확률 적응 제어에서의 최소 자승법에 관한 연구

論 文
33～9～6

A Study on the Least Squares Method in Stochastic Adaptive Controls

梁 海 元*
(Hai -Won Yang)

Abstract

This paper discusses on the stochastic adaptive control which uses a least squares method in the parameter adaptation law. Especially we study on the reason why existing methods have adopted modified least squares methods. After examining the performances of these methods for time-varying systems, we propose a new method to deal with such a situation, study on the stability problem, and finally show the effectiveness of the method with a computer simulation example.

1. 서 론

대부분의 제어 이론은 대상 시스템의 특성을 나타내는 수학적 모델이 주어진 것으로 가정하고 있다. 그러나 실제 응용에 있어서 시스템의 특성을 충실하게 표현하는 모델을 구하는 것, 즉 identification은 쉽지 않으며, 또한 제반 요인에 의하여 시스템의 특성이 바뀌게 되면 다시 identification을 하여야 한다. 이러한 문제에 착안하여 발전되어 온 것이 적응 제어 이론이다. 즉, 시스템의 특성을 나타내는 수학적 모델을 끊임없이 개선하면서 적절한 제어기의 파라메타를 결정하거나 혹은 직접 제어기의 파라메타를 수정하는 방식을 일컫는다.

최근의 적응 제어 이론을 크게 분류하면 Self Tuning Regulator (STR)와 Model Reference Adaptive Control (MRAC)으로 나눌 수 있다. STR은 확률적 잡음의 영향을 최소로 줄이려는 것이며, MRAC는 대상 시스템의 출력을 기준 신호에 일치시키려는 것으로서 주로 deterministic 시스템을 대상으로 한다. MRAC에 있어서의 잡음의 영향에 관하여는 요즈음 활발하게 연구되고 있으며 특히 Goodwin[1], Landau[2], Moore[3] 등의 연구가 대표적이라 할 수 있다. 이들이 제안한 방식들은 모두 종래의 최소 자승법을 수정한 것으로서 파라메타 적응 법칙에서의 이득 행렬의 계산 방식에서 차이가 있지만 그 성능에 있어서는 별로 다를 바 없다.

한편 적응 제어의 기본 취지인 시스템의 특성이 서서히 변화하는 경우에는 위의 세가지 방식 모두 그다지 만족스럽지 못한 성능을 보이고 있다. 그러므로 본 논문에서는 새로운 방식을 도입하여 예제를 통한 computer simulation에 의하여 그 유효성을 보여 주고 또한 안정성에 관하여 고찰하기로 한다.

2. 확률 시스템에 대한 적응 제어방식

선형 시불변 유한 차원 단일 입출력 시스템이 다음과 같은 Autoregressive Moving Average (ARMA)의 형태로 기술된다고 가정한다.

$$A(q^{-1})\,y(t) = q^{-1}B(q^{-1})\,u(t) + C(q^{-1})\,w(t) \qquad (1)$$

단 $\{y(t)\}$, $\{u(t)\}$ 및 $\{w(t)\}$는 각각 시스템의 출력, 입력 및 잡음을 나타내며, $A(q^{-1})$ $B(q^{-1})$ 및 $C(q^{-1})$는 단일 지연 연산자 q^{-1}의 다항식으로

$$A(q^{-1}) = 1 + a_1 q^{-1} + \cdots + a_n q^{-n} \qquad (2)$$

$$B(q^{-1}) = b_1 + b_2 q^{-1} + \cdots + b_m q^{-(m-1)} \qquad (3)$$

$$C(q^{-1}) = 1 + c_1 q^{-1} + \cdots + c_l q^{-l} \qquad (4)$$

이다. $\{w(t)\}$는 확률 공간 (Ω, B, P)에서 정의된 martingale difference sequence으로서 σ－

---

*正 會 員：明知大 工大 電氣工學科 助敎授・工博
接受日字：1984年 8月 1日
이 논문은 1983년도 문교부 학술 연구 조성비에 의하여 연구되었음.

algebra F_t를 발생시킨다. 여기서 $\{w(t)\}$에 대한 가정으로서

1) $E\{w(t) \mid F_t\} = 0 \quad a.s.$ (5)

2) $E\{w(t)^2 \mid F_t\} = \sigma^2 \quad a.s.$ (6)

3) $\lim_{N\to\infty} \sup \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N} w(t)^2 < \infty \quad a.s.$ (7)

으로 하며, $A(q^{-1})$, $B(q^{-1})$ 및 $C(q^{-1})$의 계수와 σ^2은 미지이며 오직 $\{u(t)\}$와 $\{y(t)\}$ 만을 얻을 수 있는 것으로 한다.

