

코클리어 기저막 운동의 2차원 모델 해석

유선국 · 백승화* · 박상희

=Abstract=

Two-dimensional Model Analysis on Cochlear Basilar Membrane Motion

Sun-Kook Yoo · Seung-Hwa Beack · Sang-Hui Park

In this paper, we describe an effective technique for computing the steady-state motion in a two-dimensional cochlear model. With the cochlear fluid assumed incompressible and inviscid, the problem reduces to solving an integral equation for a region with yielding boundary.

Using the conformal mapping, Jacobian elliptic function and hyperbolic function, a pair of second-order differential equation is derived. What we will show in this paper is that by appropriately transforming integral equation, the same computation can be performed with comparable accuracy in a short time.

1. 서 론

청각 신호 자극에 대한 기저막의 응답특성에 관한 연구는 Von Békésy가 기저막 운동을 측정할 것을 시작으로 관심의 대상이 되어 왔다. 최근에 Rhode는 Mössbauer기법을 이용하고 Wilson과 Johnston은 Capacitive Probe 기법을 사용하여 좀더 상세한 생리학적인 자료를 제공함으로써 정확한 코클리어 모델이 개발되어 왔다. 이러한 모델 해석 방법에 대하여 Lesser와 Berkley는 푸리에 급수 방법에 의한 해를 구했지만, 계산과정이 복잡하여 부적합하다. Allen¹⁾은 Lesser와 Berkley보다 수치적으로 보다 안정되고 효과적인 적분 방정식에 의해 해를 구했지만, 아직도 기저막 속도의 계산량이 상당히 많고 복잡하다. Boer의 저파장 근사 방법에 의한 2차원 모델 해석 방법은 공진점 근처에서만 유용한 값을 나타내고 비선형 특성을 설명할 수 없

다. 그러므로 본 논문에서는 Rhode의 생리학적인 데이터를 이용하고 적분방정식²⁾에서의 커널(Kernel)을 에립틱 함수를 이용해 폐쇄형태로 합한후 콘포멀 매핑을 사용하므로써 선형 미분방정식으로 변형, 2차원 기저막 운동의 효과적인 계산 방법을 제안하였다.

2. 기본 가정

본 모델에서의 기본 가정은 다음과 같다.

- ① 코클리어는 딱딱한 벽으로 막힌 각형상자이다.
- ② 코클리어 내의 액체는 점성이 없고 압축되지 않았다.
- ③ Z 방향에 대해서는 아무 변화가 없다.
- ④ 스테이프스에 대한 입력 속도는 y 방향에 대하여 독립이다. 즉 피스톤 운동을 한다.
- ⑤ 모델은 기저막에 대하여 대칭이다.
- ⑥ 기저막은 선형이며, 응답은 기저막에서 발생하는다. 즉 임의의 점에서의 속도는 압력에 대하여 선형으로 작용하고, 그밖의 점에 대해서는 독립이다.

따라서 이러한 가정하에서 그림 1과 같이 기저막은

<1984. 12. 1 접수>

연세대학교 공과대학 전기공학과
Dept. of Electrical Eng., Yonsei University

* 명지대학교 공과대학 전기공학과
Dept. of Electrical Eng., Myung-gi University

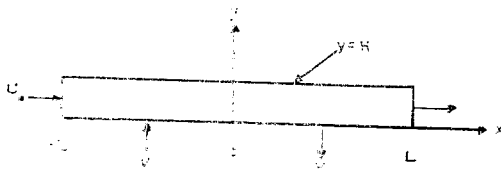


그림 1. 코클리어 모델
Fig. 1. Cochlea model

$y=0$ 에 위치하며, oval window는 $X=-L$, round window는 $X=L$ 에 위치하며 높이는 H 가 된다.

3. 모델 방정식

$U(x, y, t)$ 를 액체 속도 벡터라 하고 $P(x, y, t)$ 를 압력이라고 하면, 가정 ②의 연속성, 뉴우톤 법칙을 이용하여 라플라스 변환을 시키면

$$\nabla \cdot U = 0 \quad (1)$$

$$\nabla P = -\rho s U \quad (2)$$

$$\nabla^2 P = 0 \quad (3)$$

가정 ①, ④, ⑥에 의해 경계조건을 구하고 $U_0(s)$ 가 입력 스테이프스 속도이고, $V(x, s) = U_y(x, 0, s)$ 가 거저막 속도라면 경계조건은 아래와 같이 된다.

$$-(\nabla P)_y = \rho s U_y = 0; y = H \quad (4)$$

$$= \rho s V; y = 0 \quad (5)$$

$$-(\nabla P)_x = \rho s U_x = \rho s U_0; x = \pm L \quad (6)$$

즉 식 (3)의 라플라스 방정식과 식 (4) (5) (6)의 경계조건을 만족하는 해를 구하면 되는 것이다. $y=0$ 에서 $P = -ZV$ 란 임피던스 관계로 정합시키면

$$Y = \pi_1 + \pi_2 \quad (7)$$

의 해를 얻는데, 라플라스 방정식에 의해

$$\pi_1 = -\rho s x U_0 \quad (8)$$

가 되고 π_2 를 구하기 위해 그림 2와 같이 콘포밀 매핑으로 정합시킨다. 이를 $\xi = x + iy$ 인 복소변수라고 정의하면

$$W = f(\xi) = \theta(x, y) + i\eta(x, y) \quad (9)$$

ξ 평면의 각형 R 에서 해석적이므로 f 는 R 을 W 평면의 R' 로 콘포밀 매핑시키는 것이다.

