

線型時變 시스템 基準 모델 適應制御에 관한 考察

(A Study on the Linear Time-Varying System of MRAC)

具 倬 謀*, 辛 長 奎*, 金 彩 英*

(Tak Mo Koo, Jang Kyoo Shin and Che Young Kim)

要 約

Hyperstability 理論에 의한 連續時間 시스템의 制御 알고리즘을 離散時間 線型時變 시스템의 적응제어에 직접 이용하여 시스템의 설계를 간단하게 하였다. 基準人力으로서 계단함수와 램프함수를 인가하여 설계된 시스템의 動作特性을 조사해 본 결과 工程의 出力이 모델의 出力에 적응함을 알 수 있었다.

Abstract

A method is proposed for the adaptive control of linear time varying discrete systems. The stability problem of the model reference adaptive control systems is considered by means of the properties of hyperstability. The hyperstability approach also allows for solutions to the adaptation mechanism. Employing the principles of the continuous time case with output feedback renders it to the discrete case which simplified the system design. The system response is obtained by applying the ramp and step input as a reference signal to the system respectively.

With checking the adaptation time for ramp and step input the validity of proposed algorithm was confirmed by the computer simulation.

I. 序 論

시스템에서 파라미터의 변화가 심하거나 時變 시스템일 경우에는 계환理論이나 最適制御理論으로는 시스템 制御가 어려워진다. 따라서 끊임없이 同定(identification)과 controlldr 構成을 행함으로써 보다 安全하고 効率的인 適應 制御를 행해야 한다.

適應 制御의 方法에는 크게 自調安定器(self-tuning regulator)와 基準 모델 適應 制御(model reference adaptive control)로 나눌 수 있다. 現在の MRAC의 形態를 갖추기 시작한 것은 1974년의 Monopoli의 研究부터이다.^[1] Monopoli는 増分誤差信號(augmented error signal)를 줄이는 方法을 이용하여 適應法(adap-

tive law)을 구하였다. MRAC 方法에는 Lyapunov 함수에 의한 것과 hyperstability 및 positivity 개념에 의한 것이 있다. Narendra^[2,3] 등에 의하여 研究된 前者의 方式은 補助(auxiliary)信號發生器 出力에 適當한 여파기를 넣음으로써 시스템을 漸近的으로 安定하게 하였다. 이 方法은 MRAC 시스템의 안정을 위한 適應法을 구하는데 필요한 Lyapunov 함수를 찾는 것이 어렵다는 短點이 있다. Landau^[4,5] 등에 의해서 研究된 後者の 方法은 SVF(state variable filter)를 넣어 微分器의 使用을 피함으로써 雜音으로인한 시스템의 不安定을 막는 장점을 지니고 있다. 本 論文에서는 連續 시스템(continuous system)의 制御 알고리즘^[6]을 직접 離散時間 시스템에 適用하여 hyperstability 理論에 입각한 MRAC의 動作特性을 컴퓨터 시뮬레이션으로 確認하였다. 本 制御 알고리즘에서는 微分器 대신 SVF를 넣어 誤차를 漸近的으로 0에 接近하게 하였으며 出力의 誤차가 계환되는 出力誤差方式(out-

*正會員, 慶北大學校 工科大学 電子工學科
(Dept. of Electron. Eng., Kyung-pook National Univ.)

接受日字: 1984年 5月 21日

put error method)을 使用하였다.

II. 理 論

1. Hyperstability와 Positivity

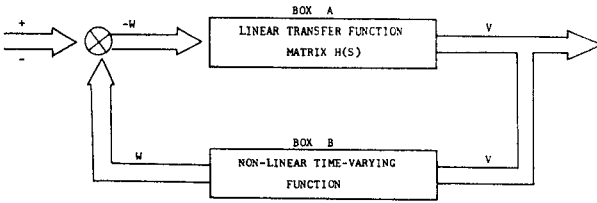


그림 1. Popov의 hyperstability 이론에 의한 벡터 루프 모델

Fig. 1. Vector loop model for using Popov's hyperstability theory.

Hyperstability 이론은 Popov에 의해 처음으로 提案되었다. 그림 1에서 非線形 시스템인 Box B의 入力 벡터 V와 出力 벡터 W의 관계는 Popov의 積分不等式 $\int_0^{t_1} V^T W dt \geq -r_0$ (1)

for all $t_1 > 0$

으로 주어진다. (1)식을 만족하는 모든 閉환 블럭에 대해서 閉환 시스템이 漸近的으로 安定하다면, 그 시스템과 線形傳達函數 matrix를 hyperstable하다고 한다.