한편 대상 시스템에 대하여는

1) n, m, l 의 상한은 알고 있다.

2) C(z), B(z)의 영점은 모두 단위원 밖에 있다.

을 가정한다.

이상과 같은 조건에서 피이드백 제어기를 구성하여 시스템을 안정시키며, 또한 $\{y(t)\}$가 어떤 유계인 기준 신호 $\{y^*(t)\}$에 최소한의 오차를 갖고 따라 가도록 하는 것이 우리의 목적이다. 즉

$$\lim_{N\to\infty} \sup \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N} y(t)^2 < \infty \tag{8}$$

$$\lim_{N\to\infty} \sup \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N} u(t)^2 < \infty \tag{9}$$

$$\lim_{N\to\infty} \sup \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N} E\{[y(t)-y^*(t)]^2 \mid F_{t-1}\}$$
$$= \sigma^2 = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} E\{w(t)^2 \mid F_{t-1}\} \tag{10}$$

단 $y^*(t)$는 기준 신호이며 시각 t에서 $y^*(t+1)$은 알 수 있는 것으로 한다.

만일 다항식 $A(q^{-1})$, $B(q^{-1})$ 및 $C(q^{-1})$의 계수를 알고 있으면 잘 알려진 바와 같이 다음과 같은 식에 의하여 최소 분산 제어기의 구성이 가능하다. 즉

$$C(q^{-1})[y(t+1) - w(t+1)]$$
$$= [C(q^{-1}) - A(q^{-1})]\, y(t+1) + B(q^{-1})u(t)$$
$$\triangleq \alpha(q^{-1})\, y(t) + B(q^{-1})\, u(t) \tag{11}$$

그리고 기준 신호 $\{y^*(t)\}$는 유계 즉

$$|y^*(t)| < M < \infty \qquad t \geq 0 \tag{12}$$

이라고 가정한다.

이 때의 적응 제어 알고리즘은 다음과 같다.

$$\theta = [\alpha_1, \cdots, \alpha_{n'}, b_1, \cdots, b_m, c_1, \cdots, c_l]^T \tag{13}$$

$$\phi(t-1) = [y(t-1), \cdots, y(t-n'), u(t-1), \cdots, u(t-m), -\bar{y}(t-1), \cdots, -\bar{y}(t-l)]^T \tag{14}$$

$$n' = max(n, l)$$

$$\bar{y}(t) = \phi(t-1)^T \theta(t) \tag{15}$$

한편 시각 t에서의 입력 즉 $u(t)$는

$$\phi(t)^T \theta(t) = y^*(t+1) \tag{16}$$

에 의하여 구해진다. 여기서 파라메타 적응 법칙에서의 이득 행렬을 구하는 방법으로서 다음의 네가지 방식을 들 수 있다.

a) Landau[2] 의 방식

$$\theta(t) = \theta(t-1) + \frac{P(t-1)\phi(t-1)}{1+\phi(t-1)^T P(t-1)\phi(t-1)} [y(t) - \phi(t-1)^T \theta(t-1)] \tag{17}$$

$$P(t) = P(t-1) - \frac{\lambda(t) P(t-1)\phi(t-1)\phi(t-1)^T P(t-1)}{1+\lambda(t)\phi(t-1)^T P(t-1)\phi(t-1)}$$

$$P(0) > 0 \tag{18}$$

$$0 < \lambda(t) < 2$$

b) Goodwin[1] 의 방식

$$\theta(t) = \theta(t-1) + \frac{P(t-1)\phi(t-1)}{1+\phi(t-1)^T P(t-1)\phi(t-1)} [y(t) - \phi(t-1)^T \theta(t-1)] \tag{19}$$

