# 基準모델 適應시스템의 構成에 관한 研究

## —基準모델 適應制御系의 適應速度 改善에 관하여—

論 文
33~1~3

# On a Configuration of the Model Reference Adaptive Control Systems

## — On an Improvement of the Adapting Speed in MRAC Systems —

張 世 勳* · 李 順 榮**
(Se-Hoon Chang · Soon-Young Lee)

**Abstract**

The motivation in this paper is in constructing the controller with faster adapting speed than the one using the errors between the states of the plant and the model as the adaptive criterion.

In the first part of this work, the adaptive law is found by using the state errors.

In the later part, the adaptive law is obtained by introducing the companion model method.

Finally the justification for the adaptive law obtained in this paper is illustrated through the digital simulation, and the adaptive speed characteristics are compared.

### 1. 序 論

MRAC 方法은 1958년 Whitaker, Yarmon과 Kezer에 의해서 처음 고안되었는데, 이는 M.I.T rule로 널리 알려져 있다.[1),2)] 그 후 Wilder, Dressler등에 의해 gradient 技法으로 발전하였다.

그러나 이 方法을 써서 구성한 系는 安定度 판별이 어렵고 특히 간단한 系를 구성하였을 때에도 系가 不安定하게 되는 경우가 자주 발생하게 되므로[4)] 安定度 理論에 근거한 適應制御系의 設計 方法이 도입되었으며, P.C.Park[5)]은 처음으로 Lyapunov 安定度 理論을 이용하여 전체 시스템이 安定될 수 있는 適應制御則을 사용하는 方法을 제안하였다.

그러나 이와 같은 適應制御 기법을 사용하여 實際系를 구성하려면 플랜트의 可調整 파라미터들을 검출하여, 이 파라미터들이 適應則에 따라 적절히 변하도록 재구성시켜야 하므로 실제계를구성시키는 데에는 다소 제약을 받게 된다. 따라서 플랜트에 임의의 制御器를 첨가시켜 이 制御器를 조절하는 방법이 제안되기도 하였다.[6),7)]

Lyapunov 安定度 理論에 근거하여 플랜트와 모델 사이의 誤差를 이용해서 필요한 適應制御則을 찾아내는 방법에는 여러가지가 있지만[6)~8)] 어떠한 경우에도 適應速度가 중요한 問題로 제기된다. 보통 適應制御系를 구성할 수 있는 適應制御則은 適應動作時間內에서는 系의 特性이 거의 불변이라는 가정하에 구해지므로[1)], 特性變動이 빠른 系를 制御하려면 그만큼 適應時間이 짧은 系가 요구된다.

適應速度의 改善方法은 여러 사람들에 의해 제기되었는데[8),9)], 특히 S.Kobayashi[9)]가 제안한 随伴모델법은 그 應答速度가 매우 빠른 特性을 보였다.

따라서 본 論文에서는 플랜트에 制御器를 첨가시켜 새로운 플랜트를 구성한 후, 이 制御器를 조절할 수 있는 適應制御則을 유도하였다. 이렇게 함으로써 實現이 용이하며 適應速度가 빠른 適應制御系를 구성할 수 있었다.

### 2. 問題設定 및 假定

다음과 같은 線型時不変系를 생각한다.

$$\dot{X}_p = A_p X_p + B_p U \tag{2-1}$$

* 正 會 員 : 漢陽大 工大 電氣工學科 教授 · 工博
** 正 會 員 : 漢陽大 大學院 電氣工學科 碩士課程
接受日字 : 1983年10月 5 日

여기서, $X_p$, $U$는 각각 $n$次元의 狀態벡터 및 $m$次元의 入力벡터이다.

系의 요구되는 動作特性을 다음과 같이 가정하여, 이를 基準모델로 취하면,

$$\dot{X}_m = A_m X_m + B_m U \qquad (2\text{-}2)$$

여기서, 각 行列 및 벡터들의 次元은 플랜트에 對應하는 次元과 같다.

