論文 84-21-2-3

擴散 스펙트럼 通信方式에서의 同期 維持 時間의 確率分布에 關한 研究

(A Study on the Probability Distribution of Hold-in Time in Spread Spectrum Communication Systems)

沈 龍 杰*, 李 忠 雄**

(Yong Geol Shim and Choong Woong Lee)

要 約

擴散 스펙트럼 通信方式의 tracking 과정에서 hold-in time 및 false lock를 벗어나는 時間의 確率分布를 研究하였다. 이것은 correlator回路의 dwell time과 threshold level을 결정하는데 도움이 된다.

구하고자 하는 離散確率函數에 대한 發生函數를 급수전개하고 해당되는 項들의 계수를 합하여 同期 維持 時間의 確率分布를 誘導하였다. 그리하여 일반적인 시스템 파라미터들로 表現된 結果式을 구하였다.

Abstract

The probability distribution of hold-in time and that of the time to reject false lock are investigated for the tracking procedure in spread spectrum communication systems. These are helpful in deciding dwell time and threshold level of correlator circuits.

The probability distributions are derived by series expansion of generating function for discrete probability function and summation of the coefficients for corresponding terms. And the formulas described by general system parameters are obtained.

I. 序 論

최근 軍用通信이나 衛星通信등에 사용되고 있는 擴散 스펙트럼 通信方式에서는 PN코드의 同期가 절대적인 문제로 되어 있다.[1] 그런데 동기가 이루어져 계속 維持되고 있는 경우에도 그것을 확인하는 과정에서 同期를 잃어버린 것으로 잘못 판정하여 현재의 同期狀態를 버리고 다시 찾는 일이 發生한다. 즉, 同期가 맞아 있더라도 通信을 계속할 수 없는 狀態가 되는 것이다. 이것은 通信 시스템의 성능을 論함에 있어 무시할 수 없는 요인이 되며 가능한한 이와 같은 일이 發生하지 않도록 시스템을 설계해야 할 것이다.[2] 이렇게 同期가 맞은 狀態에서 通信을 계속할 수 있는 時間을 hold-in time이라 한다.

Hopkins는 absorbing Markov chain의 transition matrix를 이용하여 SLS(search/lock strategy)에서의 hold-in time의 平均値와 分散을 계산하였다.[2] 또, Holmes와 Chen은 Markov chain의 發生函數(generating function) 개념을 도입하여 PN코드 acquisition 시간의 平均値와 分散을 계산하였는데[3] 이 方法을 적절히 응용하면 hold-in time의 平均과 分散도 계산할 수 있다. 그러나 일반적으로 hold-in time의 確率分布를 정규분포로 볼 수 없으므로 보다 정밀한 설계에는 平均値와 分散만으로는 미흡하다. 그러므로 完全한 確

*準會員, **正會員, 서울大學校 工科大學 電子工學科
(Dept. of Electronics Eng., Seoul National Univ.)
接受日字：1983年 11月 18日

率分布를 구할 필요가 있다.

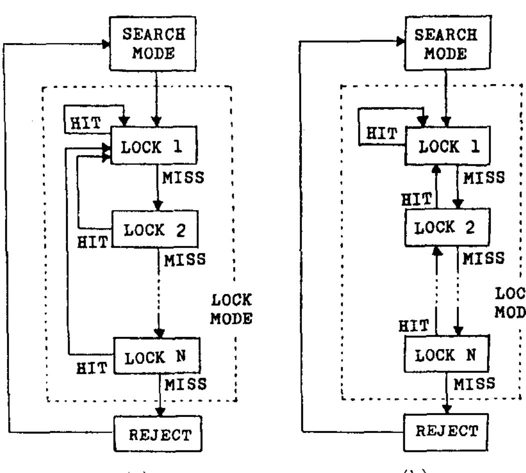
本 論文에서는 SLS를 사용하는 모든 種類의 擴散 스펙트럼 通信方式에서 hold-in time과 同期가 맞지 않았을 때 lock 狀態를 벗어나는 時間의 完全한 確率分布를 研究하였다. 그리하여 受信機 correlator 回路의 dwell time이나 threshold level을 결정하는데 도움이 되도록 하였다. 또한, 擴散 스펙트럼 通信方式이 아니더라도 同期가 중요시되는 시스템에서 SLS를 사용한다면 本 論文의 결과를 이용할 수 있을 것이다.