Hyperstability가 될 조건은 傳達函數 matrix가 positive-real이어야 한다. 즉, $\text{Re } S \geq 0$ 에서 H(S)의 극점이 없어야 한다.

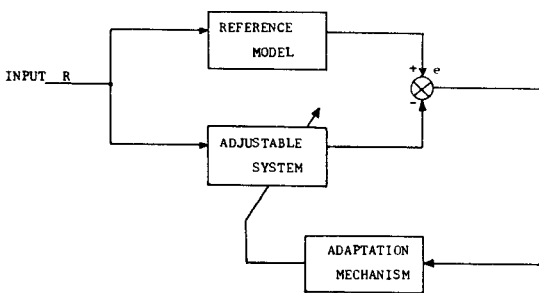


그림 2. MRAC의 기본 블럭도
Fig. 2. Basic configuration of a MRAC.

그림 2는 一般的인 基準 모델 適應 制御의 블럭圖이다. 여기서 adjustable system이 工程(plant)이며 e는 출력오차이다. 이 그림에서 工程의 出力이 adaptation mechanism을 거쳐서 모델의 出力과 一致하도록 工程을 制御하는 것이 MRAC 方法이다.

그림 3 (a)는 工程의 傳達函數가 $K_c(S)/F(S)$ 로 주

어진 경우, 모델을 $G(S)/F(S)$ 로 하여 hyperstability 이론을 基準 모델 適應 制御에 適用한 경우이며 이의 등가회로는 그림 3 (b)와 같다. 여기서 工程의 利得은 다음과 같이 表現된다.

$$K_c = \int_0^t \varphi_1(v, t, \tau) d\tau + \varphi_2(v, t) + K_0 \quad (2)$$

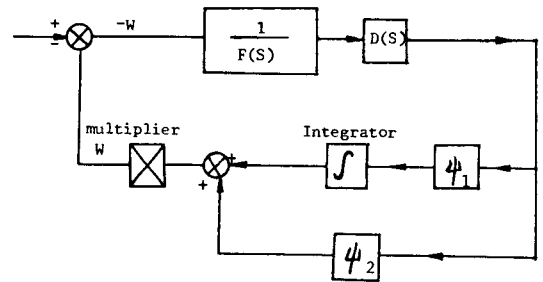
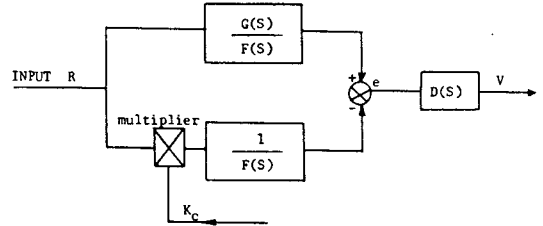


그림 3. MRAC에 적용한 hyperstability 이론

- (a) 시스템 블럭도
- (b) MRAC의 등가회환 시스템

Fig. 3. Hyperstability theory applied to MRAC.
(a) System block diagram to be considered.
(b) Equivalent feedback system of MRAC.

식(2)에서 φ_1, φ_2 는 Popov의 積分不等式을 만족하는 블럭이며 D(S)는 出力 誤差와 Popov의 積分不等式에서 入力 벡터 V와의 관계를 맺어주는 식이며, K_0 는 초기치이다.

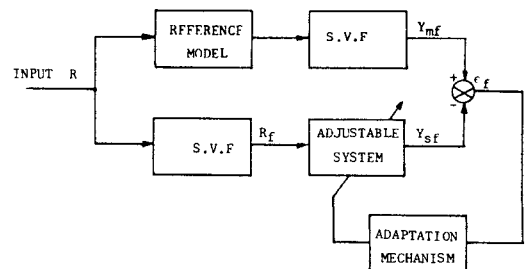


그림 4. 상태 변수 필터를 이용한 병렬 MRAC
Fig. 4. Parallel MRAC using S.V.F. structure.

그림 4는 그림 2에서 시스템 불안정의 한 요인인 微分器의 使用을 피하고 SVF를 使用한 基準 모델 適應制御의 블럭圖이다.

2. 시스템의 設計

基準 모델 適應 制御 시스템의 設計 順序는 다음과 같다.