$$P'(t) = P(t-1) - \frac{P(t-1)\phi(t-1)\phi(t-1)^T}{1+\phi(t-1)^T P(t-1)} \frac{P(t-1)}{\phi(t-1)} \tag{20}$$

$$\bar{r}(t) = \bar{r}(t-1)[1+\phi(t-1)^T P(t-1)\phi(t-1)] \tag{21}$$

i) $\bar{r}(t)\lambda max P'(t) \leq K, \quad 0 < K < \infty$

$$P(t) = P'(t) \tag{22}$$

ii) $\bar{r}(t)\lambda max P'(t) > K$

$$P(t) = \frac{K}{\bar{r}(t)\lambda max P'(t)} P'(t) \tag{23}$$

단 $\lambda max(\cdot)$는 행렬 $(\cdot)$의 최대 고유치를 의미하며 이것 대신에 계산하기 편리한 trace$(\cdot)$ 을 써도 무방하다.

c) Moore[3] 의 방식

$$\theta(t)=\theta(t-1)+\frac{P(t-1)\,\phi(t-1)}{\frac{1}{r(t)}+\phi(t-1)^{T}P(t-1)\,\phi(t-1)}$$

$$[y(t)-\phi(t-1)^{T}\theta(t-1)] \qquad (24)$$

$$P(t)=P(t-1)-\frac{P(t-1)\,\phi(t-1)\,\phi(t-1)^{T}}{\frac{1}{r(t)}+\phi(t-1)^{T}P(t-1)}$$

$$\frac{P(t-1)}{\phi(t-1)} \qquad (25)$$

여기서 $r(t)$는 다음과 같이 결정된다.

$$\Gamma(t)\triangleq\phi(t-1)^{T}P(t-1)\,\phi(t-1) \qquad (26)$$

$$\bar{r}(t)=\begin{cases}1 & ;\ \Gamma(t)\leq\frac{\bar{K}}{t}\\ \frac{C}{\sqrt{r(t)}} & ;\ \Gamma(t)>\frac{\bar{K}}{t}\end{cases} \qquad (27)$$

$$\bar{K}\gg 1\ ,\quad C>0$$

$$r(t)=\sum_{j=1}^{t}\|\phi(j-1)\|^{2}$$

$$r_1(t)=max(t,\ r_t) \qquad (28)$$

$$r(t)=min\{\bar{r}(t)\,r_1(t)^{-\varepsilon}\ ,\ r(t-1)\},$$

$$0<\varepsilon\ll 1 \qquad (29)$$

d) 본 논문에서 제안하는 방식

$$\theta(t)=\theta(t-1)+\frac{P(t-1)\,\phi(t-1)}{1+\phi(t-1)^{T}P(t-1)\,\phi(t-1)}$$

$$[y(t)-\phi(t-1)^{T}\theta(t-1)] \qquad (30)$$

$$P(t)=\frac{1}{\lambda_1(t)}[P(t-1)-\frac{\lambda_2(t)P(t-1)\,\phi(t-1)}{\lambda_1(t)+\lambda_2(t)\,\phi(t-1)^{T}}$$

$$\frac{\phi(t-1)^{T}P(t-1)}{P(t-1)\,\phi(t-1)}] \qquad (31)$$

또는

$$P(t)^{-1}=\lambda_1(t)\,P(t-1)^{-1}+\lambda_2(t)\,\phi(t-1)\,\phi(t-1)^{T} \qquad (32)$$

$$0<\lambda_1(t)<1\ ,\ 0<\lambda_2(t)<2$$

3. 안정 및 수렴성 해석

b), c)의 방식에 대하여는 제어 목적인 식 (8), (9), (10)이 모두 만족되는 것이 증명되어 있지만 a), d)의경우는 아직 해결이 되지 못한 부분이 남아 있으며 여기서 그것에 관하여 고찰하기로 한다.

