

DFT와 CDFT의 분산 분포

(Variance Distributions of the DFT and CDFT)

崔 太 永*

(Tae Young Choi)

要 約

DFT로 대각선화 할 수 있는 circulant matrix가 대칭이고 실수인 경우에 이를 대각선화 할 수 있는 CDFT(composite DFT)를 유도했다.

일반적인 실수 신호의 대칭 covariance matrix에 대하여 DFT와 CDFT 변환했을 경우의 variance 분포를 분석했고, 이를 토대로 rate distortion 이론에 의하여 이들의 성능을 비교한 결과 CDFT가 DFT보다 bit rate 면에서 효과적임을 볼 수 있었다. 그리고 $f(q) = (0.95)^q$ 인 covariance matrix (64×64)에 대해 CDFT가 DFT에 비해, 계산결과, 평균적으로 0.0095bit가 감소될 수 있었다.

Abstract

A composite - discrete Fourier transform (CDFT) is developed, which can diagonalize a real symmetric circulant matrix. In general the circulant matrices can be diagonalized by the discrete Fourier transform (DFT).

With the analysis of the variance distributions of the DFT and CDFT for the general symmetric covariance matrix of real signals, the DFT and CDFT are compared with respect to the rate distortion performance measure. The results show that the CDFT is more efficient than the DFT in bit rate reduction. In addition, for a particular 64×64 points covariance matrix ($f(q)=(0.95)^q$), the amount of the relative average bit rate reduction for the CDFT with respect to the DFT is obtained by 0.0095 bit with a numerical calculation.

I. 序 論

연속적인 실수 신호원(voice, picture 등)을 Nyquist rate 이상으로 표본화한 표본들을 각각 ergodic random variable로 가정하면, 이들 표본들은 동일한 mean, variance를 갖고 등거리 표본간의 covariance도 동일하다. 표본 간격이 짧을수록 인접표본간의 covariance 값은 커져 간격이 0이면 variance 값이 되어, covariance matrix의 off diagonal의 값은 dia-

gonal 성분(variance)보다 작고(부록 I, [1]) 대칭임을 알 수 있다.

위와 같이 ergodic 특성을 갖는, 실수 신호를 등간격으로(Nyquist rate 이상) 표본화한 인접한 N개의 표본으로 된 신호의 어느 한 구간($NT_s : T_s$ 는 표본간격)의 $N \times 1$ vector를 X, 이의 원소들(random variable)을 $x(n)$ ($n=0, 1, 2, \dots, N-1$), X의 covariance matrix를 C_x , 이의 원소들을 $c_x(m, n)$ ($m, n=0, 1, 2, \dots, N-1$)이라 할 때, C_x 와 $c_x(m, n)$ 은 (1)로 정의된다(여기서 $c_x(m, n)$ 은 C_x matrix의 m, n 번째의 row와 column 성분을 뜻하고 본문중의 모든 matrix의 원소들을 이와 같은 방법으로 나타냈다. 그리고 conjugate(*)는 complex 신호(2)의 T가 complex matrix

*正會員, 亞洲工大 電子工學科
(Dept. of Electronics Eng., Ajou Univ.)
接受日字: 1983年 12月 8日

인 경우)일 때 해당되어, X 가 실수이므로 $f(q)$ 는 실수이다.

$$C_x \triangleq E\{(X-E(X))(X-E(X))^*\} \\ cx(m, n) = f(q), \quad q = |m-n| \quad (1)$$

여기서 $f(q)$ 는 등거리 간격 q 의 함수를 뜻한다(예, $f(q) = f(0)A(q)$: 여기서 $A(q)$ 는 qT_s 만큼 떨어진 표본간의 상관계수이다).

실수 vector X 를 matrix T 로 변환한 vector를 Y , Y 의 covariance matrix를 C_y , C_y 의 원소들을 $cy(l, k)$ 라 하면, (1)의 정의를 이용하여,

$$Y = TX$$

$$C_y = T C_x T^{**}$$

$$cy(l, k) = \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} t(l, m) cx(m, n) t^*(n, k) \quad (2)$$

으로 나타낼 수 있다.

