論文 84-21-4-8

부울함수의 간소화를 위한 새 방법

(A New Algorithm for Boolean Function Minimization)

李 晟 雨*

(Sung Woo Lee)

要 約

부울함수의 간소화법에서 Quine McCluskey법은 최소항들의 2진수 표현의 構造를 조사하는 방법을 쓰고 있다.

이 論文에서는 10진수로 표현한 최소항을 가지고 그들간의 큐브관계와 간소화에 따르는 제규칙을 定理로 간추려 표현하고 증명하였으며, 이들을 바탕으로 새로운 알고리즘의 부울함수 간소화법을 제안하였다. 예제를 들어 손작업의 방법을 보였고 아울러 이 과정을 FORTRAN 프로그램으로 작성하였다.

프로그램은 여분항을 포함하여 100개까지의 최소항을 가진 부울함수에 대하여 진성주항을 찾아 인쇄하도록 작성하였는데(배열을 크게 잡으면 그 이상도 가능함), 모든 경우에 손작업과 일치하는 결과를 얻었다.

Abstract

In the case of Quine McCluskey's methode for Boolean function minimization, we have to examine each bits of binary represented minterms.

In this paper, cube relations between minterms that are represented by means of decimal number, and all sorts of rules for Boolean function minimization are described as theorems, and they are verified. And based on these theorems, the new fast algorithm for Boolean function minimization is proposed.

An example of manual operation is shown, and the process is writed out by a FORTRAN program. In this program, the essential prime implicants of the Boolean function that has 100 each of minterms including redundant minterms, are finded and printed out, (the more minterms can be treated if we take the more larger size of arrays) and the outputs are coincided with the results of manual operation.

Ⅰ. 序 論

부울함수의 간소화법에서 檢表法(Quine McCluskey 법)은 최소항들의 2진수 표현의 각 비트를 하나하나 비교하는 방법을 쓰고 있다. 이 방법을 사용한 간소화를 위한 컴퓨터 프로그램(FORTRAN program, computer aided minimization)이 이미 발표되어 있다. Quine McCluskey법의 특징을 요약하면,

① 2진수의 각 비트를 비교하기 위해 모든 최소항을 2진수로 표시하고 1의 數가 적은 순서로 재배치함.

② 2진수의 각 비트를 하나하나 비교하여 큐브 관계를 구함.

③ 진성주항을 찾기 위해 선별표, 축소선별표를 재작성함 등이다.

이 論文에서는 10진수로 표현한 최소항들간의 큐브관계를 찾아 하나의 표에 배열해 놓고 규칙에 따라 표

*正會員, 東洋工業專門大學

(Dept. of Electronics Dong Yang Tech. J. College)

接受日字：1984年 3月 7日

를 검사하는 방법으로 간소화 작업을 한다.

이 論文의 방법을 요약하면 다음과 같다.

① 2큐브 관계를 찾아 하나의 표를 작성함(정리1).

② α큐브는 요건(정리2)에 따라 표의 해당란의 0 與否만의 확인으로 탐색함.

③ 진성주항의 탐색때 예를 들어, 00101011(43) 을 알아보는 경우 43이 다른 큐브에 포함되어 있는가를 한 눈에 찾을 수 있음. 따라서, 간단한 점검으로 여분항을 지우고 진성주항을 찾을 수 있음. 컴퓨터 처리의 경우는 KC(I)로 그 최소항의 α-큐브 참여횟수를 셈.

④ 하나의 표로서 모든 작업을 끝낼 수 있어 최소한의 지면이 필요하고, 최소항의 數가 많은 경우라도 복잡성이 대수적으로만 증가하여 손작업의 경우도 표가 혼잡해지지 않음 등이다.

Quine McCluskey 법에 의한 컴퓨터 프로그램의 경우 참고논문[2]의 文의 數는 206이고, 이 論文의 경우는 161로 文의 數가 적고, 처리속도는 예를 들어, 00101011과 00001011을 비교하여, 00-01011로 할 때 모든 비트를 하나하나 비교해야 하는데 비하여 이 論文에서는 MA$+2^\alpha$인 값과 비교대상의 최소항의 數値가 같은가 같지 않는가 하는 1회의 비교로 큐브관계가 판정된다. 또 진성주항의 탐색의 경우도 큐브관계를 찾을 때 큐브의 참여 횟수를 센 것을 가지고 선별하여, 선별표를 작성, 각 비트 별로 비교하는 방법에 비하여 속도가 빨라지게 된다.

프로그램에서, 입력데이터로는 여분항을 포함한 최소항의 갯수 N과 최소항(MA(I), I=1, N), 그리고 여분항의 갯수 NRD와 여분항의 항번호(MRD(J), J=1, NRD)를 넣고, 출력의 결과는 별첨된 인쇄물과 같이 실행과정의 표1(본론 예제5의 표4 참조)과 진성주항을 각 큐브별로 인쇄해 낸다.

컴퓨터 처리 결과는 손작업의 경우와 잘 일치하였다.

Ⅱ. 1큐브의 관계

[정리1] 10진수로 표시한 최소항(minterm)들의 집합 $MA=\{m_{a1}, \cdots, m_{ai}, \cdots m_{an}\}(m_{a1}<\cdots<m_{ai}<\cdots<m_{an})$이 있을 때 m_{a1}과 1큐브 관계를 갖는 최소항들의 집합 C는

$C=MA\cap A\cap \bar{B}=\{m_{ai}|m_{ai}$는 m_{a1}과 1큐브 관계임$\}$이다.