이제 플랜트를 制御하기 위하여 前向行列 $Q$와 $m \times n$인 饋還行列 $F$를 플랜트에 첨가시키면 새로운 플랜트는 다음과 같이 表現된다.[6]

$$\dot{X}_p = [A_p + B_p QF] X_p + [B_p Q] U \qquad (2\text{-}3)$$

그러면 여기에서 다루려는 問題는, 플랜트와 모델 사이의 諸特性들이 일치하도록 制御器 $F$와 $Q$의 파라미터들을 調整하는 問題로 귀결되는데 본 論文에서는 다음과 같은 假定下에 適應制御則을 구하였다.

假定 ;

1) matchable 플랜트인 것으로 본다.
2) 플랜트 파라미터는 時不変이다.
3) 플랜트의 狀態는 모두 測定可能하다.
4) 雜音은 考慮하지 않는다.
5) 모델은 漸近安定하다.

위의 假定에서 matchable 은 문제의 플랜트가 制御器를 통하여 完全히 일치될 수 있음을 의미한다.[6]

## 3. 基準모델 適應 制御系의 適應速度 改善理論

### 3.1 誤差e를 이용한 基準모델法[6]

다음과 같은 플랜트와 모델을 생각한다.

$$\dot{X}_p = [A_p + B_p QF] X_p + [B_p Q] U \qquad (3\text{-}1)$$

$$\dot{X}_m = A_m X_m + B_m U \qquad (3\text{-}2)$$

앞 節에서 플랜트와 모델이 matching 된다고 假定하였으므로, 다음과 같은 關係가 成立되는 行列 $Q^*$와 $F^*$가 存在해야 한다.

$$A_p + B_m F = A_m$$
$$B_p Q = B_m \qquad (3\text{-}3)$$

그러면 狀態誤差 벡터 $e = [X_m - X_p]$ 는,

$$\dot{e} = A_m e + B_m \phi X_p + Bm\, \Psi Q [U + FX_p] \qquad (3\text{-}4)$$

여기서

$$\phi = [F^* - F], \quad \Psi = [Q^{-1} - Q^{*-1}] \qquad (3\text{-}5)$$

式 (3-4) 에서 $B_m \phi X_p + B_m \Psi Q [U + FX_p] = 0$ 이 되도록 $Q$와 $F$를 調整하면, 式 (3-4) 로부터 狀態誤差 $e$ 는

$$e = e_0\, exp\{A_m (t - t_0)\} \qquad (3\text{-}6)$$

이 되어 $t \to \infty$로 감에 따라 $e \to o$가 된다. 즉, 適應動作이 끝나게 된다.

이제 $e$, $\phi$, $\Psi$의 2次型式으로 표시되는 다음과 같은 試驗 Lyapunov函数를 생각해보자.

$$V = \frac{1}{2}[e^T Pe + tr(\phi^T \Gamma_1^{-1} \phi + \Psi^T \Gamma_2^{-1} \Psi)] \qquad (3\text{-}7)$$

여기서 $P$ 는 式 (3-8) 을 만족하는 實對稱 正値行列이며, $\Gamma_1$ $\Gamma_2$ 는 式 (3-9) 와 같은 관계를 만족한다.

$$A_m^T P + PA = -R, \quad R = R^T > O \qquad (3\text{-}8)$$

$$\Gamma_1 = \Gamma_1^T > O, \quad \Gamma_2 = \Gamma_2^T > O \qquad (3\text{-}9)$$

그러면 $V > O$가 된다. 또한, $V$에 대한 時間微分으로부터 $\dot{V} < O$ 을 만족하는 條件을 구하면 다음과 같은 適應制御則을 구할 수 있다.

$$\dot{F} = \Gamma_1 B_m^T Pe X_p^T$$

$$\dot{Q} = Q \Gamma_2 B_m^T Pe (U + FX_p)^T Q^T Q \qquad (3\text{-}10)$$

그러므로 式 (3-4) 와 式 (3-10)로 表現되는 非線型系는 漸近安定하게 되므로 時間이 지남에 따라 $e \to o$가 됨을 알 수 있다. 그러나 式 (3-10)의 適應制御則에 의해 플랜트와 모델의 파라미터들이 일치되었어도 일반적으로 式 (3-6) 에서 알 수 있듯이, 誤差의 初期値는 零이 아니므로 狀態誤差는 零이 안된다. 따라서 適應動作은 계속되어야 한다. 또한 플랜트와 모델 사이의 狀態誤差 $e$의 減衰速度는 모델의 減衰速度 이상으로 빠르게 하는 것은 불가능함을 알 수 있다.