변환 matrix T 가 unitary matrix 이면 변환에 의한 variance의 합은 일정하다 (3).

$$E\{(X-E(X))^t (X-E(X))^t\} = E\{(Y-E(Y))^t (Y-E(Y))^t\} \text{ 또는 } E\{X^*X\} = E\{Y^{**}Y\} \quad (3)$$

(1), (3)에서 unitary transform은 uniform variance ($cx(n, n) = f(0)$, $n=0, 1, 2, \dots, N-1$)를 갖는 X 를, T 에 따라, nonuniform variance ($cy(m, m)$)이 일정치 않고 m 에 따라 다름)을 갖는 Y 를 얻을 수도 있음을 알 수 있다.

한편, coding할 때 주어진 quantization level 수에서 quantization error power는 quantizer 입력신호의 variance에 비례하므로,²⁾ 주어진 quantization error 범위내에서 coding 할려면 quantizer의 입력신호의 $\log_2(\text{variance})$ 에 비례하게 bit 할당을 해야 된다. Mean square sense에 근거를 둔 block quantization 法³⁾이나 rate distortion 이론(IV장, [4])에서도 bit 할당은 $\log_2(\text{variance})$ 에 비례하게 하고 있다.

위와같이 unitary transform에 의한 variance의 합은 일정하기 때문에 변환영역에서의 variance가 집중화 될수록 전체적인 bit rate를 줄일 수 있다(data compression). 한편 quantization error의 영향을 무시하고 변환된 신호 Y 의 variance가 작은 순으로 L 개 ($L < N$)를 제거(zero)하여 역변환 했을 경우, mean square error, e 는 (4)로 나타낼 수 있다.

$$e = E\{(X - T^{**}(Y - Y_0))^{**} (X - T^{**}(Y - Y_0))\} \\ = E\{Y_0^{**} Y_0\} \quad (4)$$

여기서 Y_0 는 Y 에서 제거한 L 개의 변환된 신호와 나머지 $N-L$ 개의 원소는 zero화한 vector이다.

(4)와 (2)에서 (5)를 얻을 수 있다.

$$e = \sum_{l=0}^{L-1} (cy(l, l) + |E(y(l))|^2) \quad (5)$$

여기서 S 는 제거된 L 개의 원소에 해당하는 집합이

고, $y(l)$ 은 Y vector의 원소이다. 그런데 $E(Y)$ 는 $TE(X)$ 이므로(constant한 신호를 T 로 변환한 것) T 의 row 성분의 합에 비례함을 알 수 있고 DFT, CDFT, walsh(hadamard) 등의 경우에는 $E(y(l))$ 은 0이다(단, $E(y(0)) \neq 0$). 따라서 (5)의 e 는, $E(Y) = 0$ 일 때, 제거된 신호의 variance량의 합과 같다.

한편 역변환은 matrix와 vector의 곱, 즉 linear summation 작용이기 때문에 어느 한 변환된 신호의 error가 송신로상에서 발생하더라도 재생(역변환)된 신호는 전체적으로 이 error가 분산되므로 원래의 신호에 가까운 신호를 얻을 수 있는 점이 있다.

II장에서 취급할 DFT는 circulant matrix를 대각선화 할 수 있다(13). Circulant matrix는 이 matrix의 첫번째 column(또는 row)의 원소들을 차례로 circular shift시켜 배열한 matrix이다(11). 첫번째 column vector의 원소가 $c(n)$ ($n=0, 1, 2, \dots, N-1$)일 때 다음 column vector의 원소는 $c(n-1)$ 이다(Circular shift란 $c(n)$ 이 주기적이라는 가정에서 $c(n) = c(n+kN)$, k 는 정수). shift하기 때문에 $c(1) = c(N-1)$ 이다. 이러한 circulant matrix의 각 column vector를 각각 DFT 변환하면 (12, 13)의 관계식을 얻을 수 있다.

참고문헌 [5]에서, 우함수와 기함수의 FT 또는 DFT의 성질을 이용해서 CDFT를 유도했으나 본 연구에서는, DFT가 대각선화 할 수 있는 circulant matrix가 특수형인 실수이고 대칭인 경우에 CDFT가 대각선화 할 수 있음을 보이고 일반적인 실수신호의 covariance matrix에 대한 DFT와 CDFT의 variance 분포를 계산하여 rate distortion 이론에 의한 bit rate를 비교 산출하였다.

II. DFT와 CDFT

DFT의 수학적 성질(시간함수의 spectrum, convolution 등)은 analog FT와 유사하고,⁴⁾ DFT는 power spectrum 분석, filter simulation 등 digital signal processing에 유용하게 사용된다.

