離散時間 非 最小位相 시스템의 直接適應 極配置 및 安定度에 관한 硏究

論 文
33～5～5

Direct Adaptive Pole-Placement and Stability of Discrete-time Non-minimum Phase Systems

崔 悰 鎬* · 崔 鎭 栄**
(Jong-Ho Choi · Jin-Young Choi)

Abstract

This paper presents a direct adaptive pole placement control scheme which is applicable to discrete-time non-minimum phase systems. It is proved that by this scheme the poles can be placed at the desired locations and the overall state vector of the system is uniformly bounded if the reference input is sufficiently rich, and also proved that in case of insufficiently rich reference input the overall system can still be stabilized though the poles may not be placed exactly at the desired locations. The effectiveness of this scheme is verified by digital computer simulations.

1. 序 論

傳達函数가 未知하거나 時間에 따라 서서히 變하는 시스템을 制御하기 위한 適應制御理論에 대한 硏究가 1970년대 후반부터 활발히 進行되어 왔는데 적응제어에 대한 대표적 論文들에서는 플랜트가 最小位相(Minimum phase) 이어야 한다는 條件이 있다. 최소위상이란 傳達函数중 分子의 根이 모두 安定한 領域에 있어야 한다는 것인데 모르는 시스템을 制御하는데 最小位相인지를 알아야 하는 것은 큰 制約이다. 이러한 制約條件에 대해 최근 Elliot [1] 가 連續時間 비 최소위상 시스템에 대해 入力의 周波数 成分이 充分할 때 Bezout Identity를 써서 제어기 媒介變数를 찾아 極配置하는 直接適應 극배치 方法을 提示했으나 전체 시스템이 安定하다는 證明을 하지 않았고 Choi [2] 가 碩士學位 論文으로 Elliot [1] 가 제시한 연속시간 직접 적응 극배치 제어기를 Steepest descent 方法으로 제시하고 전체 안정도에 관하여 硏究하였다. 또한 거의 모든 適應制御에 대한 논문 들에는 입력의 周波数 成分이 충분해야 한다는 條件이 있는데 이는 모르는 시스템을 제어하므로 매개 변수들을 식별해야 되기 때문이다. 그러나 레귤레이션문제에서와 같이 입력의 주파수 成分이 不充分한 경우가 실제 많으므로 적용에 문제가 따른다.

本 論文에서는 非 最小位相 시스템에 대해서 Elliot [1] 가 제시한 방법을 離散時間인 경우에 提示하고 이 방법에 의해서 基準入力의 周波数 성분이 充分히 많을 때 전체 시스템을 安定하게 하며 願하는 위치에 極을 配置시킬 수 있음을 證明하였다. 또한 制御分野에서 가장 일반적인 문제인 레귤레이션 問題에서 종종 부딪히게 되는 입력의 周波数 성분이 충분치 못한 경우에 정확히 願하는 위치에 極을 배치시킬 수는 없더라도 전체 시스템을 安定化 시킴을 證明하고 이들 증명에 대한 妥當性을 계산기 시뮬레이션으로 實證하였다.

2. 問題의 定義

未知의 플랜트가 非 最小位相 시스템

$$p(z)\,y(k) = r(z)\,u(k) \qquad (2\text{-}1)$$

로 주어지고 $y(k)$와 $u(k)$는 플랜트의 출력과 입력, $p(z)$과 $r(z)$은 서로 소인 多項式으로서 次

---

*正 会 員 : 서울大 工大 制御計測工学科 助教授 · 工博
**正 会 員 : 韓国電気通信研究所 研究員
接受日字 : 1984年4月3日

数는 n과 $m(n \geq m)$이고 $p(z)$의 최고차 係数가 1이다. (2－1)式을 고처쓰면 다음과 같다.

$$p(z)\ s(k) = u(k)$$
$$y(k) = r(z)\ s(k) \qquad (2-2)$$

임의의 n次 安定한 多項式 $q(z)$을 정의하고 다음의 제어기를 構成한다.

$$q(z)\ w(k) = a(z)\,y(k) + b(z)\,u(k)$$
$$u(k) = w(k) + u_r(k) \qquad (2-3)$$

여기서 $u_r(k)$는 有限한 기준입력이고 $q(z)$, $a(z)$, $b(z)$은 다음 형태의 다항식이다.

$$q(z) = \sum_{i=0}^{n} q_i z^{n-i} \qquad (2-4)$$
$$a(z) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i z^i$$
$$b(z) = \sum_{i=0}^{n-1} b_i z^i$$