파라메타 $\theta(t)$의 적응 법칙에 이용되는 출력 오차

$$v_0(t)=y(t)-\phi(t-1)^{T}\theta(t-1) \qquad (33)$$

을 사전 출력 오차라고 하며 이에 대하여

$$v(t)=y(t)-\phi(t-1)^{T}\theta(t) \qquad (34)$$

를 사후 출력 오차라고 한다. 지금 $h(t)$를

$$h(t)=h(t-1)+\lambda_2(t)\,\phi(t-1)^{T}\phi(t-1) \qquad (35)$$

과 같이 정의하면

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{t=1}^{N}\frac{[v(t)-w(t)]^{2}}{h(t)}<\infty \quad a.s. \qquad (36)$$

은 증명이 가능하지만, Goodwin[1] 의 방법에 따라 시스템의 모든 신호가 유계 즉 시스템이 안정인 것을 보이기 위하여는

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{t=1}^{N}\frac{[v_0(t)-w(t)]^{2}}{h(t)}<\infty \quad a.s. \qquad (37)$$

가 요구된다. 그러나

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{t=1}^{N}\frac{[v_0(t)-w(t)]^{2}}{h(t)}$$

$$=\lim_{N\to\infty}\sum_{t=1}^{N}\frac{[v_0(t)-v(t)+v(t)-w(t)]^{2}}{h(t)}$$

$$\leq\lim_{N\to\infty}\sum_{t=1}^{N}\left\{\frac{2[v_0(t)-v(t)]^{2}}{h(t)}+\frac{2[v(t)-w(t)]^{2}}{h(t)}\right\}$$

파라메타의 적응 법칙으로 부터

$$=\lim_{N\to\infty}\sum_{t=1}^{N}\left\{\frac{2[\phi(t-1)^{T}P(t-1)\,\phi(t-1)]^{2}v(t)]^{2}}{h(t)}\right\}$$

$$+\lim_{N\to\infty}\sum_{t=1}^{N}\frac{2[v(t)-w(t)]^{2}}{h(t)} \qquad (38)$$

이다. 따라서 만일 $\Gamma(t)=\phi(t-1)^{T}P(t-1)\,\phi(t-1)$ 이 유계라면 식 (36) 으로 부터 식 (37)을 얻을 수가 있지만, a), d)의 방식으로는 이러한 조건을 만족시킬 수 없기 때문에 b), c) 에서와 같이 수정된 최소 자승법이 사용된 것이다.

한편 d)의 방식은 $\Gamma(t)$가 유계이어야 한다는 면에서는 이 때의 $P(t)$가 a)에서의 $P(t)$보다 크기 때문에 약간 불리하다. 결국 현재로서는 a), d) 의

방식이 주어진 제어 목적을 완전하게 달성한다고 할 수 없으므로 이 문제에 관하여는 앞으로 계속 연구되어야 할 것이다. 그러나 원래의 최소 자승법을 deterministic 시스템이 적용하여 제어 목적을 달성[4] 할 수 있으므로 만일 확률 시스템의 입출력 신호가 전반적으로 증가하여 잡음의 영향이 상대적으로 감소되어 deterministic 시스템으로 간주될 수 있을 것으므로 지금 제기된 것과 같은 불안정한 현상은 일어나지 않을 것으로 추측된다.

4. Simulation 예제

대상의 시스템은

$$(1+q^{-1}+q^{-2})\,y(t) = (2q^{-1}+q^{-2})\,u(t) + (1+0.1\,q^{-1}+0.1\,q^{-2})\,w(t) \qquad (39)$$

이며 $\{w(t)\}$ 는 N (0 , 1) 인 Gaussian 잡음이다. 기준 신호 $\{y^*(t)\}$ 는 주기가 100 이고 크기가 ±10 인 구형파이다. 한편 시스템의 특성이 변화하는 경우에 대한 성능을 알아보기 위하여 파라메타의 적응이 어느 정도 되어진 $t=330$에서 시스템이

$$(1+0.9\,q^{-1}+0.9\,q^{-2})\,y(t) = (2.2\,q^{-1}+1.1q^{-2})\,u(t) + (1+0.1\,q^{-1}+0.1\,q^{-2})w(t) \qquad (40)$$

으로 바뀌는 경우를 고찰하였다. 이 때 20 종류의 다른 잡음에 대하여 출력 오차에 관한

$$\sum_{j=t-99}^{t} [y(j) - y^*(j)]^2 \qquad (41)$$

의 평균값이 $t=100, 200, \cdots, 1000$ 에 대하여 표 1에 나타내어져 있다. 표 1에서 알 수 있는 바와 같이 d)의 방식이 시스템의 특성이 바뀌는 경우에 우수한 성능을 갖고 있다. 본 simulation 에서 쓰인 여러 상수들의 값은 다음과 같다.