DFT의 변환 matrix T_1 은 (6)으로 정의된다.

$$T_1 = T_c - jT_s \quad (6)$$

여기서 T_c 와 T_s 는 real matrix이고 이들의 원소들은 (7)로 주어진다.

$$t_c(m, n) = \frac{1}{\sqrt{N}} \cos\left(\frac{2\pi mn}{N}\right) \\ t_s(m, n) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sin\left(\frac{2\pi mn}{N}\right) \quad (7)$$

(6), (7)에서 T_c 와 T_s 는 다음 관계를 만족함을 알 수 있다.

$$\begin{aligned} T_s T_c &= T_c T_s = 0 \text{ (zero matrix)} \\ T_c T_c + T_s T_s &= I \text{ (identity)} \end{aligned} \quad (8)$$

여기서 zero matrix라 함은 matrix의 모든 원소가 zero를 뜻한다. (8)의 결과를 이용하여 다음의 CDFT matrix를 얻을 수 있다.

$$(T_c \pm T_s)(T_c \pm T_s) = I \text{ (부호동순)} \quad (9)$$

여기서 $T_c \pm T_s$ 가 orthonormal matrix임을 알 수 있고 DFT 변환 matrix T_1 의 실수(T_c)와 허수부분(T_s)의 합으로 된 matrix임으로 composite DFT라 칭하겠다 ([5]에서 DCFT라 했으나 CDFT가 온당하여 정정함). CDFT의 matrix $T_2(t_2(m, n))$ 는 (10)으로 정리할 수 있다.

$$T_2 = T_c \pm T_s$$

$$t_2(m, n) = \sqrt{\frac{2}{N}} \cos\left(\frac{2\pi mn}{N} \mp \frac{\pi}{4}\right) \quad (10)$$

한편 변환하고자 하는 신호 X 가 real인 경우에 CDFT 변환은 DFT 변환값의 실수와 허수부분의 합 또는 차이 때문에 FFT를 사용하여 동일시간내에 계산할 수 있다.

DFT와 CDFT로 대각선화 할 수 있는 matrix를 고려해보자. DFT의 경우 circulant matrix (11)를 대각선화 할 수 있고 이 대각선 matrix D 의 원소 $d(l, k)$ 는 (12)로 주어진다.^[7]

Circulant matrix C ;

$$C = \begin{bmatrix} c(0) & c(N-1) & c(N-2) & \dots & c(1) \\ c(1) & c(0) & c(N-1) & \dots & c(2) \\ c(2) & c(1) & c(0) & \dots & c(3) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ c(N-1) & c(N-2) & c(N-3) & \dots & c(0) \end{bmatrix} \quad (11)$$

대각선 matrix D 의 원소 $d(l, k)$;

$$d(l, k) = \begin{cases} \sum_{n=0}^{N-1} c(n) \exp\left[-j\frac{2\pi ln}{N}\right], & l=k \\ 0, & l \neq k \end{cases} \quad (12)$$

위 C 와 D 의 관계는 (13)으로 주어진다.

$$CT_1^{*T} = T_1^{*T} D \quad (13)$$

여기서 T_1 은 (6)의 DFT matrix이다. 따라서 DFT는 circulant matrix C 의 eigen vector로 된 matrix의 conjugated transpose (KLT: Karhunen Loève transform)와 동일함을 알 수 있다. (11)은 일반적인 covariance matrix 형이 아니다. C 가 실수이고 대칭인 matrix 이면 (14, 15)를 만족한다.

$$c(l) = c(N-l) \quad (14)$$

$$d(l, l) = \begin{cases} c(0) + c\left(\frac{N}{2}\right)(-1)^l + 2\sum_{n=1}^{\frac{N-1}{2}} c(n) \cos\left(\frac{2\pi ln}{N}\right) & (N: \text{ 짝수}) \\ c(0) + 2\sum_{n=1}^{\frac{N-1}{2}} c(n) \cos\left(\frac{2\pi ln}{N}\right) & (N: \text{ 홀수}) \end{cases} \quad (15)$$

따라서 D 역시 실수 matrix가 되어 (6), (13)에서 (16)을 유도할 수 있다.

$$\begin{aligned} CT_c &= T_c D \\ CT_s &= T_s D \end{aligned} \quad (16)$$

(16)에서,

$$\begin{aligned} C(T_c \pm T_s) &= (T_c \pm T_s) D \\ CT_2 &= T_2 D \end{aligned} \quad (17)$$

임을 알 수 있다. 따라서 CDFT는 실수이고 대칭인 circulant covariance matrix를 대각선화함을 알 수 있다.