II. SLS와 Lock Mode

SLS(search/lock strategy)는 同期回路의 동작을 제어하는 論理的인 節次이다.[2] SLS는 search mode와 lock mode로 구성되어 있다. Search mode는 同期를 찾는 과정을 수행한다. 同期가 맞으면 lock mode로 들어가서 계속 확인을 한다. Hold-in time의 確率分布를 구하려면 lock mode를 解析해야 한다.

同期가 맞았다고 受信側에서 판단하는 것을 hit라 하고, 틀렸다고 판단하는 것을 miss라 한다. Lock mode에서 일정한 횟수만큼 연속적으로 miss가 발생하면 同期를 잃어버린 것으로 결정되어 현재의 同期狀態를 버리고 search mode로 들어가서 다시 同期를 찾게 된다. Lock mode에는 代表的인 두 가지 種類가 있는데 그림 1 (a), (b)에 圖示되었다.

그림 1의 한 狀態에서 다음 狀態로 진행하는 時間(dwell time)을 T, hit와 miss의 確率을 각각 p, q(단, p+q=1)라 하면 그림 1 (a), (b)에 대한 플로우그래프(flow graph)를 각각 그림 2 (a), (b)와 같이 작성할 수 있다. 여기서 z는 發生函數에 관계되는 因子로



(a) (b)

그림 1. Search/lock strategy의 모델
Fig. 1. Model of search/lock strategy.

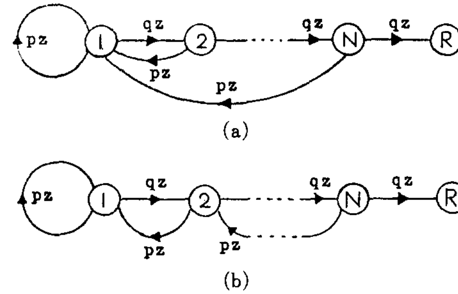


그림 2. 그림 1에 대한 플로우 그래프
Fig. 2. Flow graphs for Fig. 1.

서 한 段階의 遲延을 의미한다. 이 플로우그래프를 解析하면 dwell time에 대하여 正規化된 時間, 즉, 段階數의 確率分布를 얻는다. hit의 確率 P를 同期가 맞은 상황에서 옳게 detect할 確率 P_D로 잡으면 이 時間은 hold-in time이 되며, 同期가 맞지 않은 상황에서 false alarm이 發生할 確率 P_{FA}로 잡으면 false lock 狀態를 벗어나는 時間이 된다.

시스템에 따라서는 각 狀態마다 판단의 愼重性을 달리하기 위하여 dwell time을 변화시키는 경우도 있다. 예를들면, 狀態 i에서의 dwell time이 다른 狀態보다 2배이고, hit와 miss의 確率이 p_i, q_i라 하면 플로우그래프에서 狀態 i로부터 나가는 가지의 加重値를 $p_i z^2$ $q_i z^2$로 표시해야 한다. 狀態에 따라 파라미터들이 다른 경우를 解析하려면 이와같은 方法으로 플로우그래프를 작성해야 한다.

受信側에서 同期의 與否를 판단하기 위해서는 correlator 回路가 필요하다. Correlator 回路는 送信側으로부터 받은 PN코드와 受信側의 local reference로 마련된 PN코드 사이의 correlation을 dwell time T 동안 계산한다. 이 값이 미리 정해진 threshold level을 넘으면 同期가 맞은 것으로 판단하여 hit가 되고, 그렇지 않으면 miss가 된다. 예를들어, 時間T동안 correlation을 취할 수 있는 PN코드의 bit수를 m이라 하고, t개 以上의 bit가 일치해야 hit되도록 threshold level을 정한다면 한 bit가 일치될 確率이 p_b일 때 hit의 確率 p는

$$P=\sum_{i=t}^{m}\binom{m}{i}p_b^{i}(1-p_b)^{m-i} \qquad (1)$$

이 된다. 판단을 정확하게 하려면 T를 충분히 길게 하고, threshold level을 적절하게 정해야 한다. 그런데, T를 길게하면 速度가 늦어지므로, error의 確率이 설계상의 허용범위를 벗어나지 않는 한 T를 짧게 하는 것이 유리하다. 그러므로, lock mode에 관련된 確率分布를 알면 dwell time이나 threshold level을 결

정하는데 큰 도움이 될 것이다.