(2－3)의 제어기를 포함한 閉 루프 시스템은

$$(q(z)\,p(z) - a(z)\,r(z) - b(z)\,p(z))s(k) = q(z)\,u_r(k)$$
$$y(k) = r(z)\,s(k) \qquad (2-5)$$

이 되는데 (2－5)의 閉 루프 시스템이 願하는 극배치가 이루어저 전달함수가 $r(z)/p_d(z)$이 될 때의 $a(z)$, $b(z)$을 $a^*(z)$, $b^*(z)$라 하면

$$a^*(z)\,r(z) + b^*(z)\,p(z) = q(z)\,(p(z) - p_d(z)) \qquad (2-6)$$

이 成立되고 $p(z)$과 $r(z)$이 서로 소이면 유일한 $a^*(z)$과 $b^*(z)$이 存在한다.[4] 이때 $p_d(z)$, $a^*(z)$, $b^*(z)$은 다음 형태의 多項式이다.

$$p_d(z) = z^n + \sum_{i=1}^{n} \bar{p}_i\ z^{n-i}$$
$$a^*(z) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i^* z^i$$
$$b^*(z) = \sum_{i=0}^{n-1} b_i^* z^i \qquad (2-7)$$

$p(z)$과 $r(z)$을 알면 (2－6)로 부터 $a^*(z)$과 $b^*(z)$을 구할 수 있는데 모르는 경우에는 $a(z)$와 $b(z)$을 適應推定해야 하므로 (2－3)을고처 쓰면 $y(k)$와 $u(k)$로 부터

$$q(z)\,\tilde{y}(k) = y(k),\quad \tilde{y}_i(k) = z^i\,\tilde{y}(k),\quad 0 \leq i \leq n-1$$
$$q(z)\,\tilde{u}(k) = u(k),\quad \tilde{u}_i(k) = z^i\,\tilde{u}(k),\quad 0 \leq i \leq n-1$$
$$u(k) = \sum_{i=0}^{n-1} [a_i(k)\tilde{y}_i(k) + b_i(k)\tilde{u}_i(k)] + u_r(k) \qquad (2-8)$$

이 되는데 $a_i(k)$와 $b_i(k)$가 $k \to \infty$에 따라 a_i^*와 b_i^*로 収斂하여願하는 極配置가 이루어 지도록 적응 制御器를 構成하고 전체 시스템이 안정됨을 증명하고자 한다. 또한 입력의 周波数 成分이 不充分할 때의 安定度에 관해 연구한다. 전체 시스템 구조는 그림(2－1)과 같다.

3. 直接適應極配置 (Direct adaptive pole placement)方法의 提示

제어기 媒介變数 $\theta_a^T(k) = [a_0(k), \cdots\cdots, a_{n-1}(k)]$, $\theta_b^T(k) = [b_0(k), \cdots\cdots, b_{n-1}(k)]$를 적응

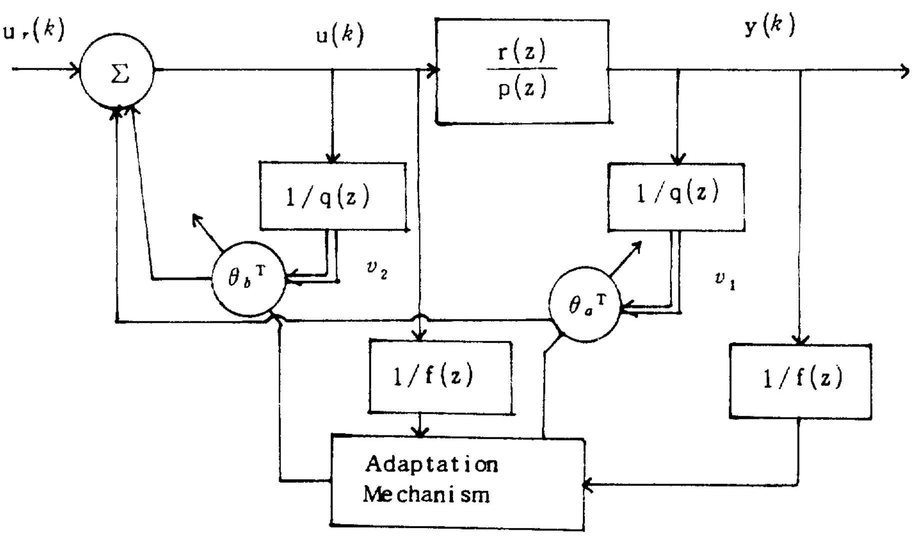


그림 2－1. 적응극배치 제어시스템

추정하기 위해 Bezout Identity를 사용하는데 $p(z)$과 $r(z)$가 서로 소이면 Bezout Identity

$$c^*(z)\,r(z)+d^*(z)\,p(z)=1 \quad (3-1)$$

여기서 $c^*(z)=\sum_{i=0}^{n-1} c_i^* z^i$, $d^*(z)=\sum_{i=0}^{n-1} d_i^* z^i$,

을 만족하는 $c^*(z)$와 $d^*(z)$가 유일하게 존재한다.[4] (3-1)을 (2-5)에 적용하면

$$a^*(z)\,r(z)+b^*(z)\,p(z)=q(z)\,[p(z)-(c^*(z)\,r(z)+d^*(z)\,p(z))\,p_d(z)] \quad (3-2)$$