III. Variance 분포

신호 vector X 를 DFT와 CDFT로 변환했을 때의 covariance matrix를 각각 C_1, C_2 그리고 variance 분을 다음과 같이 정의하면,

$$c_1(l) \triangleq c_1(l, l), \quad c_2(l) \triangleq c_2(l, l)$$

(1), (2), (6), (7), (10)에 의하여 $c_1(l)$ 은 다음과 같이 계산된다[부록 II].

$$\begin{aligned} c_1(l) &= \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} cx(m, n) \cos\left(\frac{2\pi}{N}(m-n)l\right) \\ &\quad - j \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} cx(m, n) \sin\left(\frac{2\pi}{N}(m-n)l\right) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{q=1-N}^{N-1} f(|q|) (N-|q|) \cos\left(\frac{2\pi}{N}ql\right) \end{aligned} \quad (18)$$

마찬가지로 $c_2(l)$ 은,

$$\begin{aligned} c_2(l) &= \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} cx(m, n) \cos\left(\frac{2\pi}{N}(m-n)l\right) \\ &\quad \pm \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} cx(m, n) \sin\left(\frac{2\pi}{N}(m+n)l\right) \\ &= c_1(l) \pm \Delta(l) \end{aligned} \quad (19)$$

여기서,

$$\Delta(l) = \frac{2}{N} \sum_{q=1}^{N-1} f(q) \sin\left(\frac{2\pi}{N}ql\right)$$

위 (18), (19)에서 DFT와 CDFT로 변환했을 때의 variance, $c_1(l), c_2(l)$ 은 $\Delta(l)$ 만큼의 차이가 있음을 알 수 있다. $c_1(l)$ 과 $\Delta(l)$ 은 $l = \frac{N}{2}$ 을 기준으로 각각 우함수와 기함수이다 (20).

$$\begin{aligned} c_1(l) &= c_1(N-l) \\ \Delta(l) &= -\Delta(N-l) \end{aligned} \quad (20)$$

여기서, 수치의적인 예로서, X 의 covariance matrix,

$f(q) = (0.95)^q$ 인 경우에 대하여 64 point DFT 및 CDFT 변환했을 때의 variance 분포(표1)와 covariance의 절대치제곱(그림1; $\max(\log(|c_y(l, k)|^2), -4)$), 좌후미쪽이 원점($l=k=0$)이고 CDFT의 변환 matrix T_2 는 (10)의 $T_c - T_s$ 인 경우)을 구해 보았다. 표 1에서 변환된 신호의 variance가 전체 variance (64)의 1% (0.64) 이상인 것은 9개($l=0\sim 4, 60\sim 64$)임을 알 수 있고 이들의 합은 58.0456이 되어 전체 variance량의 90.7%에 달하고 있다.

표 1. $f(q) = (0.95)^q$ 일 때의 $c_1(l)$ 및 $\Delta(l)$ ($0 \leq l \leq 31$)

Table 1. $c_1(l)$ and $\Delta(l)$ ($0 \leq l \leq 31$) for $f(q) = (0.95)^q$.

l	$c_1(l)$	$\Delta(l)$	l	$c_1(l)$	$\Delta(l)$
0	27.5706	.0	16	.0662	-.0151
1	9.7724	-.2404	17	.0603	-.0137
2	3.1390	-.1429	18	.0555	-.0123
3	1.4756	-.0984	19	.0514	-.0111
4	.8505	-.0744	20	.0479	-.0101
5	.5531	-.0594	21	.0451	-.0090
6	.3894	-.0492	22	.0426	-.0080
7	.2900	-.0418	23	.0406	-.0071
8	.2251	-.0362	24	.0388	-.0063
9	.1806	-.0317	25	.0374	-.0054
10	.1487	-.0281	26	.0362	-.0046
11	.1251	-.0250	27	.0352	-.0038
12	.1072	-.0224	28	.0345	-.0030
13	.0933	-.0202	29	.0339	-.0020
14	.0823	-.0183	30	.0335	-.0015
15	.0734	-.0166	31	.0332	-.0008

