論 文
33～10～3

時間領域 Routh簡略化法에 의한 準最適制御에 관한 研究

On Suboptimal Control Via Routh Approximation Method in Time Domain

朴 鍾 健*・金 聖 中**
(Jong-Keon Park・Sung-Joong Kim)

Abstract

This paper presents a method of using simplified models for deriving suboptimal controllers to the original higher-order systems. Routh approximation method is a very useful technique for reducing the order of a linear systems. This method dose not require a knowlege of system eigenvalues and eigenvectors and possesses many desirable features such as preservation of reduced order model stability and minimum computational requirements. These properties are utilized to derive suboptimal controllers in this paper. In order to implement these controllers on the original system, the relationship between the state vectors of the original system and the reduced order models is required. A procedure for evaluating an approximate aggregation matrix is also developed.

A numerical example is given for the illustration of this method, which is compared with the existing Modal aggregation method in the resultant figures.

1. 緖 論

현대사회는 점점 복잡하여저서 電力系統이나, 大都市 交通網, 情報通信網, 重工業自動生産系統, 上下水道 水資源系統, 國家經濟시스템, 自然의 生態系統등은 이제 과거의 制御理論만으로는 도저히 解析 및 처리할 수 없을 정도로 大規模化했다.[1)~3)] 특히 새로운 設計技術의 개발이 심각하게 요구된 중요한 원인의 하나는 이 大規模 시스템에 대한 最適制御理論의 직접적인 적용이, 시스템 모델의 次数가 커짐에 따른 計算上의 문제로, 불가능하게 되었기 때문이다.[4),5)] 線形調節器나 追跡 問題에 있어서의 最適設計 問題는 결국 Riccati 行列方程式을 푸는 問題로 귀착된다. 그러나 그 制御 시스템의 次数가 높아짐에 따라, 그 Riccati 行列方程式의 非線形 微分 聯立方程式의 수는 幾何級数的으로 增加하여 컴퓨터의 計算容量을 넘게 되거나, 또는, 너무나 많은 컴퓨터의 使用 時間을 요구하게 된다.[6)] 이에 대한 해결책으로는 시스템의 媒介変数의 攝動에 의한 近似最適設計方法, 그리고 状態変数의 分割에 의한 準最適設計方法, 시스템 모델의 次数를 줄임에 의한 準最適設計方法등이 있다.[6),7)] 이 마지막 방법에 있어서 시스템 모델의 次数를 줄이는 方法에는, 時間領域에서의 방법으로 Modal 集成法, 連分法, 連鎖集成法 등이 있으며, 周波数領域에서의 방법으로는 連分法, 모멘트 整合法, Padé 簡略化法, Routh 簡略化法 등이 있는데, 이 Routh 簡略化法이 計算量, 컴퓨터 利用, 安定度, 多変数系에의 응용등의 여러 면에서 그 長点이 높이 評價되어 왔다.[8),9)] 그후 S. V. Rao 팀에 의해 周波数領域 Routh 簡略化法이 갖는 長點들을 그대로 가지고 있는 時間領域 Routh 簡略化法이 발표되었다.[10)~14)]

본 논문에서는 이러한 장점을 가지고 있는 時間領域 Routh 簡略化法을 準最適制御 問題에 적용하는 방법에 대하여 考察하여 集成行列 (Aggregation Matrix)과 縮小모델에 의한 Riccati 方程式 및 準

*正 會 員：全南大 工大 電気工学科 教授
**正 會 員：全北大 工大 電気工学科 副教授
接受日字：1984年 8月 1日

最適制御法則을 구하는 方法을 提示하고, 数値的인 例를 들어, 그동안 많이 사용되어 온 E. J. Davison의 Modal 集成法[15]에 의한 準最適制御 方法과 비교하여, 그 우수성을 나타내고서 한다.