### 3.2 隨伴모델法

앞 節의 방법에서는, 일반적으로 모델과 플랜트의 初期値가 서로 다르므로 適應速度를 생각해 볼 때, 모델의 減衰速度 이상으로 그 速度를 빠르게 하는 것은 불가능하였다. 그러므로 式 (3-3) 의 성립을 직접 알아 낼 수 있는 다른 방법을 이용하면 適應速度를 현저히 개선시킬 수 있을 것으로 생각된다. 따라서 본 節에서는 이를 위해 狀態誤差의 初期値와는 무관한 随伴系를 도입하였다. 먼저, 모델과 같은 次数를 갖는 다음과 같은 随伴系를 구성한다.

$$\dot{\xi}(t) = -A_m^T \xi$$

$$\xi(t_o) = \xi_o \qquad (3\text{-}11)$$

단, $\xi$: 随伴系의 $n$次元 벡터

$\xi_o$: 임의의 常数인 初期値

$t_o$: 初期時刻

이제, On-Line으로 合成할 수 있는 다음과 같은 스칼라量 $S(t)$를 도입한다.

$$S(t) = \xi^T(t) X_p - \int_{t_0}^{t} \xi^T B_m U dt \qquad (3\text{-}12)$$

여기서, $X_p$는 플랜트의 狀態이고, $\xi(t)$는 式 (3-

11)의 解이다. $S(t)$에 대한 時間微分을 구하면

$$\dot{S}(t) = -\xi^T \{ B_m\phi X_p + B_m\Psi Q[U+FX_p] \} \qquad (3\text{-}13)$$

여기서, $\phi$와 $\Psi$는 앞의 式 (3-5)를 만족하는 行列이다.

따라서 式(3-3)이 만족하도록 $Q$, $F$를 調整하면 $\dot{S}(t)=0$ 또는 $S(t)$ = 常數가 된다. 이것을 반대로 생각하면 $S(t)$가 일정하게 되는 경우는 $\xi^T(t)$와 $\{B_m\phi X_P + B_m\Psi Q[U+FX_P]\}$가 直交 하든가 또는, 벡터 $\{B_m\phi X_P + B_m\Psi Q[U+FX_P]\}$가 零이 될때, 즉 式(3-3)이 만족되는 경우인데, 벡터 $\{B_m\phi X_P + B_m\Psi Q[U+FX_P]\}$는 入力 $U(t)$에 좌우되는 量임에 비해 $\xi(t)$는 $U(t)$와 무관한 量이므로 有限時間 內에 直交하기란 實際로 거의 불가능하다. 따라서 $\xi(t)$의 初期値를 적절하게 주어서 式(3-11)의 解를 發生시키고 $S(t)$를 On-Line 合成하면 $\dot{S}(t)=0$ 또는 $S(t)$가 일정하게 되는 조건에 의하여 대부분의 경우 式(3-3)의 성립을 직접感知할 수 있게 된다. 그러므로 이것을 이용하면 앞節의 방법보다 빠른 適應動作을 기대할 수 있다. 그런데 適應則을 구하는데 있어서 $S$의 完全한 微分을얻는 것은 實際的이 아니므로 實際 구성이 가능한 近似微分器 $s/(Ts+1)$에 適用하여 그 出力($w$)을 대신 사용하기로 한다. 즉,

$$S\left(\frac{s}{Ts+1}\right) = w \quad \text{또는} \quad T\dot{w}+w=\dot{S} \qquad (3\text{-}14)$$

여기서, $T$는 時定數이며 $T>0$이다.