첫째, 基準 모델 適應 制御 시스템을 hyperstability 理論을 만족하는 두개의 블럭으로 構成된 等價 補償 시스템 (equivalent feedback system)으로 나눈다.

둘째, 適應法을 구하기 위해 Popov의 積分不等式을 만족하는 φ_1 및 φ_2 의 해를 구한다.

셋째, 시스템의 안정도(stability)를 만족하는 適應法의 나머지 부분의 해를 구한다.

넷째, 초기의 基準 모델 適應 制御 시스템의 構成으로 되돌아 간다.

1) 첫번째 단계

基準 모델의 一般式^[1]과 모델의 出力 다음에 있는 SVF의 傳達函數는 各各式 (3)과 (4)로 주어진다.

$$\left(\sum_{i=0}^n a_i p^i\right) Y_m = \left(\sum_{i=0}^m b_i p^i\right) R, \quad a_n = 1 \quad (3)$$

$$\left(\sum_{i=0}^{n-1} c_i p^i\right) Y_{m,f} = Y_m, \quad c_{n-1} = 1 \quad (4)$$

여기서 Y_m 은 모델의 出力이고 $Y_{m,f}$ 는 SVF를 거친 모델의 出力이다. 시스템의 入力 다음에 있는 SVF의 傳達函數와 工程의 一般式^[5]은 各各式 (5)와 (6)으로 주어진다.

$$\left(\sum_{i=0}^{n-1} c_i p^i\right) R_f = R, \quad c_{n-1} = 1, \quad (5)$$

$$\left(\sum_{i=0}^n a_i(v, t) p^i\right) Y_{s,f} = \left(\sum_{i=0}^m \hat{b}_i(v, t) p^i\right) R_f, \quad \hat{a}_n(v, t) = 1. \quad (6)$$

여기서 $Y_{s,f}$ 는 SVF를 거친 공정의 出力이며 R_f 는 SVF를 거친 기준 入力이다.

出力 誤差 (generalized output error)를 (7)식과 같이 定義하면,

$$\epsilon_f = Y_{m,f} - Y_{s,f} \quad (7)$$

이고 adaptation mechanism은

$$V = D(P) \epsilon_f = \left(\sum_{i=0}^{n-1} d_i p^i\right) \epsilon_f, \quad (8)$$

$$\hat{b}_i(v, t) = \int_0^t \varphi_{i1}(v, t, \tau) d\tau + \varphi_{21}(v, t) + \hat{b}_i(0) \quad (9)$$

로 표현되며, 시스템의 설계 目的은 出力 誤差를 漸近的으로 0으로 만드는 것이다.

즉,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \epsilon_f = \lim_{t \rightarrow \infty} (Y_{m,f} - Y_{s,f}) = 0 \quad (10)$$

이 되도록 制御器를 設計하여야 한다.

(3), (4) 및 (5)식에서

$$\left(\sum_{i=0}^n a_i p^i\right) Y_{m,f} = \left(\sum_{i=0}^m b_i p^i\right) R_f \quad (11)$$

이 되며, (10)식에서 (6)식을 빼면

$$\left(\sum_{i=0}^n a_i p^i\right) \epsilon_f = \sum_{i=0}^m (b_i - \hat{b}_i(v, t)) p^i R_f$$

가 된다.

따라서 等價 補償 시스템은 線形 feed-forward 블럭인

$$\left(\sum_{i=0}^n a_i p^i\right) \epsilon_f = W_1, \quad (12)$$

$$V = D(p) \epsilon_f \quad (13)$$

와 非線形時變 블럭인

$$W = -W_1 = \sum_{i=0}^m \left[\int_0^t \varphi_{i1}(v, t, \tau) d\tau + \varphi_{21}(v, t) + \hat{b}_i(0) - b_i \right] p^i R_f \quad (14)$$

으로 表現된다.

2) 두번째 단계

Popov의 積分不等式을 I라 하면

$$I = \int_0^t v w dt = \int_0^t v p^i R_f \left[\int_0^t \varphi_{i1}(v, t, \tau) d\tau + \varphi_{21} + \hat{b}_i(0) - b_i \right] dt \geq -r_i^2$$

로 되며, I_1 과 I_2 를 다음과 같이 定義하면,

$$I_1 \triangleq \int_0^t v p^i R_f \left[\int_0^t \varphi_{i1}(v, t, \tau) d\tau + \hat{b}_i(0) - b_i \right] dt \geq -r_i^2 \quad (15)$$

$$I_2 \triangleq \int_0^t v p^i R_f \varphi_{21}(v, t) dt \geq -r_i^2 \quad (16)$$

$I = I_1 + I_2$ 가 된다.