2. 時間領域 Routh簡略化法

M. Hutton 과 B. Friedland에 의하여, 大規模 시스템 모델에서 次数가 크면 클 수록 구하기가 대단히 어려운 固有値의 計算을 필요로 하지 않으며, 시스템 모델의 安定度가 보장되는 周波数領域 Routh 簡略化法이 발표되었다.[8] 그러나 準最適制御器를 設計하고, 準最適制御法則을 얻는 데에 縮小모델을 이용하기 위하여는, 時間領域 縮小모델을 구할 필요가 있다.[11] 그리고 準最適制御를 위하여는 原 시스템의 状態變数와 縮小모델의 状態變数間의 관계식이 대단히 중요하다.[5] 이 관계식은 E. J. Davision 의 Modal 集成法에 의하여 구할 수도 있으나, 이 방법은 시스템의 固有値와 固有벡터를 구해야 하는 큰 불편을 안고 있다. Y. Shamash 의 混合法은 Routh 簡略化法과 Padé 簡略化法을 이용하였는데, 計算이 너무 복잡하고, Routh 簡略化法이 갖는 여러 가지 장점을 잃게 되는 결점이 있다.[16),17)]

S. V. Rao 팀은 위의 결점을 보완하여, 固有値나 固有벡터의 計算이 필요 없고, 安定한 시스템의 安定性이 縮小모델에서도 보장되고, 컴퓨터에 의한 계산이 간편하고, 縮小모델의 次数 變更이 容易하며, 原 시스템의 状態變数들과 縮小모델의 状態變数들 間의 관계식이 集成行列(Aggregation Matrix)에 의하여 간단히 주어지는 時間領域 Routh 簡略化法을 발표하였다.

어떤 線形 時不變系가 다음과 같이 표시된다고 자.

$$\dot{x} = Ax + Bu \tag{1}$$

$$y = Ex \tag{2}$$

여기서 x는 n 次 (설명의 簡便을 위하여 奇数次라고 가정) 状態벡터, u와 y는 스칼라량이라고 하고, A는 $n \times n$ 係数行列, B와 E는 적당한 次元의 係数行列이다. 이 시스템이 可制御性을 갖는다고 하면, 위의 (1) 식은 일반적으로 位相變数標準形이라고 하여도 모순이 없다.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \cdots\cdots 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \cdots\cdots 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \cdots\cdots 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \cdots\cdots \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 \cdots\cdots 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & -a_{n-3} \cdots -a_1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

위의 (1), (2) 식을 다음(3), (4) 식으로 변형시키는 線形變換 $v = Px$ 를 생각해 보자.

$$\dot{v} = Hv + Mu \tag{3}$$

$$y = E_1 + E_1 v \tag{4}$$

단, $H = PAP^{-1}$ 그리고 $M = PB$, $E_1 = EP^{-1}$

이 때 變換行列 P를 표 1 의 Routh 표를 이용하여 다음과 같이 정하면,

$$\begin{pmatrix} a_0^1 & 0 & a_2^1 & 0 & \cdots & a_{n-2}^1 & 0 & 1 \\ 0 & a_0^2 & 0 & a_2^2 & \cdots & 0 & a_{n-2}^2 & 0 \\ 0 & 0 & a_0^3 & 0 & \cdots & a_{n-4}^3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

표 1. Routh 표

Table 1. Routh table

$\gamma_1 = \frac{a_0^0}{a_0^1}$	$a_0^0 = a_n$	$a_2^0 = a_{n-2}$	$a_4^0 = a_{n-4}$	……	$a_{n-2}^0 = a_3$	$a_n^0 = a_1$
$\gamma_2 = \frac{a_0^1}{a_0^2}$	$a_0^1 = a_{n-1}$	$a_2^1 = a_{n-3}$	$a_4^1 = a_{n-5}$	……	$a_{n-2}^1 = a_2$	$a_n^1 = 1$
$\gamma_3 = \frac{a_0^2}{a_0^3}$	$a_0^2 = a_2^0 - \gamma_1 a_2^1$	$a_2^2 = a_4^0 - \gamma_1 a_4^1$	$a_4^2 = a_6^0 - \gamma_1 a_6^1$	……	$a_{n-2}^2 = a_1 - \gamma_1$	
	$a_0^3 = a_2^1 - \gamma_2 a_2^2$	$a_2^3 = a_4^1 - \gamma_2 a_4^2$	$a_4^3 = a_6^1 - \gamma_2 a_6^2$	……	$a_{n-2}^3 = 1$	
	………	………	………			
	………	………	………			
$\gamma_{n-1} = \frac{a_0^{n-2}}{a_0^{n-1}}$	$a_0^{n-2} = a_2^{n-4} - \gamma_{n-3} a_2^{n-3}$	$a_2^{n-2} = 1$				
$\gamma_n = \frac{a_0^{n-1}}{a_0^n}$	$a_0^{n-1} = a_2^{n-3} - \gamma_{n-2}$					
	$a_0^n = 1$					

$$P = \begin{pmatrix} \cdot & 0 & 0 & a_0^4 & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 0 & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & 0 & a_0^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdot & \cdot & 1 \end{pmatrix} \tag{5}$$