여기서,

$A=\{m_x|m_x$는 $m_{a1}+2^n(n=0, 1, \cdots, k)\}$

여기서,

($k=\log_2 m_{an}$에서 소숫점 이하를 제거한 整數)

$B=\{m_j|m_j=m_{a1}+2^i\}$; 단, i는 $m_{a1}=2^\alpha+2^\beta+\cdots=\sum 2^i$일 때, $i=\alpha, \beta, \cdots$들)

(증명) 필요조건; $C=MA\cap A\cap \bar{B}$에서, MA, A, $\bar{B}$는 m_{a1}와 1큐브 관계를 갖기 위한 필요조건이다.

MA; m_{a1}와 1큐브 관계를 집합 MA중에서 찾고 있는 것이므로 C의 요소가 되기 위한 필요조건이다.

A ; $m_x=m_{a1}+2^n(n=0, 1, 2, \cdots)$들의 집합으로 m_x는 m_{a1}와 $m_{a1}+2^n-m_{a1}=2^n$의 差를 갖는 數이므로 2진수의 n비트째가 m_{a1}는 0, m_x는 1이 되므로 이들은 서로 1큐브의 관계를 가질 수 있다.

B ; $m_{a1}+2^\alpha$, $m_{a1}+2^\beta\cdots$등의 집합으로

$m_{a1}=2^\alpha+2^\beta+\cdots$라고 하였으므로,

$m_{j1}=m_{a1}+2^\alpha+2^\alpha+2^\beta+\cdots$

$m_{j2}=m_{a1}+2^\beta=2^\alpha+2^\beta+2^\beta+\cdots$

등과 같이 표시되고,

m_{a1}가 2^α 비트는 1, $2^{\alpha+1}$비트는 x 일 때

m_{j1}은 2^α 비트는 0 ($\because 2^\alpha+2^\alpha=2^{\alpha+1}$), $2^{\alpha+1}$비트는 $\bar{x}$가 된다.

즉, 2^α비트와 $2^{\alpha+1}$비트가 서로 다른 값을 가지므로 이들은 1큐브 관계를 가질 수 없고 C의 요소가 될 수 없다. 따라서, $\bar{B}$가 C의 요소가 될 수 있는 필요조건이 된다.

충분조건; C가 되기 위한 필요조건 MA$\cap$A 중에서, m_{a1}를 구성하는 2진수의 값이 1인 비트는 2^α, 2^β, $\cdots$에 해당하는 비트인데 $m_i=m_{a1}+2^i=2^\alpha+2^\beta+\cdots 2^i$에서 $i=\alpha, \beta, \cdots$인 경우만은 1큐브의 관계가 될 수 없다. 따라서, 이런 경우를 모두 제거한 $A\cap\bar{B}\cap MA$는 C의 요소가 될 수 있는 최소량들의 집합이 된다.

[예제1] MA=$\{8, 9, 10, 15, 18, 23, 29, 39, 48, 71, 100, 135\}$ 중에서 $m_{a1}=7$과 1큐브 관계가 있는 최소항의 집합 C를 구함.

(풀이) $A=\{m_x | m_x=m_{a1}+2^n(n=0, 1, \cdots, k)\}$;

$k=\log_2 m_{an}=\log_2 135=7$ (소숫점이하 제거)

$A=\{8, 9, 11, 15, 23, 39, 71, 135\}$

$B=\{7+2^0, 7+2^1, 7+2^2\}=\{8, 9, 11\}$

$C=M\cap A\cap\bar{B}=\{15, 23, 39, 71, 135\}$

1-큐브의 관계는 다음 예와같이 표를 이용하면 일목요연하게 구할 수 있다.

[예제2] $f=\sum(0, 4, 5, 6, 8, 10, 11, 15)$에서 1큐브 관계를 구함.

(풀이) $K=\log_2 15=3$ (소숫점 이하는 제거)

※ 표시 기호에 대한 설명

① ×표; B의 요소들로 각 최소항들에 대하여 $m_{ai}=2^\alpha+2^\beta+\cdots$의 해당란에 ×표를 해 놓음.

(예: $m_{ai}=10$은 2^3+2^1, 2^3란과 2^1란에 ×표)

표 1. 1 큐브관계
Table 1. 1 - cube relations.

M_{ai} \ 2^K	2^0	2^1	2^2	2^3
0	—	—	4	8
4	5	6	×	—
5	×	—	×	—
6	—	×	×	—
8	—	10	—	×
10	11	×	—	×
11	×	×	15	×
15	×	×	×	×

－표 ; $\overline{M_A \cap A}$인 요소들.
각 최소항에 2^n(n＝0, 1, 2, …, k)를 더한 값 $m_{ai}=m_{ai}+2^n$을 구하고 m_{ai}가 함수 f의 최소항 가운데 있으면 해당란에 그 m_{ai} 값을 쓰고 없으면－표시를 함. (FORTRAN 프로그램에서는 × 표와 －표에 해당하는 란은 0이 들어감)
위 예제에서 손 작업때 ×표는 1큐브 관계를 조사할 필요가 없음을 바로 나타내기 위한 것이고, －표는 조사 결과 그 최소항이 없음을 나타낸 것이다.
(예 ; 최소항 4와 1큐브 관계를 갖는 최소항은 5와 6이다.)

Ⅲ. α 큐브의 關係

[정리 2] m_{i1}을 가장 작은 數의 최소항으로 하는 2^α개의 최소항들이 α 큐브의 관계를 가지려면 (α ; ≥ 2 인 整數) 條件,

A .AND. B .AND. C [.AND.는 FORTRAN의 logical operator로서 A, B, C가 모두 .TRUE.일 때 條件 만족]

를 만족해야 한다. 여기서,

A ; m_{i1}과 1큐브 관계를 갖는 m_{i1}보다 큰 수의 최소항이 α개 있다.