I_2 의 해를 구하면,

$$\varphi_{21}(v, t) = k_{21}(t) v p^i R_f(t), \quad k_{21}(t) > 0 \quad (17)$$

이 되고 (17)식이 比例 適應 (proportional adaptation) 일 경우에는

$$\varphi_{21}(v, t) = k_{21} v p^i R_f(t), \quad k_{21} > 0 \quad (18)$$

이 된다. I_1 의 해는 式(19)를 式(15)에 代入하여 式(20)과 같은 積分適應 (integral adaptation)을 얻게 된다.

$$\int_0^t \left\{ \frac{df(t)}{dt} \right\} k_1 f(t) dt = \frac{k_1}{2} [f^2(t_1) - f^2(0)] \geq -\frac{1}{2} k_1 f^2(0), \quad k_1 > 0 \quad (19)$$

$$\varphi_{i1}(v, t, \tau) = k_{i1}(t - \tau) v(\tau) p^i R_f(\tau) \quad k_{i1}(t - \tau) \geq 0, \quad \tau \leq t \quad (20)$$

3) 세번째 단계

等價 feed forward 블럭의 傳達函數

$$H(s) = \frac{\epsilon_f(s)}{W_1(s)} = \frac{D(s)}{\sum_{i=0}^n a_i s^i} = \frac{\sum_{i=0}^{n-1} d_i s^i}{\sum_{i=0}^n a_i s^i} \quad (21)$$

는 positive-real이어야 한다.

4) 네번째 단계

초기의 基準 모델 適應 制御 시스템의 構造로 되돌아 간다. 그림 5는 모델과 工程이 各各 $0.5/(s^2 + 1.5s + 0.5)$ 와 $K_c(s)/(s^2 + 1.5s + 0.5)$ 로 주어진다고 가정하고 MRAC를 이차계에 대해서 設計한 예이다.

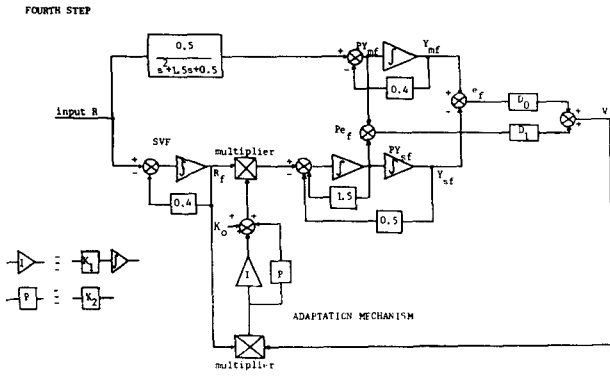


그림 5. 2차 계통도
Fig. 5. Second order system block diagram.

III. 컴퓨터 시뮬레이션

連續 시스템의 制御 알고리즘을 離散 시스템에 適用하기 위해서 먼저 원하는 基準 모델의 傳達函數 Hm을 다음과 같이 둘 수 있다.

즉,

$$H_m(s) = \frac{K_m}{(s+a)(s+b)} \quad (22)$$

여기서 a와 b는 基準 모델 시스템이 安定해야 하므로 모두 陽의 實數이어야 한다. 式(22)을 差分方程式으로 바꾸면 다음의 式을 얻을 수 있다.

즉,

$$X_m(k+1) = A(T)X_m(k) + B(T)R(k)$$

$$Y_{MF}(k+1) = X_{m1}(k+1)$$

$$D_{YMF}(k+1) = X_{m2}(k+1)$$

단, YMF(k)는 모델의 최종 출력이며, DYMF(k)는 X_{m2} 상태에서 모델의 출력이다.

時變 利得을 갖는 工程의 傳達函數 H_p는 다음과 같이 表現된다.

$$H_p(s) = \frac{Y_{SF}(s)}{R_f(s)} = \frac{K_c(s)}{(s+a)(s+b)} = H_1(s)H_2(s)$$

여기서 H₂(s) = K_c(s),

$$H_1(s) = \frac{1}{(s+a)(s+b)} \quad (23)$$

이다.