H와 M은 각각 (6), (7)식과 같이 된다.

$$H = \begin{pmatrix} -\gamma_1 & 0 & -\gamma_3 & 0 & -\gamma_5 & \cdots & -\gamma_n \\ 0 & 0 & \gamma_3 & 0 & \gamma_5 & \cdots & \gamma_n \\ -\gamma_1 & -\gamma_2 & -\gamma_3 & 0 & -\gamma_5 & \cdots & -\gamma_n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma_5 & \cdots & \gamma_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ -\gamma_1 & -\gamma_2 & -\gamma_3 & -\gamma_4 & -\gamma_5 & \cdots & -\gamma_n \end{pmatrix} \tag{6}$$

$$M = [\, 1 \;\; 0 \;\; 1 \;\; 0 \;\; \cdots \;\; 1 \,]^T \tag{7}$$

原 시스템 보다 次数가 낮은 ℓ次의 縮小모델을 다음과 같이 표시하자.

$$\dot{z} = Fz + Gu \tag{8}$$

$$y_R = Lz \tag{9}$$

단,

$$F = C_1 H C_1^T \tag{10}$$

$$G = C_1 M \tag{11}$$

$$L = E_1 C_1^T \tag{12}$$

$$z = C_1 v \tag{13}$$

여기서 $C_1 = [\, I_l : 0 \,]_{l \times n}$, I_l은 $\ell \times \ell$ 單位行列이다. 原 시스템의 狀態變数들과 縮小모델의 狀態變数들의 관계를 정하여 주는 集成行列 C는 다음과 같이 주어진다.

$$z = C_1 v = C_1 P x$$

$$C = C_1 P \tag{14}$$

3. 縮小모델에 의한 準最適制御

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(0) = x_0 \tag{15}$$

$$J = \frac{1}{2} \int_0^\infty (x^T(t) Q x(t) + u^T(t) R u(t)) dt \tag{16}$$

(16)식과 같은 評價函数를 갖는 (15)식의 時不變系를 생각해 보자. 여기서 A와 B, x, u는 각각 $n \times n$, $n \times m$, n, m次의 狀態係数行列, 制御係数行列, 狀態벡터, 制御벡터이고, Q와 R은 $n \times n$ 準正則行列, $n \times m$ 正則行列이다.

일반적으로 最適制御 문제는 評價函数를 最小로 하면서 初期狀態 x_0를 最終狀態 $x(\infty) = 0$로 만드는 定常制御法則 $u^*(t)$를 구하는 것이다. 소위 狀態調器 (State Regulator)라고 불리워지는 (15), (16)식의 시스템에 대한 最適定常制御法 $u^*(t)$는 다음과 같이 표시된다.

$$u^*(t) = -R^{-1} B^T K x(t) \tag{17}$$

여기서 K는 다음 (18)식의 Riccati 代数行列方程式

$$KA + A^T K - KBR^{-1} B^T K + Q = 0 \tag{18}$$

을 만족하는 $n \times n$ 對稱正則行列로서, 이 解를 구하기 위하여서는 최소한 $\frac{1}{2} n (n+1)$개의 非線形聯立方程式을 풀어야 한다. 따라서 n값이 클 경우는 대단히 많은 계산을 要하게 된다. 따라서 이 문제를 해결하기 위하여 縮小모델을 사용하게 된다. 그 ℓ次 縮小모델의 狀態方程式을 다음과 같이 표시하고,

$$\dot{z}(t) = Fz(t) + Gu(t), \quad z(0) = z_0 \tag{19}$$

集成行列을 C라고 하면, 앞의 (17), (18)식은 다음의 (20), (21)식과 같이 바꾸어 표시된다.