이 되는데 $u(k)$와 $y(k)$를 $3n$차 안정다항식 $f(z)$을 통해 얻은 状態 벡터로 부터 $a^*(z)$, $b^*(z)$, $c^*(z)$, $d^*(z)$을 直接推定할 수 있으며 $a^*(z)$와 $b^*(z)$를 制御器構成에 사용한다. $\bar{u}(k)$, $\bar{y}(k)$와 $\bar{s}(k)$를

$$f(z)\,\bar{u}(k)=u(k)$$
$$f(z)\,\bar{y}(k)=y(k)$$
$$f(z)\,\bar{s}(k)=s(k) \quad (3-3)$$

으로 정의하고 (2-2)式의 양변에 $f(z)$을 나누고 (3-3)을 적용하면

$$p(z)\,\bar{s}(k)=\bar{u}(k)+\varepsilon_1(k)$$
$$\bar{y}(k)=r(z)\,\bar{s}(k)+\varepsilon_2(k) \quad (3-4)$$

이 되는데 ε_1과 ε_2는 필터 $f(z)$을 통할 때 零이 아닌 初期値에 의한 오차항인데 $f(z)$은 安定 多項式이므로 指数函数的으로 감소하는 項이다. (3-2)에 $\bar{s}(k)$를 곱하고 (3-4)를 이용하면

$$a^*(z)\,\bar{y}(k)+b^*(z)\,\bar{u}(k)=q(z)\,\bar{u}(k)-c^*(z)\,q(z)\,p_d(z)\,\bar{y}(k)-d^*(z)\,q(z)\,p_d(z)\,\bar{u}(k)+\varepsilon_3(k) \quad (3-5)$$

이 되며 ε_3는 ε_1과 ε_2로부터 생기는 항으로 마찬가지로 指数函数的으로 減少한다. 제어기 媒介變数의 참값 θ^*와 벡터 $\bar{x}(k)$를

$$\theta^{*T} \triangleq [a_0^*, \cdots\cdots, a_{n-1}^*, b_0^*, \cdots\cdots, b_{n-1}^*, c_0^*, \cdots\cdots, c_{n-1}^*, d_0^*, \cdots\cdots, d_{n-1}^*] \quad (3-6)$$

$$\bar{x}^T \triangleq \frac{1}{f(z)}[(1, z, \cdots\cdots, z^{n-1})\,y(k), (1, z, \cdots\cdots, z^{n-1})\,u(k), (1, z, \cdots\cdots z^{n-1})\,q(z)\,p_d(z)\,y(k), (1, z, \cdots\cdots, z^{n-1})\,q(z)\,p_d(z)\,u(k)] \quad (3-7)$$

로 정의하면 (3-5)는

$$\theta^{*T}\,\bar{x}(k)=q(z)\,\bar{u}(k)+\varepsilon_3(k) \quad (3-8)$$

로 나타낼 수 있으며 識別誤差 $\varepsilon(k)$를 (3-8)에서 θ^*를 推定値 $\theta(k)$로 대신했을 때의 誤差

$$\varepsilon(k)=q(z)\,\bar{u}(k)-\theta^T(k)\,\bar{x}(k) \quad (3-9)$$

로 定義하고 이에 대해 目的函数를

$$E(\theta, k)=\sum_{j=0}^{k} \alpha^{k-j}[q(z)\,\bar{u}(j)-\bar{x}^T(j)\,\theta]^2 \quad (3-10)$$

로 하고 이 目的函数를 최소로 하는 θ를 $\theta(k)$로 나타내면 다음의 Recursive 형태의 式이 成立한다.[5]

$$\theta(k)=\theta(k-1)+A(k)[q(z)\,\bar{u}(k)-\bar{x}^T(k)\,\theta(k)] \quad (3-11)$$

$$A(k)=P(k-1)\,\bar{x}(k)/[\alpha+\bar{x}^T(k)\,P(k-1)\,\bar{x}(k)] \quad (3-12)$$

$$P(k)=\frac{1}{\alpha}\left[P(k-1)-\frac{P(k-1)\,\bar{x}(k)\,\bar{x}^T(k)\,P(k-1)}{[\alpha+\bar{x}^T(k)\,P(k-1)\,\bar{x}(k)]}\right] \quad (3-13)$$

단, $0<\alpha\le 1$, $P(k)$: $4n\times 4n$, $\theta(k)$: $4n\times 1$, $A(k)$: $4n\times 1$ 여기서 구해진 $\theta(k)$중 $\theta_{ab}(k)=[a_0(k), \cdots\cdots a_{n-1}(k), b_0(k), \cdots\cdots, b_{n-1}(k)]$을 사용하여 제어 입력 $u(k)$를 구한다.