Ⅲ. 同期 維持 時間 確率分布의 誘導

狀態 i에서 n段階 後에 狀態 j로 遷移하는 確率을 離散確率函數 $P_{ij}(n)$으로 定義한다. 이때 $P_{ij}(n)$의 發生函數 $P_{ij}(z)$는 다음 式으로 定義된다.

$$P_{ij}(z) \triangleq \sum_{n=0}^{\infty} z^n p_{ij}(n) \qquad (2)$$

$P_{ij}(z)$는 플로우그래프에서 狀態 i와 狀態 j 사이의 傳達函數와 같다는 사실이 증명되어 있다.[3] $P_{ij}(n)$은 (2)式에 대한 $P_{ij}(z)$의 역변환인데, $p_{ij}(z)$의 n계 導函數를 계산하여 얻을 수도 있으나 p, q, N에 대한 일반적인 式을 얻기 위하여 本 論文에서는 $P_{ij}(z)$를 급수전개하여 z^n의 계수를 계산하면 $P_{ij}(n)$을 얻을 수 있음에 착안하였다.

그림 2의 LOCK 1에서 REJECT까지의 傳導函數를 P(z)라 하고, n段階 後에 lock를 잃어버릴 確率을 p(n)이라 하면 P(z)는 p(n)의 發生函數이다.

그림 2 (a)에 Mason定理[4],[5]를 적용하면

$$P(z) = \frac{q^N z^N}{1-P^z \sum_{i=0}^{n-1} q^i z^i} \qquad (3)$$

이고, 이 式을 급수전개하면(附錄 I 참조)

$$P(z) = q^N z^N (1-qz) \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{a=0}^{r} \binom{r}{a} (-pq^N)^a \, z^{r+Na} \qquad (4)$$

이 된다. 여기서,

$$H(z) \triangleq \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{a=0}^{r} \binom{r}{a} (-pq^N)^a z^{r+Na} \qquad (5)$$

라 하고 H(z)에서 z^k의 계수를 h(k)라 하면 h(k)는

$$r+Na=k \qquad (6)$$

를 만족하는 項들의 계수 合이다. (5)式에서 r과 a의 변화 범위는

$$r \geq 0, \quad 0 \leq a \leq r \qquad (7)$$

이므로 h(k)는 (6), (7)式을 만족하는 a, r의 정수값에 대하여 생각해야 한다. 이 부분을 그림 3에 實線으로 圖示하였다.

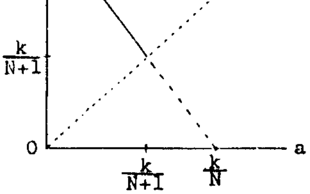


그림 3. a, r의 변화범위 설명도

Fig. 3. Variation range diogram of a, r.

a의 변화 범위는 0에서 k/(N+1)사이이고, 일단 a가 정해지면 r은 (6)式으로부터 k−Na로 주어진다. 이와같이 반드시 a를 먼저 정해야 함에 주의해야 한다. 만일 r을 먼저 정하면 (6)式을 만족하는 a의 정수값이 存在하지 않을 수도 있다. 따라서 h(k)는

$$h(k) = \begin{cases} \sum_{a=0}^{\lfloor \frac{k}{N+1} \rfloor} \binom{k-Na}{a} (-pq^N)^a, & k \geq 0 \\ 0, & k < 0 \end{cases} \qquad (8)$$

이 된다. 여기서 기호 $\lfloor X \rfloor$는 X의 정수부분을 나타낸다. 이제 (4)式을 살펴보면 z^n의 계수 p(n)은 H(z)로 定義된 부분에서 z^{n-N}과 z^{n-N-1}의 계수로 표현될 수 있다. 즉,

$$P(n) = q^N[h(n-N) - qh(n-N-1)] \qquad (9)$$

이 된다. 이것으로 그림 1 (a)에 대한 確率分布를 구하였다.