$$u_l(t) = -R^{-1} G^T K_l z(t) \tag{20}$$

$$F^T K_l + K_l F - K_l G R^{-1} G^T K_l + Q_l = 0 \tag{21}$$

단, $Q_l = (C C^T)^{-1} C Q C^T (C C^T)^{-1}$ (22)

그러므로 準最適制御法則은 다음과 같이 구해진다.

$$u_l(t) = -R^{-1} G^T K_l C x(t) \tag{23}$$

4. 適用 例

앞에서 考察한 時間領域 Routh 簡略化法을 이용한 準最適制御 設計方法을 P. Sannuti (1969)와 S. S. Lamba (1974)가 각각 생각했던 그림 1과 같은 5次 開루우프系에 적용해 보자.

이 시스템의 狀態方程式은 다음과 같이 된다.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.2 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.5 & 1.6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -14.28 & 85.71 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -25 & 75 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} +$$

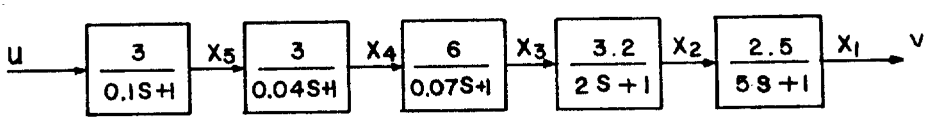

그림 1. 5次 開루우프制御系

Fig. 1. The 5th order open loop control system

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 30 \end{bmatrix} u \tag{24}$$

評價函数를 (25)식과 같이 정하고,

$$J = \frac{1}{2} \int_0^\infty (0.1\, x_1^2 + 0.01\, x_3^2 + 0.01\, x_5^2 + u^2)\, dt \tag{25}$$

이 경우의 3次 縮小모델에 의한 準最適制御法則을 구해 보자.

주어진 状態方程式 (24)식을 位相變数標準型으로 바꾸고 앞의 (5), (6)식에 의하여 P, H를 구하면,

$$P = \begin{bmatrix} 0.506 & -0.053 & 0.155 & -0.533 & 1 \\ -0.055 & 0.39 & -0.116 & 0.664 & 0 \\ -0.056 & -0.051 & 0.15 & -0.533 & 1 \\ 1.44\times10^{-4} & 1.68\times10^{-3} & -0.104 & 0.594 & 0 \\ 1.41\times10^{-4} & -1.73\times10^{-5} & 0.033 & -0.533 & 1 \end{bmatrix} \tag{26}$$

$$H = \begin{bmatrix} -0.139 & 0 & -5.31 & 0 & -44.54 \\ 0 & 0 & 5.31 & 0 & 44.54 \\ -0.139 & -0.645 & -5.31 & 0 & -44.54 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 44.54 \\ -0.139 & -0.645 & -5.31 & -16.89 & -44.54 \end{bmatrix} \tag{27}$$

이 된다.

原 시스템에 대한 3次의 Routh 簡略化 縮小모델의 状態方程式을 구해 보면, 앞의 (10), (11)식에 의해

$$F = \begin{bmatrix} -0.139 & 0 & -5.31 \\ 0 & 0 & 5.31 \\ -0.139 & -0.645 & -5.31 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad (28)\ (29)$$

로 되고 集成行列 C는 (14)식으로 부터 다음과 같이 구해진다.

$$C = \begin{bmatrix} 0.506 & -0.053 & 0.155 & -0.533 & 1 \\ -0.055 & 0.39 & -0.116 & 0.664 & 0 \\ -0.056 & -0.051 & 0.15 & -0.533 & 1 \end{bmatrix} \tag{30}$$