4. 전체 시스템의 安定度 證明

制御器 媒介變数의 収斂性을 定理 1에서 보이고 定理 2, 3에서 전체시스템이 安定됨을 보인다.

定理 1 : a) (3-11) ~ (3-13)에서 $\alpha=1$인 경우 $P(0)^{-1}$를 임의의 Non-Singular 行列로 주어 졌을 때 다음이 성립한다.

i) $\|\theta(k)-\theta^*\| \le k_1 \|\theta(o)-\theta^*\|$

여기서 $k_1^2=\lambda\max[P(o)^{-1}]/\lambda\min[P(o)^{-1}]$ (4-1)

ii) $\lim_{k\to\infty} \theta(k) = \theta_c$ (constant) (4−2)

iii) $\lim_{k\to\infty} \delta(k) = \lim_{k\to\infty} \phi^T(k)\bar{x}(k) = o$ (4−3)

여기서 $\phi^T(k) = \theta^T(k) - \theta^{*T}$

iv) $u(k)$의 周波数 成分이 많으면

$$\lim_{k\to\infty} \theta(k) = \theta^* \quad (4-4)$$

b) $u(k)$의 周波数 成分이 충분히 많은 경우 $0<\alpha<1$로 함으로써 収斂速度를 개선할 수 있다. 이때도 $k\to\infty$에 따라 $\theta(k)$가 θ^*로 収斂한다.

證明 : a)

i) $\phi(k) \triangleq \theta(k) - \theta^*$라 놓고 (3−11)式의 양변에 θ^*를 빼고 (3−8)와 (3−13)을 대입하고 幾何級数的으로 감소하는 ϵ_3의 영향을 무시하면

$$P^{-1}(k)\phi(k) = P^{-1}(k-1)\phi(k-1) \quad (4-5)$$

이 성립한다. 여기서 Liapunov 函数 $V(k) \triangleq \phi(k)^T P^{-1}(k)\phi(k)$를 정의하고 (4−5)을 適用하면

$$\triangle V(k) = V(k) - V(k-1)$$
$$= -\phi^T(k-1)\bar{x}(k)\bar{x}^T(k)\phi(k-1)/$$
$$[1+\bar{x}^T(k)P(k-1)\bar{x}(k)] \le o \quad (4-6)$$

이 되어 $V(k)$는 増加函数가 아니고 陰이 아니므로 収斂한다. 이때 $P(k)^{-1} = P(k-1)^{-1} + \bar{x}(k)\bar{x}^T(k)$므로

$$\lambda\min[P(k)^{-1}] \ge \lambda\min[P(k-1)^{-1}]$$
$$\ge \lambda\min[P(o)^{-1}] \quad (4-7)$$

이고 (3−13)에서 $\alpha = 1$일때

$$\lambda\max[P(o)] \ge \lambda\max[P(k)] \quad (4-8)$$

이다. (4−6)과 (4−7)을 適用하면

$$\lambda\min[P(o)^{-1}]\,\|\phi(k)\|^2 \le \lambda\min[P(k)^{-1}]$$
$$\|\phi(k)\|^2 \le \phi^T(k)P(k)^{-1}\phi(k) \le$$
$$\phi^T(o)P(o)^{-1}\phi(o) \le \lambda\max[P(o)^{-1}]$$
$$\|\phi(o)\|^2 \quad (4-9)$$

이 되어 식(4−1)이 성립하고 $k_1 = 1$로 선택할 수 있다.

