1/\omega_r^2)} \tag{10}$$

와 같다(附錄 1 參照).

이제, $r=s=n$까지 취할때 $\eta_r(t)$에 관한 方程式은

$$[M]\{\eta(t)\}+[C]\{\eta(t)\}+[K]\{\eta(t)\}=\{Z(t)\} \tag{11}$$

와 같이 matrix型式으로 기술된다.

(11)의 일반적 해법 즉, $[M]$, $[C]$ 및 $[K]$의 對稱性與否에 무관한 해법을 Fawzy등[5]이 제시했다.

週期的 起振力에 대하여서는

$$\{Z(t)\}=\{\Phi\}e^{i\omega t} \tag{12}$$

로 표기할 수 있고, $\eta_r(t)$는 다음과 같이 算定된다.

$$\boldsymbol{H}=\Sigma\Omega\Pi\Phi e^{i\omega t} \tag{13}$$

여기서,

$\boldsymbol{H}=\{\eta(t)\}$

$\boldsymbol{\Sigma}=(11)$의 eigenvector matrix

$\Pi=(11)$의 eigenrow matrix (14)

$\Omega=\mathrm{diag}\{(i\omega-\lambda_1)^{-1},\ (i\omega-\lambda_2)^{-1},\cdots,(i\omega-\lambda_{2n})^{-1}\}$,

$\lambda$: (11)의 固有值

$\boldsymbol{\Phi}=\{\Phi\}$

(13)을 (1), (2) 및 (3)에 代入함으로서 振動應答 크기를 算定할 수 있다.

## IV. 實船에 대한 數值計算例

緖言에서 기술한 바와 같이, McGoldrick의 理論體系로 부터 비롯된 종래의 計算方法은 船體固有振動型을 基準振動型으로 취하여 展開定理를 적용하되, 附加水質量의 振動節數에 따른 변화는 무시하므로써 $r\neq s$ 때 $M_{rs}\cong 0$, $K_{rs}\cong 0$로 취하여 $\eta_r(t)$의 算定을 (4)에 의거하고 있다.

本 數值計算의 目的은 1次的으로(11)의 $[M]$, $[K]$에서 (9), (10)에 의거한 off-diagonal element들의 diagonal element에 대한 상대적 크기를 살피고, 궁극적으로는 前者가 應答 크기에 미치는 영향을 살피는 데 있다.

**Table 1** Principal particulars of the bulk carrier M/S Ocean Ever adopted for numerical calculations

| | | |
|---|---|---|
| Length overall | | 224.16 m |
| Length between perpendiculars | | 215.00 m |
| Breadth(molded) | | 32.00 m |
| Depth(molded) | | 15.16 m |
| Draft(design) | | 10.52 m |
| Deadweight | | 46,000 tons |
| Service speed | | 14.7 knots |
| Main engine | Diesel, | 10,655 bhp×131 rpm |
| Propeller | | 4 blades |
| Ballast condition | | |
| Draft | | 5.90 m |
| Displacement | | 31,000 tons |
| Full load condition | | |
| Draft | | 10.55 m |
| Displacement | | 58,000 tons |

試算對象船은 Table 1에 主要要目이 주어진 撒物運搬船이며, 上下振動을 다루었다.

固有振動計算은 船體를 43等分으로 분할하여 Myklestad-Prohl 方法에 따라 等價離散系로 치환하고 傳達matrix法으로 定式化했으며 Gümbel의 初期值法을 이용하여 해를 구하였다. 이 배의 system parameter 계산은 [6]에 의거 하였는데, 附加水質量 3次元 修正係數로서는 有限長 楕圓斷面 柱狀體에 대한 값이 이용되었다.

$r=s$ 때 (5) 및 (6)에 의하여, $r\neq s$ 때 (9) 및 (10)에 의하여 계산한 $M_{rs}$ 및 $K_{rs}$값들이 Table 2, 3, 4 및 5에 주어져 있다.

上下振動應答計算에 있어서는 輕荷狀態에서 프로펠러 位置에 크기 1 ton의 調和起振力이 작용할 경우를 다루었다. 먼저, Table 2 및 4에 주어진 $[M]$ 및 $[K]$의 값을 바탕으로 하여 (11)의 해 $\eta$(13)을 계산하고, 비교 목적으로 $[M]$ 및 $[K]$에서 off-diagonal element를 零으로 취했을 경우도 계산하였다. $C_{rs}$의 算定은 (7)에 의거하였는 데, 外的減衰는 무시했고, $\alpha$ 및 $\beta$의 값으로는 Hirowatari[7]의 實驗值가 사용되었다.