표 1. 네가지 방식의 비교 $\sum_{j=t-99}^{t}[y(j)-y^*(j)]^2$

Table 1. Comparison of the four methods

t	a)	b)	c)	d)
100	762.6	719.4	763.3	763.9
200	101.2	101.6	101.2	101.8
300	101.1	101.7	101.1	102.0
400	671.6	678.7	674.2	550.6
500	586.0	585.5	585.8	350.8
600	546.6	542.8	546.8	177.4
700	521.5	523.9	522.9	113.9
800	434.1	435.8	436.2	110.6
900	414.2	417.7	416.7	104.2
1000	379.4	379.2	381.9	101.9

$$P(0) = 1000\,I\ ,\ \theta(0) = [0, 0, 1, 0, 0, 0]^T$$
$$K = 100000\ ,\ \bar{K} = 10000\ ,\ C = 100$$
$$\varepsilon = 0.0001\ ,\ \bar{r}(0) = 1/6000 \qquad (42)$$
$$\lambda(t) = \lambda_1(t) = \lambda_2(t) = 0.99$$

여기서 simulation 결과로 부터 얻어진 몇가지 사항을 열거하기로 한다.

1) b), c)의 방식에서 $\bar{K}$, K의 값이 작은 경우에는 별로 성능이 좋지 않으며, 어느 정도 이상의 값으로 선정할 필요가 있다.

2) b) 방식에서 $P'(t)$의 최대 고유치를 구하는 것은 계산 시간도 문제이지만 시각 t 가 커지면 점차 고유치가 작아지기 때문에 수치적으로 문제가 생길 염려가 있으므로 trace 를 쓰는 것이 바람직하다.

3) b), c)의 방식에서 $\bar{r}(t)$ 및 $r(t)$는 시간에 따라 점차 커지는 양으로서 실제로 implement 할 때 주의를 요하게 된다.

4) a), b), c) 방식들은 모두 이득 행렬 $P(t)$가 점차 감소하게 되므로 운전중에 시스템의 특성이 변화할 때에는 $\theta(t)$의 개선을 하는데에 어려움이 있을 것이므로 이러한 면에서는 $P(t)$의 크기를 어느 정도 유지하게 되는 d)의 방식이 가장 유리하다. 다만 a)의 방식과 마찬가지로 안정성에 관한 이론적인 보장이 아직 미해결로 남아 있다.

5. 결 론

본 논문에서는 확률 적응 제어에 있어서 최소 자승법이 왜 수정되어야 했는가에 대하여 고찰하였으며, 또한 시스템의 특성이 변화할 경우에 대한 대책으로서 새로운 방식을 제시하였다. 다만 현재로서는 완전한 이론적인 뒷받침은 되어 있지 않으므로 이 점에 관하여는 앞으로 더욱 연구되어야 할 것이다.

참 고 문 헌

1) K. S. Sin and G. C. Goodwin; "Stochastic adaptive control using a modified least squares algorithm", Automatica, vol. 18, no. 3, pp. 315

—321, 1982.

2) I. D. Landau; "Near supermartingales for convergence analysis of recursive identification and adaptive control schemes", Int. J. Control, vol. 35, no. 2, pp. 197—226, 1982.

3) R. Kumar and J. B. Moore; "Convergence of adaptive minimum variance algorithms via weighting coefficient selection", IEEE Trans. Automat. Contr., vol. AC—27, no. 1, pp. 146-153, 1982.

4) G. C. Goodwin, P. J. Ramadge and P. E. Caines; "Discrete time multivariable adaptive control", IEEE Trans. Automat. Contr., vol. AC—25, pp. 449—456, 1980.