B ; 조건 A중 작은 數의 최소항으로 부터 1, 2, …, $\alpha-1$번째 1큐브 관계의 최소항들이 참여한 ($\alpha-1$)큐브의 관계를 갖는 $2^{\alpha-1}$개의 최소항들이 있다.

C; 조건 B의 $2^{\alpha-1}$개의 최소항들을 m_{i1}, m_{i2}, …, m_{ip} ($p=2^{\alpha-1}$)로 표시하고, m_{i1}과 α번째 1큐브 관계인 최소항을 m_{j1}이라고 할 때,

$m_{j1}-m_{i1}=m_{j2}-m_{i2}=\cdots=m_{jp}-m_{ip}=2^N$

($N \geq \alpha$ 인 整數)를 만족시키는 최소항 m_{j1}, m_{j2}, …, m_{jp}들이 있다(정리 2 끝).

이들 세 조건이 모두 동시에 만족되면 최소항들의 집합

MAC＝{m_{i1}, m_{i2}, …, m_{ip}, m_{j1}, m_{j2}, …, m_{jp}}

는 α－큐브의 關係를 가진다.

이 정리는 부울함수의 간소화를 위한 손작업의 경우에도 그러하나 특히 프로그램 작성에 있어 중요한 역할을 하는 것으로 먼저 간단한 예제로서 이 정리가 성립하는 것을 보이고 이어 證明을 하기로 한다.

[예제 3] 최소항들의 집합 MA＝{3, 7, 11, 15}가 2 큐브 관계임을 보임.

표 2. α＝2큐브의 관계
Table 2. α＝2cube relation.

최소항 \ 2^K	1	2	4	8
3	×	×	7	11
7	×	×	×	15
11	×	×	15	×
15	—	—	—	—

(풀이)
조건 A; m_{i1}＝3과 1－큐브 관계인 최소항이 7, 11로 (α＝2) 2개 있음.
조건 B; $\alpha-1=2-1=1$큐브의 관계는 {3, ⑦} (7은 $\alpha-1$번째 1큐브 관계).
조건 C ; $11-3=15-7=2^3$으로
MA＝{m_{i1}, m_{i2}, m_{j1}, m_{j2}}＝{3, 7, 11, 15}는 2큐브의 관계를 가짐(예제 3 끝).
[예제 4] 위의 예제에서의 MA가 $\alpha+1$큐브(3큐브) 관계를 갖기 위해 필요한 최소항들의 한 집합을 구함.
(풀이) 이러한 집합은 무한히 많이 있을 수 있으나 그 중 가장 작은 수들로 구성된 3큐브 관계의 최소항들의 집합을 구한다.
조건 A; 3의 $\alpha+1$번째 1큐브 관계의 최소항 $m_{j1}=m_{i1}+2^4=19$
조건 B ; MA＝{m_{i1}, m_{i2}, m_{i3}, m_{i4}}＝{3, ⑦, ⑪, 15} 가

표 3. 2＋1 큐브
Table 3. 2＋1 cube.

최소항 \ 2^K	2^0	2^1	2^2	2^3	2^4
3	×	×	7	11	19
7	×	×	×	15	23
11	×	×	15	×	27
15	×	×	×	×	31

있음(7, 11은 3과 1큐브관계).

조건 C; $m_{j1}-m_{i1}=19-3=16$

$m_{j2}-m_{i2}=16$

$m_{j2}=m_{i2}+16=7+16=23$

$m_{j3}=11+16=27$

$m_{j4}=15+16=31$

즉 $MAC=\{m_{i1}, m_{i2}, m_{i3}, m_{i4}, m_{j1}, m_{j2}, m_{j3}, m_{j4}\}$

$=\{3, 7, 11, 15, 19, 23, 27, 31\}$이다.

(예제끝).

예제 4의 풀이에서 표 3을 살펴보면 α큐브 관계를 가진 최소항들의 집합 $MA=\{3, 7, 11, 15\}$가 $\alpha+1$ 큐브 관계를 가지려면 반드시 m_{i1}과 $\alpha+1$번째 1큐브 관계인 2^4의 열에 MA의 각 요소인 3, 7, 11, 15에 대응하는 19, 23, 27, 31이 있어야 함을 알 수 있다(조건 C).

따라서, $\alpha+1$큐브의 관계를 찾기 위하여는 2^4列의 해당칸(배열)들에 0(零)의 有, 無를 확인해 가면 된다(프로그램에서는 항번호를 넣어 놓고 0 有無를 조사하여 0이 있으면 포기하고 다음을 조사함).

(정리 2의 증명)

조건 B; $m_{i1}, m_{i2}, \cdots, m_{ip}$는 $\alpha-1$큐브 관계임.

조건 A; $m_{j1}-m_{i1}=2^N$로 (1-큐브 관계) 이들의 2진수 표현은 N+1번째 비트가 m_{i1}은 0, m_{j1}은 1임. 나머지 비트는 서로 같음.

조건 C; $m_{j1}-m_{i1}=m_{j2}-m_{i2}=\cdots=m_{jp}-m_{ip}=2^N$이므로 m_{i2}와 $m_{j2}, \cdots m_{ip}$와 m_{jp}들도 N+1번째 비트만 0과 1로 다르고 나머지 비트들은 모두 같음. 따라서, $MC=\{m_{j1}, m_{j2}, \cdots m_{jp}\}$들도 $\alpha-1$큐브 관계를 가짐을 알 수 있고, 또 m_i와 m_j들은 각각 N+1 비트로 간소화될 수 있으므로 $MAC=\{m_{i1}, m_{i2}, \cdots, m_{ip}, m_{j1}, m_{j2}, \cdots, m_{jp}\}$는 α큐브의 관계로 된다(증명끝).