$r=s=3$까지 취하여 계산한 $\eta$ 振幅과 加振點의 共振振幅을 비교한 것이 Table 6이다.

**Table 2** Generalized mass $M_{rs}$: ballast condition (in Tonne·m²)

| Node | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 9,997 | 17 | 294 | 9 | 352 | 53 |
| 3 | 4 | 8,318 | 24 | 256 | 15 | 327 |
| 4 | 26 | 10 | 7,946 | 25 | 256 | 32 |
| 5 | 1 | 54 | 13 | 8,437 | 39 | 360 |
| 6 | 10 | 2 | 80 | 23 | 8,950 | 89 |
| 7 | 1 | 27 | 6 | 140 | 58 | 9,427 |

**Table 3** Generalized mass $M_{rs}$: full load condition (in Tonne·m²)

| Node | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 12,544 | 2 | 123 | 22 | 161 | 86 |
| 3 | 1 | 9,942 | 20 | 116 | 24 | 178 |
| 4 | 11 | 8 | 8,682 | 28 | 145 | 21 |
| 5 | 1 | 25 | 16 | 9,052 | 20 | 106 |
| 6 | 5 | 3 | 47 | 12 | 10,153 | 8 |
| 7 | 2 | 16 | 5 | 43 | 6 | 10,964 |

**Table 4** Generalized stiffness $K_{rs}$ : ballast Condition (in MN·m)

| Node | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 272,080 | 456 | 8,005 | 241 | 9,580 | 1,439 |
| 3 | | 1,034,100 | 3,015 | 31,920 | 1,852 | 40,671 |
| 4 | | | 2,463,700 | 7,878 | 79,274 | 9,823 |
| 5 | | SYM. | | 5,008,400 | 23,048 | 213,900 |
| 6 | | | | | 8,879,500 | 88,788 |
| 7 | | | | | | 14,413,000 |

**Table 5** Generalied stiffness $K_{rs}$ : full load condition (in MN·m)

| Node | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 277,450 | 49 | 2,719 | 486 | 3,565 | 1,914 |
| 3 | | 986,030 | 1,998 | 11,488 | 2,346 | 17,696 |
| 4 | | | 2,179,300 | 7,117 | 36,281 | 5,287 |
| 5 | | SYM. | | 4,156,100 | 8,993 | 48,440 |
| 6 | | | | | 7,786,700 | 6,237 |
| 7 | | | | | | 12,218,000 |

**Table 6** Normal coordinate amplitudes and resonance vibration amplitudes at the stern under one ton sinusoidal force: ballast condition (unit : $\mu$m)

| | Eq. (11) | | $M_{rs}=K_{rs}=0$ for $r\neq s$ in Eq. (11) | |
|---|---|---|---|---|
| | Resonant amp. | Normal coord. amp. | Resonant amp. | Normal coord. amp. |
| 2-node resonance | 683.52 | $\eta_1$ : 680.00<br>$\eta_2$ : 1.27<br>$\eta_3$ : 2.25 | 683.00 | $\eta_1$ : 682.00<br>$\eta_2$ : 1.24<br>$\eta_3$ : 0.45 |
| 3-node resonance | 94.12 | $\eta_1$ : 1.04<br>$\eta_2$ : 92.40<br>$\eta_3$ : 0.68 | 93.43 | $\eta_1$ : 1.03<br>$\eta_2$ : 92.70<br>$\eta_3$ : 0.68 |
| 4-node resonance | 27.37 | $\eta_1$ : 0.42<br>$\eta_2$ : 0.65<br>$\eta_3$ : 26.30 | 27.14 | $\eta_1$ : 0.35<br>$\eta_2$ : 0.65<br>$\eta_3$ : 26.40 |

## V. 減衰係數

實船의 減衰機構가 복잡하여, 현재로서는 成分別 減衰係數에 관한 資料가 불충분하기 때문에 一般化 減衰係數를 (7)에 의해 算定하는 일은 매우 곤란하다. 實船實驗資料들은 實驗技法 및 data reduction 上의 이유때문에 주로 modal 對數減衰率에 관한 것이다[2, 4, 7, 8, 9, 10, 11]. modal 對數減衰率을 이용할 경우 一般化 減衰係數는

$$C_{rs}=\begin{cases}\left(\dfrac{\delta_r}{\pi}\right)\omega_r M_{rr}, & r=s\\ 0, & r\neq s\end{cases} \tag{15}$$

와 같이 산정한다.