이제, $w$ 및 $\phi$, $\Psi$의 2次型式으로 表現되는 $V>0$인 試驗 Lyapunov 函數 $V$를 다음과 같이 가정하자.

$$V=\frac{1}{2}[Tw^2 + tr(\phi^T \Gamma_1^{-1}\phi + \Psi^T \Gamma_2^{-1}\Psi)] \qquad (3\text{-}15)$$

$\Gamma_1, \Gamma_2$는 式(3-9)를 만족하는 行列이다. $V$의 時間微分을 구하여 $\dot{V}<0$를 만족하기 위한 條件을 求하면

$$\dot{\phi} = w\Gamma_1 B_m^T \xi X_P^T$$
$$\dot{\Psi} = w\Gamma_2 B_m^T \xi [U+FX_P]^T Q^T \qquad (3\text{-}16)$$

결과적으로 適應制御則은 式(3-5)와 式(3-16)으로부터 다음과 같이 된다.

$$\dot{F} = -w\Gamma_1 B_m^T \xi X_P^T$$
$$\dot{Q} = -wQ\Gamma_2 B_m^T \xi [U+FX_P]^T Q^T Q \qquad (3\text{-}17)$$

그러므로 式(3-13)은 위의 條件에 의해 漸近安定하게 되므로 $t\to\infty$됨에 따라 $w\to 0$로 된다. 즉, 式(3-3)이 성립하게 되어 適應動作은 끝나게 된다. 그러나 假定 5)와 式(3-11)에 의해 隨伴系는 반드시 불안정하게 된다. 그 때문에 隨伴모델법에서는 $\xi$가 發散하는 信號로 되며 적절한 時間內에 適應動作이 끝나지 않는 경우 $\xi(t)$를 반복하여 發生시켜야 하므로 자연히 適應動作은 不連續이 된다. 또한, $S(t)$의 合成에는 많은 승산을 필요로 하게되는 단점이 있다. 그러나 實際系를 設計하는데 있어서는 디지틀電算機를 사용하면 쉽게 해결할 수 있을 것으로 기대된다.[9]

## 4. 電算機 시뮬레이숀 및 檢討

以上과 같이 서술한 두가지 方法의 收斂速度를 비교하기 위해 다음과 같은 研究對象系를 들어 電算機 시뮬레이숀하여 收斂速度를 비교하여 보았다.[6]

플랜트 ; $\dot{X}_P = [A_P + B_P Q F^T] X_P + B_P Q U$

모 델 ; $\dot{X}_m = A_m X_m + B_m U$

$$A_P = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -6 & -7 \end{pmatrix} \quad B_P = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \quad A_m = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -10 & -5 \end{pmatrix} \quad B_m = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

여기서 初期時間 $t_0=0$로 하였으며 入力信號는 크기가 1이고 周波數가 $1/2\pi$인 正弦波로 하였으며 $\xi$는 그림 1에서와 같이 반복신호를 가했다.

여기서, $P, \Gamma_1, \Gamma_2$의 값은 收斂速度의 비교를 용이하게 하기 위해 두경우 모두 다음과 같은 값으로 가정하였다.

$$P = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Gamma_1 = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}, \quad \Gamma_2 = 9$$

또한, 時定數 $T$는 適應速度에 영향을 줄 수 있는 것이므로 작은 것이 바람직하지만 誤差의 크기가 커지는 등의 문제가 發生하게 되어 0.085를 주었다.

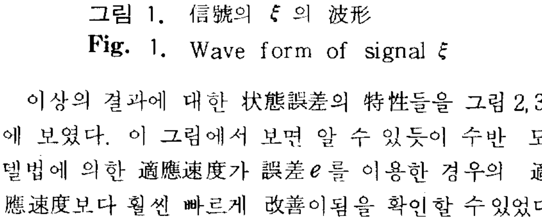


그림 1. 信號의 $\xi$ 의 波形

**Fig. 1.** Wave form of signal $\xi$

이상의 결과에 대한 狀態誤差의 特性들을 그림 2,3에 보였다. 이 그림에서 보면 알 수 있듯이 수반 모델법에 의한 適應速度가 誤差$e$를 이용한 경우의 適應速度보다 훨씬 빠르게 改善이됨을 확인할 수 있었다.