[정리 3] m_{i1}을 가장 작은 數의 최소항으로 하는 α큐브의 주항(prime implicant)의 갯수 N은 $MX=\{x \mid x$는 m_{i1}과 1큐브 관계의 최소항 .AND. $(x>m_{i1})\}$ 집합의 갯수가 m일 때

$0 \leq N \leq {}_mC_\alpha \quad (m \geq \alpha)$

이다(큐브관계 조사 대상數로서 손작업때 참고하면 좋음).

(증명) 정리 2의 조건 A에서 α큐브의 관계를 가지려면 m_{i1}과 1큐브 관계인 최소항이 α개 있어야 한다. m_{i1}과 1큐브 관계인 최소항이 m개 있으면 ${}_mC_\alpha$個組의 α개 최소항의 조합을 만들 수 있고 이들이 각각 한 개 주항을 형성할 수 있는가 하는 조사 대상이 된다. 따라서, $0 \leq N \leq {}_mC_\alpha$의 주항이 나올 수 있다(증명끝).

[예제 5] $f=\sum(0, 1, 3, 9, 11, 17, 19, 25, 27, 35, 37, 38, 41, 43, 45, 47, 52, 61, 63)$을 손 작업으로 간소화하고 진성주항을 찾음.

(풀이) 표 4 참조(표 작성에 대한 설명).

표 4. 예제 5에 대한 풀이표

Table 4. For example 5.

최소항 \ 2^k		1	2	4	8	16	32	2 큐 브	3큐브와 진성주항
1	0	1	–	–	–	–	–		(0, 1)
2	①	×	③	–	⑨	17	–	○ ~~(1, 3, 9, 11)~~ ~~(1, 3, 17, 19)~~	(1, 3, 9, 11
3	Ⓡ③	×	×	7	⑪	19	35	~~(1, 9, 17, 25)~~	17, 19, 25, 27)
4	⑨	×	11	–	×	25	41	~~(3, 11, 19, 27)~~	
5	Ⓡ⑪	×	×	–	×	27	43	*(3, 11, 35, 43)	*(3, 11, 35, 43)
6	⑰	×	19	–	25	×	–	~~(9, 11, 25, 27)~~	
7	⑲	×	×	–	27	×	–	(9, 11, 41, 43)	(9, 11, 41, 43)
8	㉕	×	27	–	×	×	–	~~(17, 19, 25, 27)~~	
9	㉗	×	×	–	×	×	–		
10	Ⓡ㉟	×	×	–	43	–	×		
11	㊲	×	–	×	45	–	×		(37, 45)
12	Ⓡ38	–	×	×	–	–	×	~~(41, 43, 45, 47)~~	*(38)
13	㊶	×	43	45	×	–	×	(45, 47, 61, 63)	(45, 47, 61, 63)
14	Ⓡ㊸	×	×	47	×	–	×		
15	㊺	×	47	×	×	61	×		
16	㊼	×	×	×	×	63	×		
17	52	–	–	×	–	×	×		(52)
18	61	×	63	×	×	×	×		
19	63	×	×	×	×	×	×		

* 표는 don't care때 없어지는 진성주항

Ⓡ : don't care항 표시

① $k=\log_2 63=5$ (소숫점 이하 제거)

$2^5=32$ (표에서 2^k의 최대치 32)

② 예제 2에서와 같이 표작성.

③ 2큐브를 찾아 오른쪽 란에 적음.

④ 2큐브의 주항들을 가지고 3큐브를 찾음.

⑤ 4큐브 이상을 조사(이 예에서는 없음).

⑥ 1큐브 2큐브 관계에 참여하였던 최소항들은 ○표.

⑦ 1큐브에도 참여하지 않은 최소항은 진성주항(38), (52).

⑧ 3큐브에 참여한 2큐브의 주항들과 3큐브에 참여한 최소항들로만 구성된 2큐브 주항들은 지움. 3큐브 (1, 3, 9, 11, 17, 19, 25, 27).

⑨ 2큐브이면서 다른 2큐브에 그 최소항들이 모두 포함될 수 있는 2큐브 주항들은 지움.

⑩ 2큐브에 참여하거나 포함되지 않은 1큐브의 진성주항(0, 1), (37, 45).

⑪ 2큐브의 진성주항 : (3, 11, 35, 43), (9, 11, 41, 43),

(45, 47, 61, 63).

⑫ 이들을 종합하면

$f=(38)+(52)+(0,1)+(37,45)+(3,11,35,43)+(9,11,41,43)+(45,47,61,63)+(1,3,9,11,17,19,25,27)$

이다 (예제끝).

이 예제에서 만일 3(3), 5(11), 10(35), 12(38), 14(43) 번째의 최소항들이 여분항(don't care항 redundant minterms)이라면 f에서 (38)과 (3, 11, 35, 43)이 제거되어야 한다. 따라서, $f'=(52)+(0,1)+(37,45)+(9,11,41,43)+(45,47,61,63)+(1,3,9,11,17,19,25,27)$이 된다.

컴퓨터 프로그램의 연습문제에서는 이 예제의 경우를 입력 데이터로 넣어 표 1과 진성주항등을 인쇄해 내었다. 그 결과 f'와 같은 값들을 얻었다.

Ⅳ. 진성주항(Essential Prime Implicants)의 탐색

예제 5의 풀이에서와 같이 진성주항은 다음과 같은 조건을 필요로 한다.

[정리 4] $E=G\cup(\bigcup_{\alpha=1\sim k}(A_\alpha\cap\overline{B}_\alpha\cap\overline{C}_\alpha\cap(D_{\alpha_1}\cup D_{\alpha_2})))$.