ii) 또한 $\theta(k)$의 수렴을 살펴보면 $k \ge l$에 대하여

$$\|\theta(k)-\theta(l)\|^2 = \|\sum_{j=l+1}^{k}[\theta(j)-$$
$$\theta(j-1)]\|^2 \le \sum_{j=l+1}^{k}\|\theta(j)-\theta(j-1)\|^2$$
$$= \sum_{j=l+1}^{k}\bar{x}(j)^T P(j-1)P(j-1)\bar{x}(j)\delta(j)^2$$
$$/[1+\bar{x}^T(j)P(j-1)\bar{x}(j)]^2 \le \sum_{j=l+1}^{k}$$
$$(\lambda\max[P(j-1)])\,\phi^T(j-1)\bar{x}(j)\bar{x}^T(j)$$
$$\phi(j-1)/[1+\bar{x}^T(j)P(j-1)\bar{x}(j)] \le$$
$$\lambda\max[P(o)]\sum_{j=l+1}^{k}\phi^T(j-1)\bar{x}(j)x^T(j)$$
$$\phi(j-1)/[1+\bar{x}^T(j)P(j-1)\bar{x}(j)] =$$
$$\lambda\max[P(o)]\;[V(l)-V(k)] \quad (4-10)$$

이고 $V(k)$가 수렴하므로 $\theta(k)$도 収斂한다. 따라서 $\lim_{k\to\infty}\theta(k) = \theta_c$가 된다.

iii) $\theta(k)$는 $E(\theta, k)$를 최소로 하기 때문에

$$E(\theta(k), k) = E(\theta(k), k-1) + [q(z)\bar{u}(k)$$
$$-\bar{x}^T(k)\theta(k)]^2 = E(\theta(k), k-1)$$
$$+[\epsilon_3(k)+\bar{x}^T(k)\phi(k)]^2 \ge E(\theta$$
$$(k-1), k-1) + [\epsilon_3(k)+\bar{x}^T(k)$$
$$\phi(k)]^2 \quad (4-11)$$

이고 $k\to\infty$면 $\theta(k)\to\theta_c$로 되므로 $k\to\infty$에 따라

$$E(\theta_c, k) \ge E(\theta_c, k-1) + [\bar{x}^T(k)\phi_c]^2 \quad (4-12)$$

이 되는데 $k\to\infty$면 $\epsilon_3\to 0$이므로

$$E(\theta(k), k) = \sum_{j=0}^{k}\alpha^{k-j}[\phi^T(k)\bar{x}(j)\bar{x}(j)^T$$
$$\phi(k)] = \phi^T(k)P(k)^{-1}\phi(k) = V(k)$$

이 되고 앞에서 $k\to\infty$일 때 $V(k)$는 収斂하므로 $E(\theta_c, k)$는 $E(\theta_c, k-1)$과 같게 되어 (4−12)에서 $\bar{x}^T(k)\phi_c = 0$가 된다. 즉(4−3)이 증명된다.

iv) 여기서 $u(k)$의 주파수 成分이 많을 때 $\theta(k)$가 θ^*로 収斂함을 보이고자 한다. $\phi_c = (\phi_1^T, \phi_2^T, \phi_3^T, \phi_4^T)$로서 각 ϕ_i는 $n\times 1$인 벡터이다.

$$\phi_i(z) \triangleq \sum_{j=0}^{n-1}\phi_{ij}z^j;\; i = 1 \cdots\cdots, 4 \quad (4-13)$$

로서 나타내면 k가 充分히 클 때 (4−3)에서 $\bar{x}^T(k)\phi_c = 0$이므로

$$\bar{x}^T(k)\phi_c = \frac{1}{f(z)}[(\phi_1(z)+q(z)p_d(z)\phi_3(z))$$
$$y(k) + (\phi_2(z)+q(z)p_d(z)\phi_4(z))$$
$$u(k)] = 0 \quad (4-14)$$

가 된다. $u(k)$의 周波数 成分이 충분한데 0이 아닌 ϕ_c가 存在한다고 假定하면 다음 관계가 성립하여야 한다.

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{-(\phi_2(z)+q(z)p_d(z)\phi_4(z))}{\phi_1(z)+q(z)p_d(z)\phi_3(z)} \quad (4-15)$$

이 式에서 分母 및 分子의 多項式의 次数는 $(3n-1)$ 보다 같거나 작으며 共通因数 $N(z)$ 을 갖는다 하자. 분모와 분자가 서로 소인 경우는 $N(z)=1$ 이다. 그러면

$$\frac{Y(z)}{U(z)}=\frac{\Phi_2(z)\,N(z)}{\Phi_1(z)\,N(z)} \qquad (4-16)$$

이 되고 $\Phi_1(z)$, $\Phi_2(z)$ 는 서로 소이며 次数는 $(3n-1)$ 보다 작다. 또한 $\Phi_1(z)$ 의 최고차 계수가 1 인 多項式이 되게끔 적절한 常数를 곱하여 $\Phi_1(z)$, $\Phi_2(z)$ 의 係数의 크기를 조정하였다 하자. 그러면 $u(k)$ 가 $3n$ 이상의 周波数 成分을 가지면 $\Phi_1(z)$ 및 $\Phi_2(z)$ 의 係数는 唯一하게 決定되며 여기에 $N(z)$ 을 곱하므로서 $\phi_i(i=1,\cdots\cdots,4)$ 가 결정된다. 또한 $Y(z)=\frac{r(z)}{p(z)}U(z)$ 이므로 (4-15)로 부터

$$-\frac{\phi_2(z)+q(z)\,p_d(z)\,\phi_4(z)}{\phi_1(z)+q(z)\,p_d(z)\,\phi_3(z)}=\frac{r(z)}{p(z)} \qquad (4-17)$$