이 결과의 妥當性을 검토하기 위하여 N이 3인 경우의 몇 가지 간단한 例들에 대하여 그림 1 (a)와 그림 2 (a)로부터 가능한 경로를 생각하여 얻은 결과와 (8), (9)式으로부터 계산된 결과를 비교한다.

그림 1 (a)와 그림 2 (a)를 살펴보면 LOCK 1 으로부터 REJECT되려면 최소한 3개의 段階가 필요함을 알 수 있다. 따라서 p(0), p(1), p(2)는 모두 0이다. p(3)는 3번 연속하여 miss되는 경우이므로 q^3이고, p(4)는 처음에 한 번 hit되고 다음 3번 연속으로 miss되는 경우이므로 pq^3이다. p(5)는 처음 두 번 연속하여 hit되고 다음 3번 연속으로 miss되는 경우와 처음에 한 번 miss되어 LOCK 2로 진행한 다음 한 번 hit되어 다시 LOCK 1으로 되돌아 온 후 3번 연속으로 miss되는 경우가 있으므로 $p^2q^3+pq^4$이 된다. p(6)도 같은 요령으로 가능한 경로를 생각하면 $p^3q^3+2p^2q^4+pq^5$이 된다.

한편, (8)式으로부터 h(−3), h(−2), h(−1)은 0이고, h(1), h(1), h(2), h(3)은 1이다. 이때 (9)式으로부터 p(0), p(1), p(2)는 0이고, p(3)는 q^3이며, p(4), p(5), p(6)는 q^3-q^4이 된다.

p는 1−q임을 생각하면 이 두 가지 결과들은 모두 일치한다. 여기서는 매우 간단한 例들을 생각하였는데 보다 복잡한 例에 대하여도 같은 방법으로 두 결과가 일치함을 설명할 수 있다. 이렇게 (9)式의 타당성을 확인할 수 있다.

그림 2 (b)의 경우에는 일반적인 N에 대하여 P(z)를 closed-from으로 표현할 수 없다. 그러나 N 값이 정해지면 同一한 方法으로 解析할 수 있다. 여기서는 전형적인 경우로서 N이 3인 경우에 대하여 解析하였

다. 이때 P(z)는

$$P(z) = \frac{q^3 z^3}{1-pz-2pqz^2+p^2qz^3} \tag{10}$$

이고, 이 式을 급수전개하면(附錄 II 참조)

$$P(z) = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{a=0}^{r} \sum_{b=0}^{r-a} (-1)^a 2^b \frac{r!}{a!\,b!\,(r-a-b)!} \cdot p^{r+a} q^{a+b+3} z^{r+2a+b+3} \tag{11}$$

이 된다. z^n의 계수 p(n)은 (11)式에서

$$r+2a+b+3=n \tag{12}$$

을 만족하는 項들의 계수 合이다. (11)式에서 a, b, r 의 변화범위는

$$a+b \le r,\ 0 \le a \le r,\ 0 \le b \le r \tag{13}$$

이다. 그림 4 는 (13)式의 제한 영역 内에서 (12)式이 나타내는 平面을 圖示한 것이다. 이 중에서 a, b, r이 모두 정수인 점들만을 생각해야 한다. a−r 平面과의 교선의 방정식은 b=0을 (12)式에 代入하여

$$r+2a+3=n \tag{14}$$

이 되고, r=a+b인 平面과의 교선의 방정식은 (12)式과 연립하여 b를 소거하면

$$2r+a+3=n \tag{15}$$

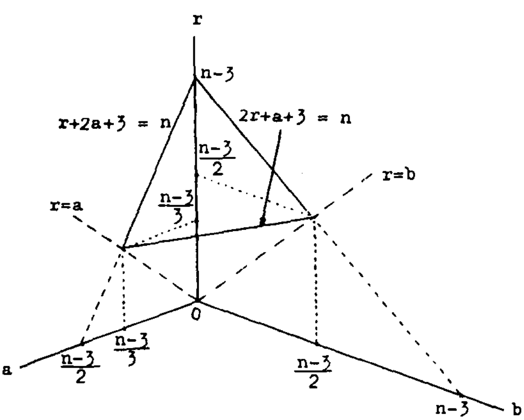


그림 4. a, b 및 r의 변화범위 설명도
Fig. 4. Variation range diagram of a, b and r.