式(23)을 差分方程式으로 나타내면

$$X_a(k+1) = A_a(T)X_a(k) + B_a(T)dr(k),$$

$$Y_a(k+1) = X_{a1}(k+1)$$

$$DY_a(k+1) = X_{a2}(k+1)$$

이 된다.

여기서 X_m(k)는 (3×1), X_a(k)는 (2×1)의 狀態 벡터이며, R(k)는 基準 入力이다. dr(k)는 디랙 델타(Dirac delta) 函數이다.

DY_a(k+1)은 X_{a2} 狀態의 임펄스 應答이며 Y_a(k+1)는 임펄스 應答이다. 그리고 媒介變數 A(T), B(T), A_a(T) 및 B_a(T)는 Cayley-Hamilton¹⁶⁾ 理論에 따라 아래와 같이 주어진다.

$$A(T) = \begin{bmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 \\ -abc_0\alpha_2 & \alpha_0 - (ab+ac_0+bc_0)\alpha_2 \\ -abc_0\alpha_1 + a_{11}\alpha_2 & -(ab+ac_0+bc_0)\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 \\ \alpha_2 \\ \alpha_1 - (a+b+c)\alpha_2 \\ \alpha_0 - (a+b+c_0)\alpha_1 + a_{13}\alpha_2 \end{bmatrix}$$

여기서

$$X = e^{-aT}[2a^2(c_0-b) + b^2(a-c_0) + (b-a)(c_0^2 - ac_0^2 - ab^2)] + e^{-bT}a(a-c_0)\{a(b-a+1) + c_0(b-a)\} + e^{-c_0T}(b-a)(b^2 - a^2 + a)$$

$$Y = a^2(c_0-b) + b^2(a-c_0) + c_0^2(b-a)$$

$$\alpha_0 = \frac{X}{Y}$$

$$\alpha_1 = \frac{(b-a)[e^{-aT}(c_0^2 - b^2) - e^{-bT}(c_0^2 - a^2) + e^{-c_0T}(b^2 - a^2)]}{Y}$$

$$\alpha_2 = \frac{e^{-aT}(c_0-b) + e^{-bT}(a-c_0) + e^{-c_0T}(b-a)}{Y}$$

$$a_{11} = (a+b+c_0)abc_0$$

$$a_{12} = a^2b + a^2c_0 + 2abc_0 + ab^2 + b^2c_0 + ac_0^2 + bc_0^2$$

$$a_{13} = (a^2 + b^2 + c_0^2 + ab + bc_0 + ac_0)$$

$$B(T) = \int_0^T \begin{bmatrix} \alpha_2 \\ \alpha_1 - (a+b+c_0)\alpha_2 \\ \alpha_0 - (a+b+c_0)\alpha_1 + a_{13}\alpha_2 \end{bmatrix} d\tau \quad T = \tau$$

$$A_a(T) = \begin{bmatrix} \frac{1}{a-b}(ae^{-bT} - be^{-aT}) & \frac{1}{a-b}(e^{-bT} - e^{-aT}) \\ \frac{1}{a-b}(ae^{-bT} - e^{-aT}) & \frac{1}{a-b}(ae^{-aT} - be^{-bT}) \end{bmatrix}$$

$$B_a(T) = \begin{bmatrix} \frac{1}{a-b}\left\{\frac{1}{a}(e^{-aT}-1) + \frac{1}{b}(1-e^{-bT})\right\} \\ \frac{1}{a-b}\{e^{-bT} - e^{-aT}\} \end{bmatrix}$$

이며 T는 標本化 時間(sampling time)이다.

2차계의 工程에 대해서 式(9), (18) 및 (20)을 離散式으로 바꾸면,

$$k_c(k) = U(k) * \varphi_1(k) + \varphi_2(k) + k_0 \quad (9)'$$

$$\varphi_2(k) = k_2 V(k) RF(k), k_2 > 0 \quad (18)'$$

$$\varphi_1(k) = k_1 V(k) RF(k), k_1 > 0 \quad (20)'$$

로 된다. k₁ 및 k₂는 時變 값을 가지며 k₀는 초기치이다. (8)式을 離散式으로 나타내면,

$$V(k) = YMF(k) - YSF(k) - DYSF(k) + DYMF(k) \quad (24)$$

로 표현할 수 있다.