여기서, $E=\{x|x$는 진성주항$\}$

$A_\alpha=\{x|x$는 α큐브의 주항 .AND. $\overline{R_\alpha}\}$

$R_\alpha=\{x|x$는 여분항으로만 구성된 주항$\}$

$B_\alpha=\{x|x$는 소속된 여분항이 아닌 최소항들이 모두 $\alpha+1$ 큐브에 참여한 α큐브의 주항$\}$

$C_\alpha=\{x|x$는 소속된 여분항이 아닌 최소항들이 모두 $\alpha-1$ 큐브의 진성주항들에 의해 포함되어진(cover) 주항$\}$

$D_{\alpha_1}=\{x|x$는 그 주항에만 1회 참여한 여분항이 아닌 최소항을 1개 이상 가진 주항$\}$

$D_{\alpha_2}=\{x|x$는 임의의 α큐브에 2회 이상 참여한 여분항이 아닌 최소항들로서 B_α, D_{α_1} C_α 그리고 이미 취한 D_{α_2}의 진성주항에 의해 포함되어지지 않은 최소항의 數가 2^α개인 주항에서부터 $2^\alpha-n\,(n=1,2,\cdots,(2^\alpha-1))$개인 주항까지 순서대로 진성주항을 취하여 α큐브의 모든 최소항(여분항은 예외)을 포함할 때까지 취한 주항$\}$

$G=\{x|x$는 1큐브의 주항에도 참여하지 않은 여분항이 아닌 최소항$\}$

$k=\log_2 m_{am}$ (m_{am}은 함수 f의 최소항중 10진수로 가장 큰 數인 최소항)

(증명) $A_\alpha\cap\overline{B}_\alpha$; A_α중에서 $\alpha+1$ 큐브의 진성주항들에 의해 포함될 $A_\alpha\cap B_\alpha$는 α큐브의 진성주항에서는 제외됨.

$\overline{C}_\alpha$; $\alpha-1$큐브의 진성주항들에 의해 그 최소항들이 모두 포함되어졌다면 이들 C_α는 여분항(redundant term)이므로 제거함.

D_{α_1}; 1회만 참여한 최소항(여분항이 아닌 최소항)을 포함시켜 줄 주항은 그 주항밖에 없으므로 이들은 진성주항이 됨.

D_{α_2}; B_α, C_α, D_{α_1} 또는 이미 취한 α큐브의 진성주항에도 포함되지 않은 α큐브 주항의 최소항들은 그 數가 많은 순서로 진성주항을 취해 나감으로써 모든 최소항을 효율적으로 포함시킬 수 있다.

α큐브의 진성주항들을 $\alpha=1\sim k$까지 모두 찾아 합하고 1큐브에도 참여하지 않은 여분항이 아닌 최소항 G를 합하면 모든 진성주항을 합한 것이 된다 (증명끝).

정리 4를 예를 들어 보완 설명한다.

[예제 6] 정리 4에서, G, B_α, C_α, D_{α_1}, D_{α_2}의 예를 보임(풀이).

① G의 예; $f=\sum(0,2,3,5,6)$에서, 최소항 0과 5는 1큐브에도 참여하지 않음(표 5 참조).

표 5. G의 예
Table 5. Samples of G.

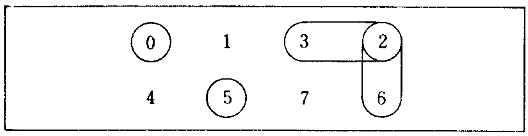
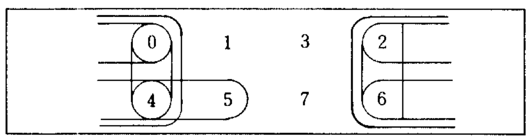


표 6. $A_\alpha\cap\overline{B}_\alpha$의 예
Table 6. Samples of $A_\alpha\cap\overline{B}_\alpha$.



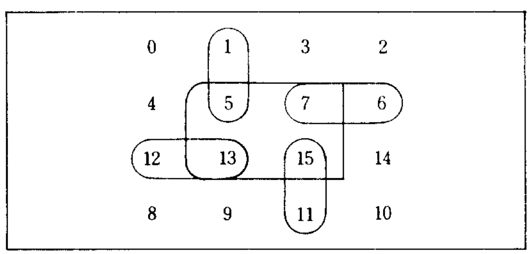
② $A_\alpha\cap\overline{B}_\alpha$의 예; $f=\sum(0,2,4,5,6)$에서 (표 6참조)

$A_1\cap\overline{B}_1=\{(0,2),(0,4),(2,6),(4,5),(4,6)\}\cap\{(0,4),(2,6),(0,2),(4,6)\}=\{(4,5)\}$ ($\alpha=1$ 인 경우)

③ C_α의 예; $f=\sum(1,5,6,7,11,12,13,15)$

$C_2=\{(5,7,13,15)\}=C_\alpha$

표 7. C_α와 D_{α_1}의 예
Table 7. Samples of C_α and D_{α_1}.



C_2 = {(5, 7, 13, 15)}의 모든 최소항은,

D_{11} = {(1, ⑤), (6, ⑦), (11, ⑮), (12, ⑬)}에 의해 포함되어 지므로 C_2는 여분항이 된다.

④ $D_{\alpha 1}$의 예; 표 7에서 D_{11} = {(①, 5), (⑥, 7), (⑪, 15), (⑫, 13)}

⑤ $D_{\alpha 2}$의 예; $f_1 = \sum(0, 1, 5, 6, 7, 8, 10, 14, 15)$에서 표 8 참조.

표 8. D_{12}의 예
Table 8. Samples of D_{12}.