이 된다. 그리고, 각 꼭지점들의 좌표를 구하여 그림 4에 기입하였다.

a, b, r의 변화 범위를 생각하면 먼저 r이 (n−3)/3에서 (n−3)/2의 범위에 있을 때 a의 범위는 (15)式과 (14)式으로부터 (n−2r−3)에서 (n−r−3)/2임을 알 수 있다.

이때 b는 (12)式으로부터 (n−r−2a−3)이다. 다음, r이 (n−3)/2에서 (n−3)의 범위에 있을 때 a의 범위는 0에서 (n−r−3)/2이고, b는 역시 (n−r−2a−3)이다.

이상의 결과를 종합하여 (11)式의 계수로부터 p(n)을 구하면

$$p(n) = \sum_{r=\frac{n-4}{3}+1}^{\frac{n-3}{2}} \sum_{a=n-2r-3}^{\frac{n-r-3}{2}} (-1)^a 2^{n-r-2a-3} \cdot \frac{r!}{a!\,(n-r-2a-3)!\,(2r+a-n+3)!} p^{r+a} q^{n-r-a}$$
$$+ \sum_{r=\frac{n-3}{2}+1}^{n-3} \sum_{a=0}^{\frac{n-r-3}{2}} (-1)^a 2^{n-r-2a-3} \cdot \frac{r!}{a!\,(n-r-2a-3)!\,(2r+a-n+3)!} \cdot p^{r+a} q^{n-r-a} \tag{16}$$

(단, $n \ge 5$)

이 된다. (16)式은 表現方法의 問題로 $n \ge 5$인 경우에만 성립한다.

(11)式을 살펴보면 z의 차수가 3보다 작게되는 a, b, r의 값은 存在하지 않는다. 이것은 그림 1 (b)와 그림 2 (b)에서 N이 3이므로 LOCK 1으로부터 REJECT 될 때까지 최소한 3개의 段階가 필요한 사실과 일치한다. 따라서

$$p(1) = p(1) = p(2) = 0 \tag{17}$$

이다. p(3)은 (11)式에서 z^3의 계수이며 a, b, r이 모두 0인 경우이므로

$$p(3) = q^3 \tag{18}$$

이다. 이것은 LOCK 1에서 3번 연속하여 miss 되는 경우를 나타낸다. p(4)는 (11)式에서 z^4의 계수이며 a와 b가 0이고 r이 1인 경우이므로

$$p(4) = pq^3 \tag{19}$$

이다. 이것은 LOCK 1에서 1번 hit되고 다음 3번 연속으로 miss되는 경우를 나타낸다. 이것으로 그림 1 (b)의 시스템에 대한 完全한 確率分布를 구하였다.

(16)式의 妥當性을 검토하기 위하여 p(5)와 p(6)를 그림 1 (b)와 그림 2 (b)에서 가능한 경로를 생각하여 얻은 결과와 (16)式으로부터 계산된 결과를 비교한다. 5 段階만에 로크를 벗어나는 경우를 살펴보면 LOCK 1에서 연속하여 2번 hit되고 다음 3번 연속으로 miss되는 경우의 確率이 p^2q^3이고, LOCK 1에서 miss 되어 LOCK 2로 진행한 다음 1번 hit되어 다시 LOCK 1으로 되돌아 온 후 3번 연속으로 miss되는 경우의 確率이 pq^4이고, LOCK 1에서 2번 miss되어 LOCK 3까지 진행한 다음 1번 hit되어 LOCK 2로 되돌아 온 後 2번 연속으로 miss되는 경우의 確率이 pq^4이다. 따라서 p(5)는 $p^2q^3+2pq^4$이다. 또한, 6段階 만에 로크를 벗어나는 경우를 살펴보면 LOCK 1에서 연속하여 3번 hit되고 다음 3번 연속으로 miss되는 경우의 確率이 p^3q^3이고, LOCK 1에서 1번 hit된 後 1