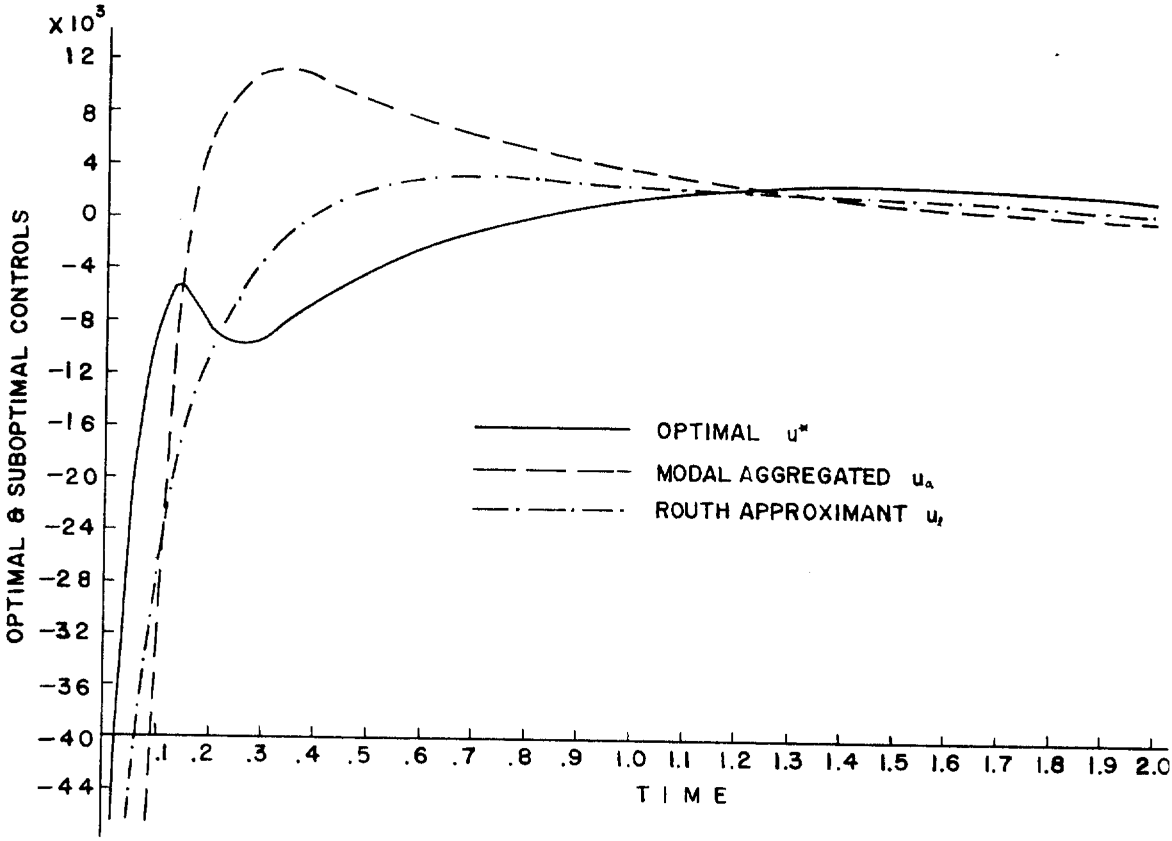

그림 2. 最適制御 및 準最適制御法則

Fig. 2. Optimal and suboptimal control response

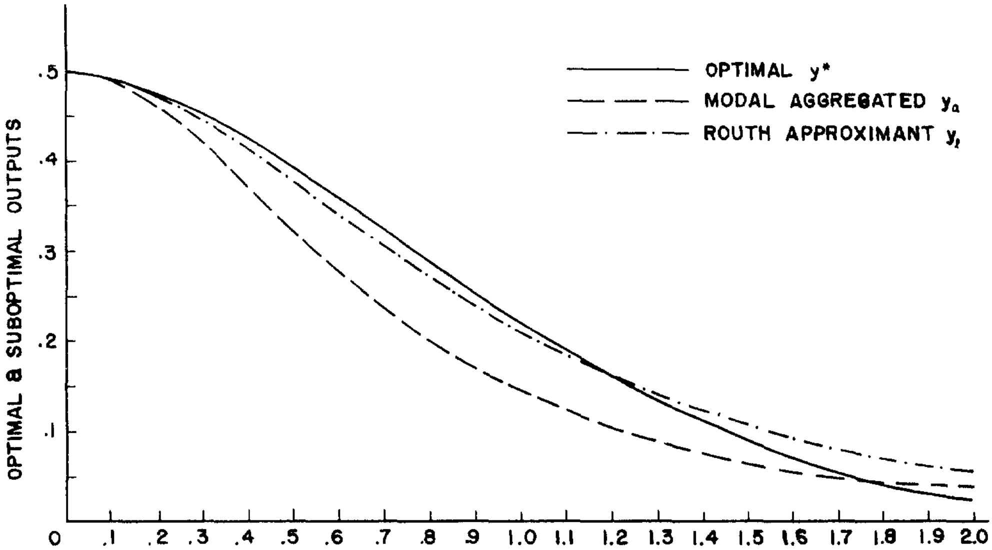

그림 3. 最適制御및 準最適制御의 出力應答
Fig. 3. Optimal and suboptimal output response

(22)식으로 부터 Q_l을 구하면,

$$Q_l = \begin{bmatrix} 0.30899 & 0.02619 & -0.2993 \\ 0.02619 & 0.00525 & -0.02068 \\ 0.2993 & -0.02068 & 0.29835 \end{bmatrix} \tag{31}$$

가 된다.

위에서 구한 F, G, Q_l값 그리고 R = 1을 (20), (21)식에 代入하여 컴퓨터에 의하여[18], Riccati 方程式을 풀어서 利得(Gain) S를 구했다.

$$S = [\,0.3401 \quad 0.3763 \quad -0.0782\,] \tag{32}$$

따라서 時間領域 Routh 簡略化法에 의한 準最適制御 u_l은 다음과 같이 얻어진다.

$$\begin{aligned} u_l &= -Sz \\ &= -SCx \\ &= -[\,0.3401 \quad 0.3763 \quad -0.0782\,] \begin{bmatrix} 0.506 & -0.053 & 0.155 & -0.533 & 1 \\ -0.055 & 0.39 & -0.116 & 0.664 & 0 \\ -0.056 & -0.051 & 0.15 & -0.533 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} \\ &= -0.2033\,x_1 - 0.1197\,x_2 - 0.0119\,x_3 \\ &\quad -0.0602\,x_4 - 0.3558\,x_5 \end{aligned} \tag{33}$$