式(6)을 라플라스 變換하면,

$$Y_{s,r}(s) = H_1(s)H_2(s)$$

로 되며, 여기서 $H_2(s) = K_c(s) * R_r(s)$ 이고 *는 convolution을 表示한다. 따라서 工程의 最終 出力 YSF(k)와 그 앞단에서의 出力 DYSF(k)의 離散式은 다음과 같다.

즉,

$$YSF(k) = h_2(k) * Y_a(k) = h_2(k) * h_1(k),$$

$$DYSF(k) = h_2(k) * DY_a(k).$$

여기서 $h_2(k) = K_c(k)RF(k)$ 이며, $h_1(k)$ 는 임펄스 應答을 나타내고 $K_c(k)$ 및 $RF(k)$ 는 各各 時變 利得과 SVF를 거친 基準 入力の 離散式이다.

그림 6은 마이크로컴퓨터를 利用하여 離散時間 基準 模型 適應 制御를 하기 위한 順序圖이다. 그림 6에서 보는 바와 같이 各 變數 及 常數의 初期值를 設定하여 模型의 出力 YSF(k)와 앞단에서의 出力 DYSF(k) 및 SVF를 거친 基準 入力 RF(k)를 計算하고 임펄스 應答을 얻어 V(k)를 計算하고 工程의 出力 YSF(k)와 앞단에서의 出力 DYSF(k)를 구하는 過程을 반복하여 系統 動作을 얻는다.

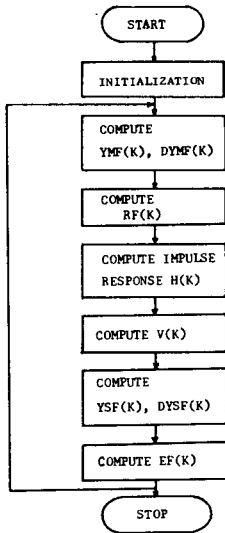


그림 6. 흐름도
Fig. 6. Flow chart for computer simulation.

IV. 結果 및 考察

提案된 離散時間 基準 模型 適應 制御 알고리즘을 마이크로컴퓨터(Cromemco system II)를 利用하여 수행하였다. 基準入力으로는 R(t)가 5t인 램프입력(ramp input)을 印加하고 SVF의 傳達函數는 (s+0.4)로 하였다. 工程이 時變 시스템이므로 먼저 S영역에서 $Y_{s,r}(s) = H_1(s)H_2(s)$ 로 해석한 후 이것을 다시 離散 영

역으로 해석하기 위해 $h_2(k)$ 와 임펄스 應答의 convolution으로 工程의 出力값을 구하였다. 模型과 工程의 傳達函數를 各各 $H_m(s) = 0.5/(s+1)(s+0.5)$ 및 $H_p(s) = K_c(s)/(s+1)(s+0.5)$ 로 두고 시뮬레이션 했을 때의 模型과 工程의 出力特性은 그림 7과 같았다.

그림 7에서 工程의 出力이 模型의 出力에 漸近的으로 接近함을 볼 수 있다. 基準入力으로서 R(t)가 1인 단위 스텝入力の 인가시 出力特性은 그림 8과 같았다.

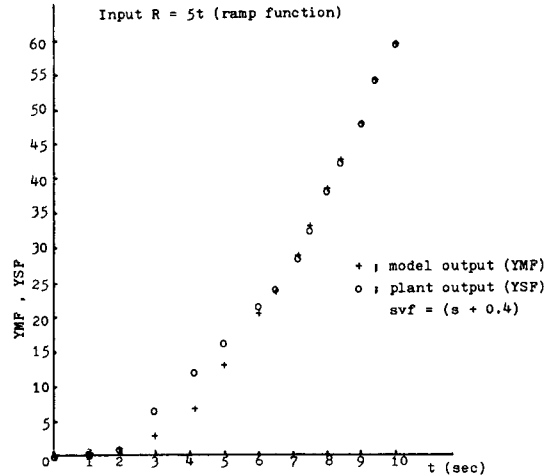


그림 7. 램프 함수 응답
Fig. 7. Ramp function response.