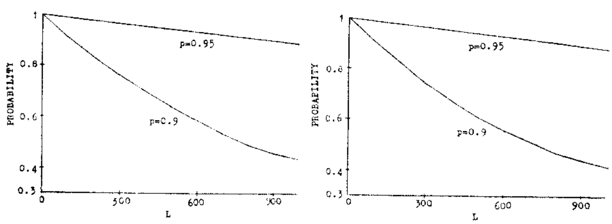
번 miss되어 LOCK 2로 진행한 다음 다시 hit 되어 LOCK 1으로 되돌아 온 後 3번 연속으로 miss 되는 경우의 確率이 p^2q^4이고, LOCK 1에서 1번 hit된 後 2번 miss되어 LOCK 3으로 진행한 다음 hit되어 LOCK 2로 되돌아온 後 2번 연속으로 miss되는 경우의 確率이 p^2q^4이고, LOCK 1에서 1번 miss 되어 LOCK 2로 진행한 다음 hit되어 되돌아 와 1번더 hit 된 後 3번 연속으로 miss되는 경우의 確率이 p^2q^4이다. 따라서 p(6)는 $p^3q^3+3p^2q^4$이다. 한편, (16)式으로부터 p(5)와 p(6)를 計算하면 同一한 결과를 얻을 수 있다. 다른 예에 대하여도 두 결과가 일치함을 설명할 수 있으며 이렇게 하여 (16)式의 妥當性을 확인할 수 있다.

Ⅳ. 數値的인 計算例

N이 3일 때 여러가지 p 값에 대하여 確率分布를 計算하였다. Hold-in time을 解析하는 경우에는 L段階까지 lock를 잃지 않고 通信을 계속할 수 있을 確率이 의미가 있는데 이 確率은

$$1-\sum_{n=0}^{L} p(n) \tag{20}$$

이다. 그림 5에 이 確率을 나타내었다. 그림 5 (a), (b)는 각각 그림 1 (a), (b)의 시스템에 대한 計算 결과이며 p는 P_D이다.



(a) (b)

그림 5. 同期가 맞았을 때 hold-in time의 확률
Fig. 5. Probability of hold-in time for correct synchronization.

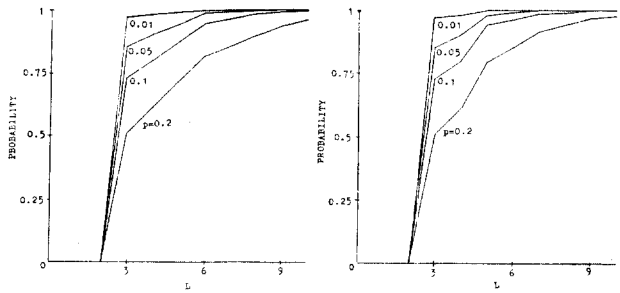
False lock 狀態를 벗어나는 時間을 解析하는 경우에는 L단계 이전에 로크를 벗어나는 確率이 의미가 있는데 이 確率은

$$\sum_{n=0}^{L} p(n) \tag{21}$$

이며 그림 6은 이 確率을 나타낸 것이다. 그림 6 (a), (b)는 각각 그림 1 (a), (b)에 대한 결과이며 P는 P_{FA}이다.

Ⅴ. 結 論

擴散 스펙트럼 通信方式의 tracking과정에서 lock



(a) (b)

그림 6. 同期가 맞지 않았을때 false lock를 벗어나는 시간의 확률
Fig. 6. Probability of the time to reject false lock for imcorrect synchronization.

狀態를 벗어나는 時間의 確率分布를 시스템 파라미터 p, q, N으로 주어지는 일반적인 式으로 表現할 수 있었다.

數値的인 計算例를 통하여 hold-in time이 충분히 維持되려면 p가 큰 값을 가져야 하고, 신속히 false lock를 벗어나려면 p값이 작아야함을 확인하였다(그림 5, 6).

원하는 성능을 가진 시스템에 대한 p, q, N의 값을 알 수 있게 함으로써 그 시스템의 dwell time이나 threshold level을 결정하기 위한 자료로 活用될 수 있을 것이다. 本 論文의 結果式은 매우 일반적이어서 여러가지 형태의 시스템에 有用하게 적용된다.