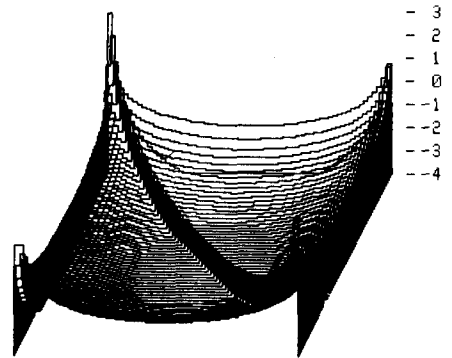
IV. 성능 비교

신호변환에 의한 data compression 정도를 주어진 mean square error 왜곡량(D) 내에서 coding 할 수 있는 최소의 average information rate, $R(D)$ 로 나타낸다. 특히 신호원이 stationary Gaussian statistic 특성을 가질 때 $R(D)$ 는 (21)로 주어진다.⁴⁾ 여기서 변환하지 않은 원신호 X가 Gaussian이 아니더라도 변환(linear summation 작용)에 의하여 Gaussian에 가까운 특성을 갖게 됨을 유의해야 된다(central limit theorem).

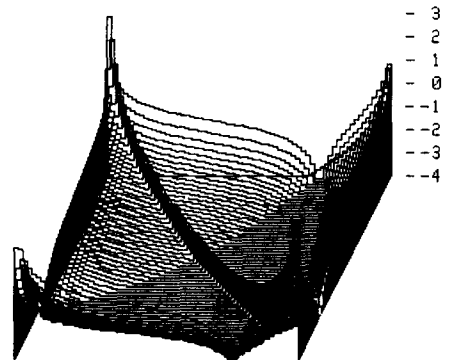
$$R(D) = \frac{1}{2N} \sum_{l=0}^{N-1} \log_2 \left(\frac{cy(l, l)}{D} \right),$$

$$D < \min(cy(l, l)) \quad (21)$$

여기서 $cy(l, l)$ 은 $Y(=TX)$ 의 covariance matrix의 대각선원소(variance)를 말하고 KLT 변환인 경우



(a) DFT



(b) CDFT

그림 1. $f(q) = (0.95)^q$ 일 때의 64 point DFT와 CDFT에 의한 covariance matrix 원소의 절대치 제곱: (a) $|c_1(l, k)|^2$, (b) $|c_2(l, k)|^2$

Fig. 1. Squared absolute elements of the covariance matrices of the 64-points DFT and CDFT with $f(q) = (0.95)^q$: (a) $|c_1(l, k)|^2$, (b) $|c_2(l, k)|^2$.

에 $R(D)$ 가 최소이다.^{4), 5)}

KLT, DFT, CDFT에 의한 $R(D)$ 를 $R_0(D), R_1(D), R_2(D)$ 라 하자. 이들간의 상대적 차를 $R_{10}(D) (=R_1(D) - R_0(D)), R_{20}(D) (=R_2(D) - R_0(D)), R_{12}(D) (=R_1(D) - R_2(D))$ 라하면, (18)~(21)에서 $R_{12}(D)$ 는 항상 양의 값을 갖는다는 것을 다음에서 알 수 있다.

$$R_{12}(D) = \frac{1}{2N} \sum_{l=1}^{N-1} \log_2 \left(\frac{c_1(l)}{c_2(l)} \right)$$

$$= \frac{1}{2N} \log_2 \prod_{l=1}^{N/2} \left(\frac{c_1(l)^2}{c_1(l)^2 - \Delta(l)^2} \right) \geq 0 \quad (22)$$

따라서 DFT가 CDFT보다 coding 할 때 bit 수를 더 많이 할당해야 됨을 알 수 있다. 표 1의 조건에서, $R_{12}(D)$ 는 0.0095 bit로 나타났다.