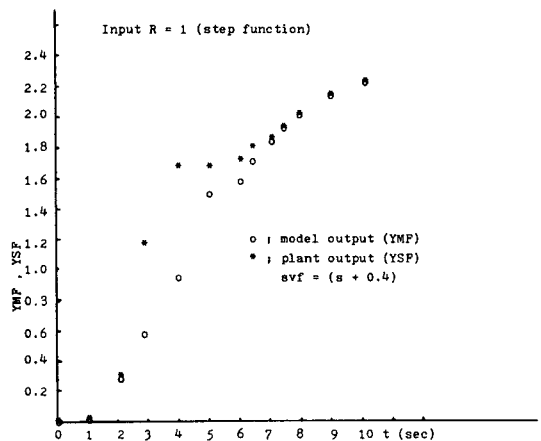


그림 8. 단위 계단 함수 응답
Fig. 8. Unit step function response.

이 그림에서 보는 바와 같이 단위 스텝 入力下에서도 工程의 出力이 漸近的으로 模型의 出力과 一致함을 볼 수 있다. 基準入力으로서 R(t)가 10인 스텝入

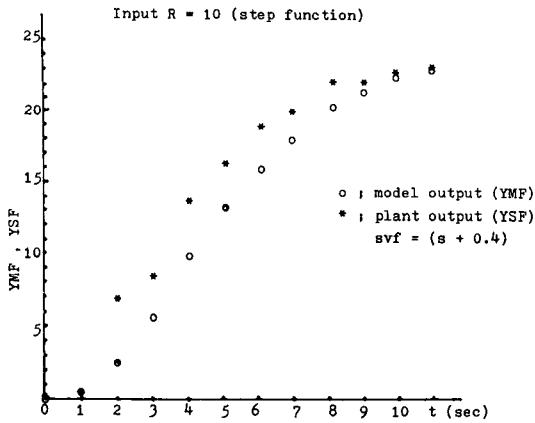


그림 9. 계단 함수 응답
Fig. 9. Step function response.

력의 인가시 出力特性은 그림 9와 같았다. 이 그림에서도 스텝 入力下에서 工程의 出力이 모델의 出力과 漸近的으로 一致함을 알 수 있고, 이는 오차가 漸近的으로 0에 接近함을 뜻한다.

V. 結 論

本 論文에서는 時變 利得을 갖는 工程에 대해서 連續 시스템의 制御 알고리즘을 直接 離散時間 基準 모델 適應 制御에 適用해본 후 알고리즘의 타당성을 컴퓨터 시뮬레이션으로 確認하였으며, 그 결과 시스템의 設計가 간단하게 됨을 확인하였다. 標本化 時間을 0.05초로 하였을 경우 適應時間(adaptation time) 이 基準 入力 R(t)가 5 t인 램프 入力일 때 出力 誤差가 최초로 ± 1% 以内に 들어가는데 걸린 時間은 6.3초 이었으며, 단위 스텝 入力下에서는 7.0초, R(t)가 10인 스텝 入力下에서는 9.2초가 소요되었다. 本 研究에서는 MRAC에서 생기는 delay를 減少시키기 위해 k₁과 k₂를 可變시켜 computer simulation을 해 본 결과 adaptation이 일어남을 確認하였고 이는 delay의 効果

가 減少되었다고 본다.

參 考 文 獻

- [1] R.V. Monopoli, "Model reference adaptive control with an augmented error signal," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, pp. 474-484, 1974.
- [2] K. Narendra, Y.H. Lin, and L.S. Valavani, "Stable adaptive controller design, part II: proof of stability," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, pp. 440-448, 1980.
- [3] K. Narendra, and Y.H. Lin, "Stable discrete adaptive control," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, pp. 456-461, 1980.
- [4] I.D. Landau, and H.M. Silveira, "A stability theorem with applications to adaptive control," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, pp. 305-311, 1979.
- [5] I.D. Landau, *Adaptive Control the Model Reference Approach*. Marcel Dekker, 1979.
- [6] J.A. Cadzow, and Martens, H.R., *Discrete-Time and Control Systems*. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1970.
- [7] R.V. Monopoli, *Discrete Model Reference Adaptive Control with an Augmented Error Signal*. Automatica, pp. 507-517, 1977.
- [8] M.A.L. Thathachar, and F. Gajendran, *A Structural Principle for a Class of Adaptive System*. INT. J. Control, pp. 519-538, 1980.
- [9] B. Egardt, "Unification of some discrete-time adaptive control schemes," *IEEE Trans. Contr.*, pp. 693-697, 1980.
- [10] P.C. Park, "Stability and convergence of adaptive controller continuous systems," *IEE Proc.*, pp. 195-200, 1981.