$\delta_r$의 導出은 주로 mode係數法

$$\delta_r=C_r\left(\frac{F}{a}\right)\left(\frac{g\pi}{\Delta_r}\right) \tag{16}$$

여기서

$$C_r=\frac{\Delta_r Y_u Y_r}{\int_0^L (m_r Y_r^2+J_r\Psi_r^2)\,dx} \tag{17}$$

에 의거하나, 종래에는 (17)에서 回轉慣性效果를 무시하는 경향이었다.

$\delta_r$에 관한 기존 資料들이 高次振動型 일수록 離散性이 큰 데, 이는 實驗技法上의 문제도 있겠으나 (17)에서 回轉慣性效果를 무시해 온 데에도 원인이 있다. 이 점을 살피기 위하여 Table 1의 對象船에 대하여 輕荷狀態때 回轉慣性效果의 算入 與否가 $C_r$에 미치는 영향을 조사했다. 그 결과는 Table 7과 같다.

**Table 7** Effects of rotary inertia on the mode factor

| Node | Ratio of $\frac{C_r \text{ including rotary inertia}}{C_r \text{ neglecting rotary inertia}}$ |
|---|---|
| 2 | 0.993 |
| 3 | 0.990 |
| 4 | 0.988 |
| 5 | 0.983 |
| 6 | 0.975 |
| 7 | 0.960 |

## Ⅵ. 考察 및 結論

Table 2, 3, 4 및 5에서 보는 바와 같이, 振動節數에 따른 附加水質量의 변화를 고려하는 경우 一般化 慣性 matrix 및 剛性 matrix의 off-diagonal elements 크기의 diagonal elements에 대한 比는 4%이하이고, Table 6으로부터 알 수 있는 바와 같이 off-diagonal elements를 考慮한 解와 이를 무시한 경우의 解는 매우 근접한 값을 가짐을 알 수 있다. 이로부터 船體固有振動型을 基準振動型으로 취할 경우 理論上으로는 直交性이 保障되지 않으나 그 程度가 數値計算的 觀點에서는 매우 작고, 궁극적으로 振動應答計算 結果에 미치는 영향을 무시할 수 있음을 알 수 있다.

따라서, 船體橫振動應答 計算에 modal analysis方法을 應用함에 있어서 附加水質量의 振動次數에 따른 변화를 고려하는 통상적인 固有振動 計算 결과를 바탕으로 하여 展開定理를 적용하고, 基準座標系에 관한 方程式에서 一般化 慣性matrix 및 一般化 剛性matrix의 off-diagonal elements를 零으로 취하여 解를 구하는 方法의 有用性이 인정된다. 이 方法이 直交條件式을 保障하기 위해 附加水質量의 振動型에 따른 변화를 무시하는 方法보다 合理的이고, 또 附加水質量 效果를 外力項에 包含시키는 方法에 비하여 실용적면에서 계산 운용이 훨씬 용이하다.

Table 7에 의하면 系의 回轉慣性 效果를 算入한 mode 係數와 同 效果를 算入하지 않은 mode係數의 差異가 2節 振動에서 1%, 7節 振動에서 4%이다.

이로부터, mode係數法에 의하여 modal 對數減衰率을 導出할 때 mode係數에 回轉慣性 效果를 算入하는 것이 理論上으로 뿐만 아니라 실제 면에서도 所望스럽다. 특히, 高次振動型 일수록 그 필요성이 강조된다.

## 參 考 文 獻


〔1〕 McGoldrick, R.T. et al., "Recent Developments in the Theory of Ship Vibration", *DTMB Report* 739, 1951.

〔2〕 Bishop, R.E.D. et al., *Hydroelasticity of Ships*, Cambridge University Press., London, 1979.

〔3〕 金極天등, "基準振動型重疊法에 의한 Timoshenko 보 類推 構造體의 强制橫振動解析", 大韓造船學會誌 第20卷 1號, 1983.

〔4〕 Kumai T., "Damping Factors in the Higher Modes of Ship Vibration", *Reports of RIAM Vol. VI, No. 21*, Kyushu Univ., 1958/*European Shipbuilding*, *Vol. VII, No. 1*, 1958.

〔5〕 Fawzy, I. et al., "On the Dymamics of Linear Non-Conervative Systems", *Proc. Royal Soc. London*, *Vol. 352*, 1976.