한편 $R_{10}(D)$ 또는 $R_{20}(D)$ (KLT에 대한 상대적 bit rate)의 상한 값이 C_1, C_2 의 off diagonal 성분의 norm

에 비례하는 것으로 다음과 같이 알려지고 있다.¹⁸⁾

$$R_{10}(D) \leq F \left(\sum_{l,k} |c_1(l,k)|^2 \right) \tag{23}$$

$$R_{20}(D) \leq F \left(\sum_{l,k} |c_2(l,k)|^2 \right)$$

여기서 $F(\cdot)$ 는 \cdot 의 비례함수(단조증가)를 뜻한다. 위의 상한 값을 계산하기 위해 다음과 같이 정의되는 Hilbert-schmidt norm을 이용하자.

$$\|C_x\|^2 \triangleq \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} |cx(m,n)|^2$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \text{Diag}(C_x^* C_x) \tag{24}$$

여기서 $\text{Diag}(\cdot)$ 는 \cdot 의 대각선 성분을 뜻한다. (2)에서 T 가 unitary matrix인 경우, C_y 의 norm은 (24)를 이용하여,

$$\|C_y\|^2 = \|C_x\|^2 \tag{25}$$

임을 알 수 있다.

따라서 (23)의

$$\sum_{l,k} |c_1(l,k)|^2 = N \|C_x\|^2 = \sum_{l=0}^{N-1} c_1(l)^2$$

$$\sum_{l,k} |c_2(l,k)|^2 = N \|C_x\|^2 = \sum_{l=0}^{N-1} c_2(l)^2 \tag{26}$$

이 되고 이들의 차는 DFT와 CDFT에 의한 variance의 제곱은 합의 차와 같다. (19), (20)의 관계를 (26)에 대입하여 이들의 차를 구하면 항상 양이다.¹⁷⁾

$$\sum_{l,k} (|c_1(l,k)|^2 - |c_2(l,k)|^2)$$

$$= \sum_{l=0}^{N-1} (c_1(l)^2 - c_2(l)^2)$$

$$= 2 \sum_{l=1}^{N/2} \Delta(l)^2 \geq 0 \tag{27}$$

(23), (27)에서 $R_{20}(D)$ 가 $R_{10}(D)$ 보다 KLT에 대한 상대적 bit rate의 상한 값이 적어 CDFT가 DFT보다 효과적이라 할 수 있다.

V. 結 論

실수이고 대칭인 circulant matrix를 대각선화하는 CDFT를 유도했다. 이것은 DFT 변환 matrix의 실수와 허수부분의 합으로된 실수 matrix이고 변환시간은 DFT와 동일하다.

일반적인 대칭 covariance matrix를 갖는 실수 신호를 DFT와 CDFT로 변환했을 때의 variance 분포를 계산분석하였고 rate distortion 이론에 의하여 CDFT가 DFT보다 bit rate reduction면에서 효과적임이 입증되었다. 그리고 KLT에 대한 상대적 bit rate의 상한 값에서도 CDFT가 DFT보다 적어 앞의 결과를 뒷받침해 주었다.

1. Ergodic 특성을 갖는 실수 신호 X 의 Covariance Matrix C_x 의 특성:

X vector의 원소 $x(n)$ ($n=0, 1, 2, \dots, N-1$)이 ergodic random variable이라면 (A-1)을 만족한다.

$$E\{[x(n) - E(x(n))]^2\} = E\{[x(l) - E(x(l))]^2\} \tag{A-1}$$

그리고 (A-2)는 임의의 실수 a 에 대하여 항상 양이다. 이를 위해서는 (A-2)의 판별식(A-3)가 음이어야 한다.

$$E\{[a(x(n) - E(x(n))) - (x(l) - E(x(l)))]^2\}$$

$$= a^2 E\{[x(n) - E(x(n))]^2\} - 2a E\{[x(n) - E(x(n))][x(l) - E(x(l))]\} + E\{[x(l) - E(x(l))]^2\} \tag{A-2}$$

$$E\{[x(n) - E(x(n))][x(l) - E(x(l))]\}^2$$

$$\leq E\{[x(n) - E(x(n))]^2\} \cdot E\{[x(l) - E(x(l))]^2\} \tag{A-3}$$

(A-3)의 좌변은 $x(n)$ 과 $x(l)$ 의 covariance의 제곱을 뜻하고 우변은 (A-1)에 의해 variance의 제곱을 뜻하므로 (A-3), (1)에 의하여,

$$|cx(n, l)| \leq cx(n, n)$$

임을 알 수 있어 covariance matrix의 off diagonal 성분은 대각선 성분보다 작다는 것을 알 수 있다.