인 관계식을 만족시켜야 하며 이로부터

$$[p(z)\,\phi_2(z)+r(z)\phi_1(z)]+[p(z)\,\phi_4(z)+r(z)\phi_3(z)]\,q(z)\,p_d(z)=0 \qquad (4-18)$$

가 성립된다. 그런데 多項式 $p(z)\phi_2(z)+r(z)\phi_1(z)$ 의 次数는 $u(k)$ 의 주파수 성분이 充分할때 $(2n-1)$ 보다 작은데 $q(z)\,p_d(z)$ 의 次数는 $2n$ 이므로 (4-18)이 항상 성립하려면 $p(z)\phi_2(z)+r(z)\phi_1(z)=0$, $p(z)\phi_4(z)+r(z)\phi_3(z)=0$ 을 동시에 만족해야 하며 이는

$$\phi_2(z)/\phi_1(z)=\phi_4(z)/\phi_3(z)=-r(z)/p(z) \qquad (4-19)$$

인 關係式이다. 그런데 $\phi_1(z)$ 이나 $\phi_2(z)$ 의 차수는 $n-1$ 보다 크지 않은데 $p(z)$ 과 $r(z)$ 은 서로 소이며 $p(z)$ 의 차수는 n 이므로 (4-19)와 같은 관계식은 성립하지 않는다. 따라서 ϕ_c 는 0이 아니라는 가정에 矛盾이 되며 $u(k)$ 의 주파수 성분이 충분히 많을 때 $\phi_c=0$ 가 됨이 증명된다.

b) $u(k)$ 의 주파수 成分이 充分히 많은 경우 $0<\alpha<1$ 로 하면 (4-5)는

$$P^{-1}(k)\,\phi(k)=\alpha P^{-1}(k-1)\,\phi(k-1) \quad (4-20)$$

이 되며 Liapunov 函数 $V'(k)=\phi(k)^T P(k)^{-1}\phi(k)$ 로 정의하면

$$\begin{aligned}\triangle V'(k)&=V'(k)-V'(k-1)\\&=(\alpha-1)\,\phi^T(k-1)\,P^{-1}(k-1)\,\phi(k-1)-\alpha\phi^T(k-1)\,\bar{x}(k)\\&\quad\bar{x}^T(k)\,\phi(k-1)/[\alpha+\bar{x}^T(k)\,P(k-1)\,\bar{x}(k)]\le 0 \qquad (4-21)\end{aligned}$$

이 되어 $0<\alpha<1$ 이므로 $\triangle V'(k)\le 0$ 이다. 따라서 $V'(k)$ 도 收斂한다. 그런데

$$\begin{aligned}P(k)^{-1}&=\alpha P(k-1)^{-1}+\bar{x}(k)\,\bar{x}^T(k)\\&=\alpha^k P(o)^{-1}+\sum_{j=1}^{k}\alpha^{k-j}\,\bar{x}(j)\,\bar{x}^T(j) \qquad (4-22)\end{aligned}$$

가 성립하는데 $u(k)$ 가 周波数 成分을 충분히 갖고 있지 않을 때 $\sum_{j=1}^{k}\alpha^{k-j}\bar{x}(j)\bar{x}^T(j)$ 는 Singular 하게 되고 $P(o)^{-1}$ 를 non-Singular 하게 해도 $\lim_{k\to\infty}\alpha^k P(o)^{-1}$ 는 $0<\alpha<1$ 이므로 0으로 가게 되어 $P(k)^{-1}$ 는 $k\to\infty$ 에 따라 Singular 하게 된다. 그러나 $u(k)$ 가 주파수 성분을 充分히 갖고 있을 때 $0<\alpha<1$ 로 함으로서 θ 및 P 의 초기값이 실제와 많이 다른 경우 이들의 영향은 기하급수적으로 減少하므로 收斂速度를 改善할 수 있으며 $V'(k)$ 가 收斂하므로 $\lim_{k\to\infty}\triangle V'(k)=0$ 이어야 한다. 따라서 (4-21)의 좌변 두 항이 $k\to\infty$ 에 따라 0으로 수렴하고 $u(k)$ 의 주파수 성분이 충분하면 $P(k)^{-1}$ 가 non-Singular 하므로 $\lim_{k\to\infty}\phi(k)=o$ 가 되며 이는 $\theta(k)$ 가 θ^* 로 收斂함을 의미한다.