0	1	3	2
4	5	7	6
12	13	15	14
8	9	11	10

D_{12}의 대상이 되는 2큐브 주항은, (0, 1), (1, 5), (5, 7), ~~(7, 6)~~, ~~(6, 14)~~, ~~(7, 15)~~, ~~(14, 15)~~, (10, 14), (8, 10), (0, 8)이다. 이중 B_1에 해당하는 {(7, 6), (6, 14), (7, 15), (14, 15)}를 지우고, (0, 1)이 먼저 D_{12}의 요소로 선택된다. (1, 5)는 1이 이미 선택되어 졌으므로, (10, 14)는 14가 B_1에 의하여 선택되어 졌으므로, (0, 8)은 0이 선택되어 졌으므로 우선 순위에서 밀려나고 (8, 10)이 선택된 다음에는 (1, 5)에서 5가 아직 처리되지 않았으므로 최후의 진성주항으로 선택된다.

즉 함수 f_1의 진성주항은,

$f = (6, 7, 14, 15) + (0, 1) + (8, 10) + (1, 5)$이다.

*(컴퓨터 결과도 같음).

V. 진성주항의 2진수식 표현

[정리 5] α큐브의 진성주항에 대한 2진수식 표현은 $A_i = B_i - 2^\alpha/2$를 구하여

IF(A_i); 正(+)의 整數일때, i비트="1"

0일때, i비트="–"

負(–)의 整數일때, i비트="0"

이다. 여기서, B_i; α큐브의 진성주항의 요소인 2^α개의 최소항들의 2진수 표현의 각 비트를 비트별로 산술합을 했을 때 그 i번째 비트의 값.

단, $0 \leq i \leq k$

(증명) α큐브의 진성주항의 최소항의 數는 2^α개 이므로, i번째 비트에 대하여

최소항 2^α개가 모두 1일때, $A_i = 2^\alpha - 2^\alpha/2 = 2^\alpha/2$는 正의 整數, i비트="1"

최소항중 반($2^\alpha/2$)만이 1일때, $A_i = \frac{2^\alpha}{2} - \frac{2^\alpha}{2} = 0$, i비트="–"

최소항 2^α개가 모두 0일때, $A_i = B_i - 2^\alpha/2 = 0 - 2^\alpha/2 = -2^\alpha/2$는 負의 整數, i비트="0"

VI. 결　론

이 論文에서는 10진수로 표현한 최소항들간의 큐브관계를 찾아 하나의 표에 배열해 놓고 간소화를 위한 규칙에 따라 표를 검사하는 방법으로 간소화 작업을 한다. 이 방법은 손작업이나 프로그램의 경우, 하나의 표로서 모든 큐브관계와 진성주항을 탐색할 수 있고 표의 조사도 해당 란이 0인가 아닌가만으로 판정이 되도록 되어 있어 간단하다.

또 표의 윗쪽에서 아랫쪽으로, 定理들로 표현된 요건에 맞는 경우만을 검사하여 불필요하게 2중 조사하는 일이 없고, 최소항들의 數가 많은 경우라도 복잡성이 대수적으로만 증가하여 손작업의 경우도 최소한의 지면으로 착오를 일으키지 않고 작업을 진행할 수 있을 만큼 표가 혼잡해지지 않는다. 따라서, 2진수 표현의 각 비트를 하나하나 비교해야 하고 선별표와 축소 선별표등을 다시 작성해야 하는 Quine McCluskey 방법보다 간단하고 컴퓨터 처리때에도 문의 數도 적고 처리 속도도 빠르다.

정리 1~3은 손작업의 경우나 컴퓨터 프로그램의 경우나 기본적으로 필요한 정리이다. 정리 4의 진성주항의 탐색은 손작업의 경우는 간단한 점검으로 여분항들을 지우고 진성주항을 선택할 수 있는 일이나, 문장의 표현으로는 장황해진다. 프로그램의 경우는 비교적 간결히 표현되었다.

PLA의 등장으로 부울함수의 간소화는 실용적인 가치가 적어졌으나 하나의 새로운 알고리즘의 프로그램을 제안한 것이다.