이 결과는 原 시스템의 最適制御[19]

$$u^* = -0.26\,x_1 - 0.11\,x_2 - 0.04\,x_3 - 0.15\,x_4 - 0.59\,x_5 \tag{34}$$

와 비교하여 볼 때 대단히 만족스러운 것이며, 그동안 準最適制御에 많이 사용되어 온, 優勢固有値들 (Domiant eigenvalues)을 이용한 E. J. Davison의 Modal 集成法에 의한 準最適制御[19]

$$u_a = -0.60\,x_1 - 0.27\,x_2 - 0.0288\,x_3 - 0.096\,x_4 - 0.67\,x_5 \tag{35}$$

와 비교하여 보기 위하여 初期狀態를 $x(0) = (\,0.5 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0\,)^T$, 그리고 出力을 $y(t) = x_1(t)$로 하였을 때의 最適制御및 準最適制御, 그리고 出力을 각각 그림 2, 3에 나타내어 보았다. 두 그림에서 보는 바와 같이, Routh 簡略化法에 의한 準最適制御가 Davison의 Modal 集成法에 의한 方法보다 월등하게 우수함을 알 수 있다.

또한 컴퓨터 HP-1,000을 이용하여 5次의 原 시스템 모델의 Riccati方程式을 푸는데 27분 4초의 시간이 소요되었으나, 3次의 縮小모델의 경우 겨우 25초가 소요되었으며, 原 시스템 모델의 固有値는 -0.2, -0.5, -10, -14.28, -25인데 본 Routh 簡略化法에 의한 縮小모델의 固有値는 -0.2, -0.499, -4.749로서, 優勢固有値(dominant eigen-value)들을 그대로 포함하고 있으며 安定함을 알 수 있다.

5. 結　論

本 論文에서는 시스템의 縮小모델을 구하는 方法으로서 많은 長點을 가지고 있는 時間領域 Routh

簡略化法을 準最適制御 設計問題에 적용하는 방법에 대하여 考察하였다.