離散時間 非 最小位相 시스템에서 위의 方法에 의해 제어기 媒介変数가 推定되고 이로부터 $u(k)$ 가

$$u(k)=\theta_{ab}^T(k)\,v(k)+u_r(k) \qquad (4-23)$$

단, $v(k)\triangleq[\tilde{y}_0(k),\cdots\cdots,\tilde{y}_{n-1}(k),\ \tilde{u}_0(k),\cdots\cdots,\tilde{u}_{n-1}(k)]$

로 구해서 制御할 때 주파수 성분이 충분하면 전체 시스템이 安定됨을 定理2에서 보인다. 증명은 Choi[3] 의 방법에 따라 證明할 수 있다.

定理 2 : $u(k)$ 의 周波数 成分이 충분하고 (4-23)에 의해 制御될 때 전체 시스템의 모든 狀態벡터는 平等하게 有限한다.

定理1, 定理2를 이용하여 基準入力, $u_r(k)$ 의 주파수 성분에 따른 전체 시스템의 安定度에 대해서 定理3에서 보여진다.

定理 3 : $u_r(k)$ 의 周波数 成分이 충분하고 平等하게 有限하면 $\theta(k)$ 는 θ^* 로 收斂하며 전체 시스템이 안정되고, $u_r(k)$ 의 주파수 성분이 不充分한 경우에도 전체 시스템의 모든 狀態벡터는 平等하게 有限하다.

證明: $u(k)$ 의 周波数 성분에 관계없이 定理1에 의

해 $\theta(k)$가 θ_c로 수렴하므로 이때의 $a(z)$, $b(z)$, $c(z)$, $d(z)$가 $a_c(z)$, $b_c(z)$, $c_c(z)$, $d_c(z)$으로 收斂한다. 이때의 $u_r(k)$와 $u(k)$간의 關係를 살펴 보면,

$$u(k)=[q(z)p(z)/p_c(z)]\ u_r(k) \qquad (4-24)$$

단. $p_c(z) \triangleq q(z)p(z)-b_c(z)p(z)-a_c(z)r(z)$ 이 된다. 따라서 $u_r(k)$의 周波数 성분이 충분하면 $u(k)$의 周波数 성분도 충분히 많으므로 定理 1, 定理 2에 의해 $\theta(k)$는 θ^*로 收斂하고 전체시스템의 모든 상태벡터는 平等하게 有限하다. 그러나 $u_r(k)$의 주파수 成分이 충분하지 못할 때 $u(k)$의 주파수 성분이 충분치 못해서 $p_c(z)$이 不安定한 根을 가지고 있다면 일반적으로 $u(k)$는 발산하므로 $u(k)$의 주파수 成分이 충분하게 되어 $\theta(k)$는 θ^*로 수렴하므로 모순이다. 따라서 일반적으로는 $p_c(z)$이 安定多項式이 되어 모든 상태 벡터는 平等하게 유한하나 $p(z)$이 안정다항식 즉, 제어대상 플랜트가 안정한 경우에는 식 (4-24)의 관계가 역으로 안정하므로 $p_c(z)$이 불안정한 근을 가지고 있어도 $u(k)$가 발산하지 않을 수 있는데 이 경우는 $p_c(z)$의 不安定한 根이 $Z[u_r(k)]$의 零點에 의해 相殺되는 경우뿐이다. 이 때의 $y(k)$와 $u_r(k)$의 관계식은

$$y(k)=[q(z)r(z)/p_c(z)]\ u_r(k) \qquad (4-25)$$

인데 여기서도 마찬가지로 극-영점 相殺가 일어나므로 $y(k)$는 平等하게 有限하고 이때 $u(k)$도 有限하므로 모든 상태 벡터는 基準入力의 周波数 成分에 관계없이 平等하게 有限하다.

위의 定理 1, 2, 3에 의해 離散時間 非 最小位相 시스템이 임의의 유한한 기준입력에 의해 안정되고 周波数 成分이 충분한 기준입력에 의해서는 願하는 極配置가 이루어짐을 보였다.