附　　錄

```
; C
; C      ***** PROG. DESCRIPTION : BOOLEAN FUNCTION MINIMIZATION *****
; C      ***** PROGRAMED : LEE SUNG WOO *****
; C      ***** DATE : 1984. 2 *****
; C
```

```
;        LOGICAL ITEST
;        DIMENSION MC(100,12),MAA(100,12),KL(12),KS(12),MBX(64),MRD(40),KRD(100)
;        DIMENSION KC(100),KD(100),MB(100,12),MBC(200,65),MA(100),MAC(100,65)
;        COMMON KC,KD,MB,MBC,MA,MAC,KS,MBX
;        CALL OPEN(10,"$LPT",0,IER)
; C
; C      ***** N : THE NUMBER OF MINTERMS , MA(I) : MINTERMS *****
; C      ***** NRD : THE NUMBER OF REDUNDNAT MINTERMS , MRD(J) : REDUNDANT MINTERMS NO. *****
; C
;        READ(11,100)N,(MA(I),I=1,N)
;        READ(11,100)NRD,(MRD(J),J=1,NRD)
; 100    FORMAT(5I4)
;        WRITE(10,140)N,(MA(I),I=1,N)
; 140    FORMAT(/10X,"***** INPUT  DATA *****"//5X,"N=",I4,4X,"MINTERMS :",17(I5,
;       *",")/25X,17(I5,",")/25X,17(I5,",")/25X,17(I5,",")/25X,17(I5,","))
;        WRITE(10,142)NRD,(MRD(J),J=1,NRD)
; 142    FORMAT(//3X,"NRD=",I4,4X,"REDUNDANT MINTERMS NO.:",12(I5,",")/38X,12(I5,",")/38X,12(I5,","))
; C
; C      ***** K : THE NUMBER OF BINARY BITS BY WHICH MAXIMUM MINTERM CAN BE REPRESENTABLE *****
; C
;        K=ALOG(FLOAT(MA(N)))/ALOG(2.0)+1.0
;        DO 10 I=1,N
;        KC(I)=0
;        KD(I)=0
;        KRD(I)="  "
; 10     CONTINUE
;        DO 18 J=1,NRD
;        KC(MRD(J))=-100
;        KD(MRD(J))=-100
; 18     CONTINUE
;        DO 19 I=1,N
;        IF(KD(I).NE.0)KRD(I)=" R"
; 19     CONTINUE
; C
; C      ***** FOR BINARY REPRESENTATION OF ALL MINTERMS *****
; C
;        NA=0
;        DO 20 I=1,N
;        DO 20 J=1,K
;        MB(I,J)=0
;        IF(ITEST(MA(I),J-1))MB(I,J)=1
; 20     CONTINUE
; C
; C      ***** LOOKING FOR 1 - CUBE RELATIONS *****
; C
;        DO 30 I=1,N
;        DO 50 J=1,K
;        IF(MB(I,J).EQ.1)GO TO 2
;        MC(I,J)=MA(I)+2**(J-1)
;        IF(MC(I,J).GT.MA(N))GO TO 3
;        IA=I+1
;        DO 60 M=IA,N
;        IF(MC(I,J)-MA(M))2,4,60
; 60     CONTINUE
; 2      MC(I,J)=0
;        MAA(I,J)=0
;        GO TO 50
; C
; C      ***** MC(I,J) -(=MA(M))- IS A MINTERM THAT HAS 1-CUBE RELATION WITH MA(I) *****
; C
; 4      KC(I)=KC(I)+1
;        KC(M)=KC(M)+1
; C
; C      ***** M-TH MINTERM HAS 1-CUBE RELATION WITH I-TH,  NA : FOR COUNTING THE NUMBER OF 1-CUBES *****
; C
;        MAA(I,J)=M
;        NA=NA+1
;        MBC(NA,1)=I
;        MBC(NA,2)=M
;        MBC(NA,65)=J+1
; 50     CONTINUE
;        GO TO 30
; 3      DO 70 JA=J,K
;        MC(I,JA)=0
;        MAA(I,JA)=0
; 70     CONTINUE
; 30     CONTINUE
; C
; C      ***** FOR WRITTING TABLE 1 *****
; C
;        DO 80 J=1,K
;        KL(J)=2**(J-1)
; 80     CONTINUE
;        WRITE(10,200)(KL(J),J=1,K)
; 200    FORMAT(///10X,"***** OUTPUT  RESULT *****"///
;       *25X,"********** TABLE  1 **********"///28X,"2**K :"/30X,12(I3,5X))
;        WRITE(10,300)
; 300    FORMAT(3X,"MINTERMS NO.  MINTERMS ")
;        DO 90 I=1,N
;        WRITE(10,400)I,MA(I),KRD(I),(MC(I,J),J=1,K)
; 400    FORMAT(/10X,I3,6X,I4,A2,12(4X,I4))
```

```
; 90     CONTINUE
; C
; C      ***** FOR 0 - CUBES *****
; C
;        WRITE(10,800)
; 800    FORMAT(/22X,"*** R ; DON'T CARE MINTERMS"////25X,"*********** ESSENTIAL
;       *PRIME IMPLICANTS **********"////10X,"***** 0-CUBES *****"//54X,"LSB - MSB")
;        DO 120 I=1,N
;        IF(KC(I).NE.0)GO TO 120
;        WRITE(10,850)MA(I),(MB(I,J),J=1,K)
; 850    FORMAT(/5X,"MINTERM ; ",I5,20X,"X-VECTORS ;",3X,12I2)
; 120    CONTINUE
; C
; C      ***** FOR L - CUBES *****
; C
;        DO 210 L=1,K
;        IF(NA.EQ.0)GO TO 99
;        WRITE(10,900)L
; 900    FORMAT(////10X,"***** ",I1," - CUBES *****"//)
; C
; C      ***** LQ ; THE NUMBER OF MINTERMS FOR L - CUBE RELATIONS *****
; C
;        LQ=2**L
;        NB=0
; C
; C      ***** LOOKING FOR (L+1) CUBE RELATIONS *****
; C
;        DO 220 I=1,NA
;        LC=MBC(I,65)
;        DO 230 J=LC,K
;        IF(MAA(MBC(I,1),J).EQ.0)GO TO 230
;        DO 240 KX=2,LQ
;        IF(MAA(MBC(I,KX),J).EQ.0)GO TO 230
; 240    CONTINUE
; C
; C      ***** NB ; FOR COUNTING THE NUMBER OF (L+1) - CUBES *****
; C
;        NB=NB+1
;        DO 250 M=1,LQ
;        MAC(NB,M)=MBC(I,M)
;        KC(MBC(I,M))=0
;        KD(MBC(I,M))=KD(MBC(I,M))+1
;        MQ=LQ+M
;        MAC(NB,MQ)=MAA(MBC(I,M),J)
;        KC(MAC(NB,MQ))=0
;        KD(MAC(NB,MQ))=KD(MAC(NB,MQ))+1
; 250    CONTINUE
;        MAC(NB,65)=J+1
; 230    CONTINUE
; 220    CONTINUE
;        LP=LQ*2
; C
; C      ***** FOR SELECTING ESSENTIAL PRIME IMPLICANTS *****
; C
;        DO 260 I=1,NA
;        DO 260 J=1,LQ
;        IF(KC(MBC(I,J)).NE.1) GO TO 260
; C
; C      ***** FOR TYPING OUT "ESSENTIAL PRIME IMPLICANTS" *****
; C
;        CALL PRIME(I,K,LQ)
; 260    CONTINUE
; C
; C      ***** FOR SELECTING ESSENTIAL PRIME IMPLICANTS *****
; C
;        LS=LQ+1
; 7      LS=LS-1
;        DO 270 I=1,NA
;        LR=0
;        DO 280 J=1,LQ
;        IF(KC(MBC(I,J)).GE.2)LR=LR+1
; 280    CONTINUE
;        IF(LR.LT.LS) GO TO 270
;        CALL PRIME(I,K,LQ)
; 270    CONTINUE
;        DO 345 I=1,N
;        IF(KC(I).GT.0) GO TO 7
; 345    CONTINUE
; C
; C      ***** FOR REPEATING THE ABOVE ROUTINE FOR (L+1) - CUBES *****
; C
;        DO 350 I=1,NB
;        DO 360 J=1,LP
;        MBC(I,J)=MAC(I,J)
; 360    CONTINUE
;        MBC(I,65)=MAC(I,65)
; 350    CONTINUE
;        NA=NB
;        DO 370 I=1,N
;        KC(I)=KD(I)
;        IF(KC(I).GT.0)KD(I)=0
; 370    CONTINUE
```

```
; 210    CONTINUE
; 99     STOP
;        END
; C      ***** SUBROUTINE PRIME *****
; C
;        SUBROUTINE PRIME (IK,IM,LX)
;        COMMON KC(100),KD(100),MB(100,12),MBC(200,65),MA(100),MAC(100,65),KS(12),MBX(64)
;        LW=LX/2
;        DO 310 KX=1,IM
; 310    KS(KX)=0
;        DO 320 J=1,LX
;        KD(MBC(IK,J))=-100
; 320    KC(MBC(IK,J))=0
;        DO 330 KX=1,IM
;        DO 340 J=1,LX
;        KS(KX)=KS(KX)+MB(MBC(IK,J),KX)
; 340    CONTINUE
;        IF(KS(KX)-LW)11,12,13
; 11     KS(KX)=" 0"
;        GO TO 330
; 12     KS(KX)=" -"
;        GO TO 330
; 13     KS(KX)=" 1"
; 330    CONTINUE
;        DO 343 J=1,LX
;        MC=MBC(IK,J)
;        WRITE(10,600)MA(MC),(MB(MC,JQ),JQ=1,IM)
; 600    FORMAT(5X,"MINTERM ; ",I5,4X,12I2)
; 343    CONTINUE
;        WRITE(10,700)(KS(JR),JR=1,IM)
; 700    FORMAT(40X,"X-VECTORS ;",3X,12A2)
;        RETURN
;        END
```

```
                    61,   63,

NRC=   5    REDUNDANT MINTERMS NO.:    3,    5,   10,   12,   14,

      ***** OUTPUT  RESULT *****

              ********** TABLE  1 **********
```