2. $cx(m, n) = f(|m-n|)$ (1)일 때의 DFT 및 CDFT 변환했을 때의 $c_1(l)$ 및 $c_2(l)$ 계산:

1) (18)의 유도

\cdot 표본거리 $|m-n|=0$ 인 경우에 N 번 ($m=n, m=0, 1, 2, \dots, N-1$), $|m-n|=1$ 인 경우에 $2(N-1)$ 번 ($(m, n) = (1, 0), (0, 1), (2, 1), (1, 2), \dots, (N-1, N-2), (N-2, N-1)$)의 경우를 갖는다. 위와 마찬가지로 $|m-n|=q$ ($1 \leq q \leq N-1$)인 경우에는 $2(N-q)$ 번의 경우가 있음을 알 수 있다. 따라서 (18)의

$$\sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} cx(m, n) \cos\left(\frac{2\pi(m-n)l}{N}\right)$$

$$= \sum_{q=1}^{N-1} f(|q|) (N-|q|) \cos\left(\frac{2\pi}{N}ql\right)$$

$$\sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} cx(m, n) \sin\left(\frac{2\pi(m-n)l}{N}\right)$$

$$= \sum_{q=1}^{N-1} f(|q|) (N-|q|) \sin\left(\frac{2\pi}{N}ql\right) = 0$$

가 되어 (18)를 얻는다.

2) (19)의 유도

$m+n=N+k$ 와 $m+n=N-k$ ($0 \leq k \leq N-2$)일 때,

$$\sin\left(\frac{2\pi}{N}(N+k)l\right) = -\sin\left(\frac{2\pi}{N}(N-k)l\right) \tag{A-4}$$

이 된다.

$m+n=N+k$ 인 경우에 $(N-1-k)$ 번 ($(m, n) = (N-1, k+1), (N-2, k+2), \dots, (k+2, N-2), (k+1, N-1)$)

의 경우가 있고 각각의 경우의 표본거리 ($|m-n|$)는 $N-k-2, N-k-4, \dots, N-k-4, N-k-2$ 이다.

한편 $m+n=N-k$ 인 경우 $(N+1-k)$ 번 $((m, n) = (N-k, 0), (N-k-1, 1), \dots, (1, N-k-1), (0, N-k))$ 의 경우가 있고 각각의 경우의 표본거리는 $N-k, N-k-2, \dots, N-k-2, N-k$ 이다.

따라서 (A-4)와 위의 결과에서, (19)의

$$\begin{aligned} & \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} cx(m, n) \sin\left(\frac{2\pi}{N}(m+n)l\right) \\ &= 2 \sum_{k=0}^{N-2} f(N-k) \sin\left(\frac{2\pi(N-k)l}{N}\right) \\ & \quad + 2 f(1) \sin\left(\frac{2\pi l}{N}\right) \\ &= 2 \sum_{k=0}^{N-1} f(N-k) \sin\left(\frac{2\pi(N-k)l}{N}\right) \\ &= 2 \sum_{q=1}^{N-1} f(q) \sin\left(\frac{2\pi ql}{N}\right) \end{aligned}$$

이 되므로 (19)를 얻는다.

参 考 文 献

[1] A. Papoulis, *Probability, Random Variables, and Stochastic Processes*. McGraw-

Hill, Ch. 7, pp. 210, 1965.

[2] N.S. Jayant, "Digital coding of speech waveforms: PCM, DPCM, and DM quantizers", *Proc. IEEE*, vol. 62, pp. 611-632, May 1974.

[3] J.J.Y. Huang et al., "Block quantization of correlated Gaussian random variables," *IEEE Trans. Commun. Syst.*, vol. CS-11, pp. 289-296, Sep. 1963.

[4] L.D. Davisson, "Rate-distortion theory and application," *Proc. IEEE*, vol. 60, pp. 800-808, July 1972.

[5] 崔太永, "새로운 신호변환(CFT 및 DCFT)의 유도 및 각종 신호변환의 비교", 전기학회지 제 32권 제16호, pp. 3~10, 6월 1983년.

[6] W.T. Cochran et al., "What is the fast Fourier transform," *Proc. IEEE*, vol. 55, no.10, Oct. 1967.

[7] R.C. Gonzalez et al., *Digital Image Processing*. Addison-Wesley, Ch. 5, 1977.

[8] J. Pearl, "On coding and filtering stationary signals by discrete Fourier transforms," *IEEE Trans. Inform. Theory (Corresp.)*, vol. IT-19, pp. 229-232, Mar. 1973.