시뮬레이션을 행하였는데 制御 對相플랜트의 傳達函数를

$$T(z)=(0.5z+1)/(z^2-2.0z-0.99) \quad (4-26)$$

로 하고 원하는 극을 원점, $q(z)$, $f(z)$을 다음으로 설정한다.

$$p_d(z)=z^2,\quad q(z)=z^2+0.1z-0.72 \quad (4-27)$$

$$f(z)=z^6-0.6z^5-0.44z^4+0.198z^3+0.0583z^2-0.0091z-0.00126$$

그러면 제어기 및 Bezout Identity 媒介変数의 참값 θ^*는

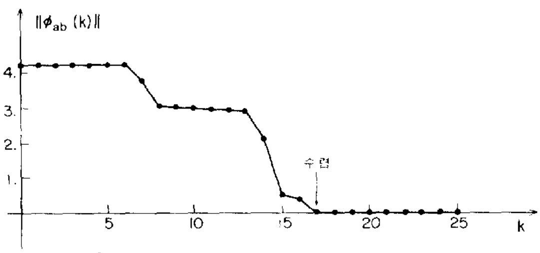
$$\theta^*=[a_1^*,\ a_2^*,\ b_1^*,\ b_2^*,\ c_1^*,\ c_2^*,\ d_1^*,\ d_2^*]$$
$$=[1.5547,\ -1.8392,\ -2.2904,\ -2.0,\ 0.88988,\ -0.22247,\ 0.11123,\ 0.0] \quad (4-28)$$

이 된다. 초기치는

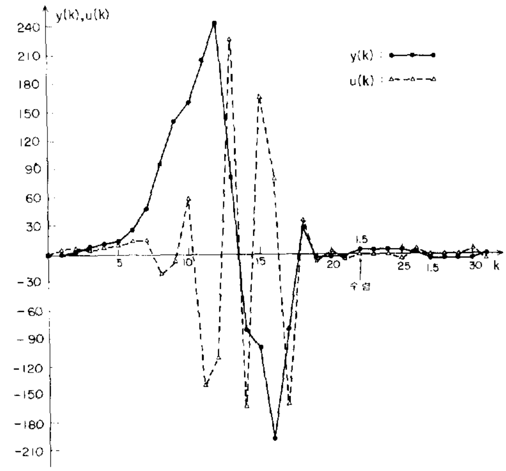
$$\theta(o)=[0.05,\ 1.22,\ -0.72,\ 0.0,\ 0.0,\ -2.0,\ 2.0,\ 0.0]$$

$$P(o)=100I,\ \alpha=1$$

로 하고 기준입력을 크기 1이고 주기 10Step인 구형파를 사용했을 때 제어기 매개변수 誤差의 norm $\|\phi ab(k)\|$와 플랜트 出力과 入力에 대해서 그림 (4-1)에 도시했다. 또한 기준입력이 주파수 성분이 不充分한 常数일 때도 전체 시스템이 안정하였다.



(a) 제어기 매개변수 오차의 norm



(b) 플랜트의 출력 및 입력

그림 4-1. 직접 적응극배치 방법의 시뮬레이션

5. 結 論

直接 適應 極配置 制御器를 이산시간 非 最小位相 시스템에 적용했을 때 基準入力의 周波数 成分

이 충분하면 정확한 극배치가 이루어지고 주파수 성분이 충분치 못해도 안정화 시킬 수 있다는 것을 증명함으로써 레귤레이션문제를 포함하여 적응제어를 적용할 수 있음을 보여준다. 즉 비 최소위상 시스템은 零點을 재배치 시킬 수 없기 때문에 願하는 기준출력을 追跡하지는 못하고 常数 출력을 추적해야 하기 때문에 周波数 成分이 不充分할 때가 많다. 또한 연속시간일 때는 最小位相이어도 이산화하면 非 最小位相이 되기 쉬우므로 離散시간 비 최소위상 시스템에 대한 적응 제어기 構成 및 입력의 周波数 성분에 관한 研究는 實用性이 매우 많다.

非 最小位相시스템에서는 영점의 재배치가 不可能함으로써 정확한 출력을 얻을 수 없는데 이 문제에 대해 더 研究가 있어야 하겠다.

참 고 문 헌

1) H. Elliot, "Direct adaptive pole placement with application to nonminimum phase systems," IEEE. Trans. Auto. Contr., Vol. AC-27, pp720-722, June. 1982

2) S. G. Choi, "A study of adaptive control", Master's thesis, Dep. of Contr. & Instru. Eng., Seoul national University, Feb. 1983.

3) C. H. Choi, "Model reference adaptive control with objective Function", KIEE(대한 전기학회지), Vol. 32, No. 6, 1983.

4) W. A. Wolovich, Linear Multivariable Systems, SPRINGER-VERLAG, 1974.

5) G. Goodwin, and R. Payne, Dynamic System Identification, ACADEMIC PRESS, 1977.