주변의 여러가지 상황(예를들면 페이딩 現像, multiple access, 防害信號의 存在 등)에 대하여 옳게 檢出할 確率 p_D, 혹은 false alarm이 發生할 確率 p_{FA}를 計算하여 hit의 確率 p를 결정하면 그에 따라 miss의 確率 q도 결정되어 로크 狀態를 벗어나는 時間의 確率分布를 計算할 수 있다.

本 論文에서 시도한 方法은 다른 시스템이나 다른 確率變數의 分布를 구할 때에도 응용될 수 있을 것이다.

附 錄 Ⅰ

$$\sum_{i=0}^{N-1} q^i z^i = \frac{1-q^N z^N}{1-qz} \tag{22}$$

$$p+q=1 \tag{23}$$

인 관계들을 (3)式에 적용하여 정돈하면 다음과 같다.

$$P(z)=\frac{q^N z^N(1-qz)}{1-z+pq^N z^{N+1}} \tag{24}$$

일반적으로 $|R|<1$인 수렴역에 대하여

$$\frac{1}{1-R}=\sum_{r=0}^{\infty} R^r \tag{25}$$

임에 착안하면 (5)식을 다음과 같이 급수 전개할 수 있다.

$$P(z)=q^N z^N(1-qz)\sum_{r=0}^{\infty} z^r(1-pq^N z^N)^r \qquad (26)$$

단, 수렴역은 $|z-pq^N z^{N+1}|<1$ 이다. (26)式을 더 전개하기 위하여 binomial theorem을 이용하면

$$P(z)=q^N z^N(1-qz)\sum_{r=0}^{\infty} z^r\sum_{a=0}^{r}\binom{r}{a}(-pq^N z^N)^a \qquad (27)$$

이므로 (4)式을 얻을 수 있다.

附 録 II

(10)式은 $|pz+2pqz^2-p^2qz^3|<1$ 인 수렴역에 대하여

$$P(z)=q^3z^3\sum_{r=0}^{\infty}(pz+2pqz^2-P^2qz^3)^r \qquad (28)$$

이 된다. (15)식의 괄호 안을 전개하기 위하여 다음 사실을 이용한다. 일반적으로

$$(x+y+u)^r=\sum\frac{r!}{a!\,b!\,c!}x^a y^b u^c \qquad (29)$$

이며 $\sum$는 a, b, c가 $a+b+c=r$이 되는 음이 아닌 모든 정수에 대하여 합한 것을 나타낸다. 이때 a의 변화 범위는 0에서 r까지이고, 일단 a가 정해지면 b의 변화 범위는 0에서 $r-a$까지이고, a와 b가 정해지면 c는 $r-a-b$로 주어진다. 그러므로 (29)式은 다음과 같이 변형된다.

$$(x+y+u)^r=\sum_{a=0}^{r}\sum_{b=0}^{r-a}\frac{r!}{a!\,b!\,(r-a-b)!}\cdot x^a y^b u^{r-a-b} \qquad (30)$$

x, y, u를 각각 $-p^2qz^3$, $2pqz^2$, pz로 생각하면 (30)式을 이용하여 (28)式을 (11)式과 같이 전개할 수 있다.

參 考 文 献

[1] R.C. Dixon, *Spread Spectrum Systems.* Wiley, New York, pp. 177-214, 1976.

[2] P.M. Hopkins, "A unified analysis of pseudonoise synchronization by envelope correlation," *IEEE Trans. Commun.*, vol. COM-25, no.8, pp.770-778, Aug. 1977.

[3] J.K. Holmes and C.C. Chen, "Acquisition time performance of PN spread-spectrum systems," *IEEE Trans. Commun.*, vol. COM-25, no.8, pp. 778-783, Aug. 1977.

[4] S.J. Mason, "Feedback theory: Some properties of signal flow graphs," *Proc. IEEE*, vol. 41, no.9, Sep. 1953.

[5] S.J. Mason, "Feedback theory: Further properties of signal flow graphs," *Proc. IEEE*, vol. 44, no. 7, July 1956.