MINTERMS NO.	MINTERMS	2**K : 1	2	4	8	16	32
1	0	1	0	0	0	0	0
2	1	0	3	0	9	17	0
3	3 R	0	0	0	11	19	35
4	9	0	11	0	0	25	41
5	11 R	0	0	0	0	27	43
6	17	0	19	0	25	0	0
7	19	0	0	0	27	0	0
8	25	0	27	0	0	0	0
9	27	0	0	0	0	0	0
10	35 R	0	0	0	43	0	0
11	37	0	0	0	45	0	0
12	38 R	0	0	0	0	0	0
13	41	0	43	45	0	0	0
14	43 R	0	0	47	0	0	0
15	45	0	47	0	0	61	0
16	47	0	0	0	0	63	0
17	52	0	0	0	0	0	0
18	61	0	63	0	0	0	0
19	63	0	0	0	0	0	0

*** R : DON'T CARE MINTERMS

```
********** ESSENTIAL PRIME IMPLICANTS **********

      ***** 0-CUBES *****
                                                   LSB - MSB
MINTERM :    52                        X-VECTORS    0 0 1 0 1 1

      ***** 1 - CUBES *****

MINTERM :     0      0 0 0 0 0 0
MINTERM :     1      1 0 0 0 0 0
                                       X-VECTORS :  - 0 0 0 0 0
MINTERM :    37      1 0 1 0 0 1
MINTERM :    45      1 0 1 1 0 1
                                       X-VECTORS :  1 0 1 - 0 1

      ***** 2 - CUBES *****

MINTERM :    45      1 0 1 1 0 1
MINTERM :    47      1 1 1 1 0 1
MINTERM :    61      1 0 1 1 1 1
MINTERM :    63      1 1 1 1 1 1
                                       X-VECTORS :  1 - 1 1 - 1
MINTERM :     9      1 0 0 1 0 0
MINTERM :    11      1 1 0 1 0 0
MINTERM :    41      1 0 0 1 0 1
MINTERM :    43      1 1 0 1 0 1
                                       X-VECTORS :  1 - 0 1 0 -

      ***** 3 - CUBES *****

MINTERM :     1      1 0 0 0 0 0
MINTERM :     3      1 1 0 0 0 0
MINTERM :     9      1 0 0 1 0 0
MINTERM :    11      1 1 0 1 0 0
MINTERM :    17      1 0 0 0 1 0
MINTERM :    19      1 1 0 0 1 0
MINTERM :    25      1 0 0 1 1 0
MINTERM :    27      1 1 0 1 1 0
                                       X-VECTORS :  1 - 0 - - 0
```

參 考 文 獻

[1] Bowman, R.M., E.S. Mcvey, "A Methode for the fast approximate solution of large prime implicant charts", *IEEE Trans. Computers,* vol. C-19, no. 2, pp. 169-173, Feb. 1970.

[2] Carrol, C.C., "A fast algorithm for Boolean function minimization", *Technical Report,* no. AU-T-3, Project Themis, Auburn Univ., Auburn Alabama, Dec. 1968. *