数値的 例로 5次 開루우프制御系에 적용하여 본 結果, 그동안 많이 사용하고 있던 Davison의 Modal 集成法 보다 우수한 特性을 가지고 있음을 나타냈다. 또한 컴퓨터 시뮬레이숀의 간편함과 계산의 간단함에 비하여, 대단히 만족스러운 準最適制御法則을 구할 수 있는 長點을 나타내었다.

大規模 시스템에 대한 관심과 研究의 필요성이 날로 높아가고 있는 상황 아래서, 本 論文의 研究가 大規模 시스템의 準最適制御設計에 보탬이 되리라고 생각한다.

한편 本 論文의 방법에 의하여 얻어진 準最適制御系의 전체 安定性은 보장되지 않으며, 이에 관하여 앞으로 더욱 研究되어야 한다. 그리고 이 Routh 簡略化法을 多變数系에 적용하는 方法이나, 縮小모델 觀測子의 設計에 이용하는 方法 등에 대하여도 앞으로 研究가 있어야 할 것으로 생각된다.

参 考 文 獻

1) M. Jamshidi, "An overview on the aggregation of large-scale systems", IFAC Proc. of the 8-th Triennial Congress, Vol. 2, PP. 1304-1314, 1981.

2) M. G. Singh and A. Titli, Handbook of Large Scale Systems Engineering Applications, North-Holland, 1979, pp. 20

3) 권욱현, 이종수, "大規模 시스템 研究 動向", 전기학회지, Vol. 33, No. 3, March 1984.

4) P. Sannuti and P. V. Koktovic, "Near-Optimum Design of Linear Systems by a Singular Perturbation Method", IEEE Trans. Aut. Cont., vol. AC-14, pp. 15-21, February 1969.

5) S. S. Lamba and S. V. Rao, "on Suboptimal Control via the Simplified Model of Davison", IEEE Trans. Aut. Cont., vol. AC-19, pp. 448-450, August 1974.

6) S. V. Rao and S. S. Lamba, "Suboptimal control of linear systems via simplified models of Chidambara", Proc. IEEE, vol. 121, pp. 879-881, August 1974

7) M. Jamshidi, Large-Scale Systems : Modeling and Control, North-Holland, 1983, pp. 274

8) M. Hutton and B. Friedland, "Routh Approxomations for Reducing Order of Linear, Time-Invariant Systems", IEEE Trans. Aut. Cont., vol. AC-20, pp. 329-337 June 1975.

9) M. Jamshidi, Large-Scale Systems: Modeling and Control, North-Holland, 1983, pp. 75-79.

10) M. F. Hutton, "Routh Approximations in State Space", Proc. 8th Annual Pittsburg Conference, pp. 311-315, April 1977.

11) A. S. Rao, S. S. Lamba and S. V. Rao, "Routh-approximant time domain reduced-order models for single-input single-output systems", Proc. IEEE, vol. 125, pp. 1059-1063, October 1978.

12) A. S. Rao, S. S. Lamba and S. V. Rao, "On Simplification of Unstable Systems Using Routh Approximation Technique", IEEE Trans. Aut. Cont. vol. AC-23, pp. 943-944, October 1978.

13) A. S. Rao, S. S. Lamba and S. V. Rao, "Application of Routh Approximant Method for Reducing the Order of a Class of Time-Vary Systems", IEEE Trans. Aut. Cont., vol. AC-25, pp. 110-113, February 1980.

14) S. V. Rao, "Structural Properties of Routh Approximation Method", Proc. JACC, Charlottesville, Va, June 1981.

15) E. J. Davison, "A method for Simplifying Linear Dynamic Systems", IEEE Trans. Aut. Cont., vol. AC-11, pp. 93-101, January 1966.

16) Y. Shamash, "Stable reduced-order models using Padé-type approximation", IEEE Trans. Aut. Cont., vol. AC-19, pp. 615-617, October 1974.

17) Y. Shamash, "Model reduction using the Routh stability criterion and the Padé approximation techniuqe", Int. J. Contr. vol. 21, pp. 475-484, 1975.

18) J. L. Melsa and S. K. Jones, Computer Programs for Computational Assistance in the Study of Linear Control Theory, McGraw-Hill, 1973, pp. 6-11

19) M. Jamshidi, Large-Scale Systems: Modeling and Control, North-Holland, 1983, pp. 278.