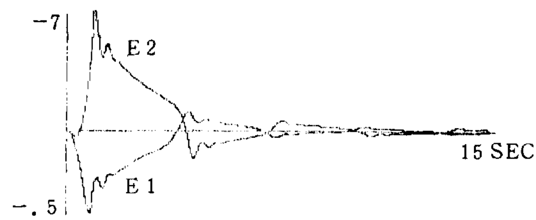


그림 2. 方法 1 에서의 狀態 誤差

**Fig.** 2. State errors in method 1

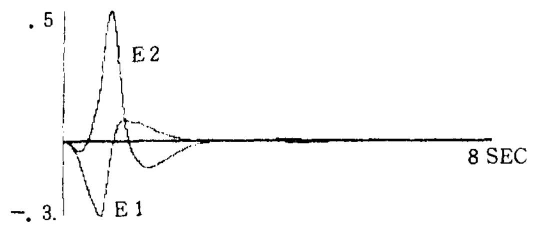


그림 3. 方法 2 에서의 狀態 誤差

**Fig.** 3. State errors in method 2

## 5. 結 論

Narendra 및 Kudva 가 제시한 構造에 수반모델법을 적용시켜본 결과 다음과 같은 結論을 얻었다.

1. 適應制御系를 설계함에 있어서 随伴모델법을 사용함으로 해서 誤差 $e$ 를 이용한 方法보다 適應速度를 빠르게 개선시킬 수 있었다.

2. 플랜트에 임의의 制御器를 첨가하여 새로운系를 구성시킨 후 이 制御器를 변환시키는 適應方法을 도입함으로써 실제系로의 實現을 용이하게 할 수 있을 것으로 기대된다.

3. 随伴모델법에서는 適應系가 복잡하게되지만 디지틀 電算機에 의한 制御가 전제로 되는 경우에는 별무리가 없을 것으로 생각된다.

4. 近似微分器의 時定數는 작은 것이 좋지만 너무 작으면 誤差의 폭이 커지는 등의 단점이 있으므로 적절한 값의 선정에 대한 研究가 더 요구된다.

## 參 考 文 獻


1) Y.D. Landau; A Survey of Model-Reference Adaptive Techniques Theory and Applications, Automatica, Vol.10 353-379, Pergaman Press (1974)

2) Y.D. Landau; Adaptive Control-The Model-Reference Approach, Marcel Dekker Inc. (1979)

3) R.M. Dressler; An Approach to Model-Reference Adaptive Control Systems, IEEE. Trans. On Automatic Control, Vol. AC-12, No. 1, 75-80 (1967)

4) C.C. Hang and P.C. Parks; Comparative Studies of Model-Reference Adaptive Control, Vol. AC-18 (1973)

5) P.C. Parks; Lyapunov Redesign of Model Reference Adaptive Control System, IEEE Trans. On Automatic Control, Vol. AC-11, No. 3, 362-367 (1966)

6) K.S. Narendra and Prabaker Kudva; Stable Adaptive Schemes for System Identification and Control-Part 1, IEEE Trans. On Systems and Cybernetics, Vol. SMC-4 No. 6 (1974)

7) K.S. Narendra and L.S. Valavani; Stable Adaptive Controller Design-Direct Control, IEEE Trans. On Automatic Control, Vol. AC-23 (1978)

8) C.A. Winsor, R.J. Roy; Design of Model Reference Adaptive Control Systems by Lyapunov's Second Method, IEEE. Trans. On Automatic Control, April. (1968)

9) S.Kobayashi; Improvement of the Adapting Speed in Model-Reference Adaptive Control Systems, 日本計測自動制御学会論文集 10-2 (81-86) (1973)