〔6〕 金極天등, "船體振動解析 電算프로그램 개발에 관한 연구", 科學技術處報文 R-75-9, 1975.

〔7〕 日本海事協會, 船舶振動設計指針, 1981.

〔8〕 McGoldrick, R.T., "Comparison between Theoritically and Experimencally Determined Natural Frequencies and Modes of Vibration of Ships", *DTMB Report 906*, 1954.

〔9〕 Betts, C.V. et al., "A survey of Internal Hull Damping", *Trans. of RINA Vol. 119*, 1976.

〔10〕 Armand, J.L. et al., "Analytical Identification of Damping in Ship Vibrations from Full-Scale Measuremeets", *Procedings of Symposium on Propeller Induced Ship Vibration*, RINA, Londnn, Dec. 1979.

〔11〕 Blevins, R.D., "Damping of Structures", *Flow Induced Vibration*, Van Norstrand Reinhold Co., New York, 1977.

### 附錄 1. 本文中의 (9) 및 (10)

Timoshenko보 類推 船體固有橫振動方程式

$$m\ddot{y}-(kAG\,\gamma)'=0 \tag{A-1}$$

$$J\ddot{\psi}-(EI\,\psi')'-kAG\,\gamma=0 \tag{A-2}$$

$$\gamma=y'-\psi \tag{A-3}$$

에 대하여, 調和分離法을 적용함으로써

$$-\omega_r^2 m_r Y_r-[kAG\Gamma_r]'=0 \tag{A-4}$$

$$-\omega_r^2 J_r\Psi_r-[EI\Psi_r']'-kAG\Gamma_r=0 \tag{A-5}$$

$$Y_r'=\Psi_r+\Gamma_r \tag{A-6}$$

이 얻어진다.

(A-4)에 $Y_s$를 곱한 다음, 船體 길이에 걸쳐 積分한다. 兩端自由에 대한 境界條件式을 고려 해 주면

$$-\omega_r^2\int_0^L m_r Y_r Y_s dx+\int_0^L kAG\Gamma_r Y_s' dx=0 \tag{A-7}$$

上記 演算에서 $r$를 $s$로 바꾸면

$$-\omega_s^2\int_0^L m_s Y_s Y_r dx+\int_0^L kAG\Gamma_s Y_r' dx=0 \tag{A-8}$$

(A-8)−(A-7)하여

$$\int_0^L(\omega_r^2 m_r-\omega_s^2 m_s)Y_r Y_s dx -\int_0^L kAG(\Gamma_r Y_s'-\Gamma_s Y_r')dx=0 \tag{A-9}$$

(A-5)에 대하여 (A-4)의 경우와 同一한 演算 과정을 거치면

$$\int_0^L(\omega_r^2 J_r-\omega_r^2 J_s)\Psi_r\Psi_s dx +\int_0^L kAG(\Gamma_r\Psi_s-\Gamma_s\Psi_r)dx=0 \tag{A-10}$$

이제, (A-9)+(A-10)하여

$$\int_0^L\{(\omega_r^2 m_r-\omega_s^2 m_s)Y_r Y_s +(\omega_r^2 J_r-\omega_s^2 J_s)\Psi_r\Psi_s\}dx=0 \tag{A-11}$$

(A-11)에

$$\left.\begin{aligned} J_r&=J_s=J && \text{(A-12)}\\ m_s&=m_r+\Delta m_{rs} && \text{(A-13)}\end{aligned}\right\}$$

을 代入하므로써 $r\neq s$ 때 本文中의 (9) 즉,

$$M_{rs}=\int_0^L(m_r Y_r Y_s+J\Psi_r\Psi_s)dx =\frac{\int_0^L \Delta m_{rs} Y_r Y_s\, dx}{\left(\frac{\omega_r}{\omega_s}\right)^2-1} \tag{A-14}$$

을 얻는다.

(A-5)에 $\Psi_s$를 (A-4)에 $Y_s$를 곱한 결과를 가지고 위에서와 유사한 연산 과정을 거치므로써 $r\neq s$ 때 本文中의 (10) 즉,

$$K_{rs}=\int_0^L\left(EI\Psi_r'\Psi_s'+kAG\Gamma_r\Gamma_s\right)dx =\frac{\int_0^L \Delta m_{rs} Y_r Y_s dx}{\frac{1}{\omega_s^2}-\frac{1}{\omega^2}} \tag{A-15}$$

를 얻을 수 있다.