Jacobian elliptic⁶⁾ 함수를 사용하여

$$W = sn\left(\frac{K\xi}{L} \middle| m\right) \quad (10)$$

R 평면의 A-B-C-D를 (θ, η) 평면의 a-b-c-d로 매핑시킨다. schwartz공식⁷⁾에 의해

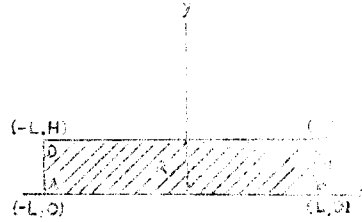


그림 2. 콘포밀 매핑
Fig. 2. The conformal mapping

$$\pi_2(x, y) = -\frac{\rho s}{\pi} \int_{-L}^L G(\xi, x') V(x') dx' \quad (11)$$

$$여기서 G(\xi, x') = \ln \left| sn\left(\frac{K\xi}{L} \middle| m\right) - sn\left(\frac{Kx'}{L} \middle| m\right) \right| \quad (12)$$

이다. π_1 과 π_2 에 의해 아래와 같은 적분방정식이 유도된다.

$$P(x, y) = -\rho s x U_0 - \frac{\rho s}{\pi} \int_{-L}^L G(\xi, x') V(x') dx' \quad (13)$$

에리틱 함수는 쌍곡선 함수로 근사화시킬 수 있으므로

$$sc\left(\frac{K\sigma}{2L} \middle| \mu\right) = \sin h \frac{K\sigma}{2L} = \sin h \frac{\pi\sigma}{2H} \text{를 이용}$$

$$\frac{d^2 P_N}{dx^2} = \frac{\rho s}{HZ_N} P_N + \sum_{K=1}^{N-1} \frac{d^2 W_K}{dx^2} \quad (14)$$

$$\frac{d^2 W_K}{dx^2} = \left(\frac{K\pi}{H}\right)^2 W_K + 2K \frac{\rho s}{HZ_N} (1 + e^{-2(KxL/H)}) P_N \quad (15)$$

$x=0$ 에서 $P_N=0$ 이고, 모든 K 에 대하여 $W_K=0$ 이다.

$x=-L$ 에서 $-\frac{d}{dx} P_N = \rho s U_0$ 이고 모든 K 에 대해 $\frac{d}{dx} W_K = 0$ 이다.

$N=1$ 에서는 전송선 이론과 정합되고 $N=2$ 에 대해서는

$$\frac{d^2}{dx^2} P_2 = 3 \frac{\rho S}{HZ_2} P_2 + \left(\frac{\pi}{H}\right)^2 W_1 \quad (16)$$

$$\frac{d^2}{dx^2} W_1 = 2 \frac{\rho S}{HZ_2} P_2 + \left(\frac{\pi}{H}\right)^2 W_1 \quad (17)$$

$$W_1(0) = P_2(0) = \frac{d}{dx} W_1(-L) = 0 \quad (18)$$

$$\frac{dP_2}{dx}(-L) = -\rho S U_0 \quad (19)$$

가 유도된다.

4. 컴퓨터 해석

근사방법 계산을 하기 위해 $U_0(s) = 1$ 과 $s = iw$ 로 하여 계산했다. 이것은 입력이 각주파수 w 인 정현파 함수일 때 각각 다른 양의 진폭과 위상을 계산할 수 있다. 이런 양에 의해 기저막에서의 압력과 속도를 계산할 수 있다.

본 연구는 임피던스를 $Z(x, s) = Ms + K/s + R^1$ 인 병진운동계로 보았으며 여기서, M 은 X 에 대하여 독립적이고 $K = K_0 \exp(2\alpha(|X| - L))$, $R = R_0 \exp(\alpha(|X| - L))$ 로 x 에 대하여 종속적이다. 컴퓨터 해석은 초기조건 $x=0$ 에서 $x=-L$ 의 조건을 만족할 때까지 반복계산하였다. 코볼티어의 이동 불변특성에 의해 $f = f_0 e^{ax}$ 를 이용하여 주파수를 로그함수로 변환시켰으며, $a = 1.7^1$ 로 하였다. 기저막의 길이 3.5cm를 250 등분으로 분할 계산하였을 때, Rhode의 측정치와 일치하는 해를 얻을 수 있었으며 식 (16)~(19)을 이용하여 한쌍의 미분방정식의 해를 수치적으로 유한차분방법에 의해 분할속 선형방식을 유출해내서 구했다. $AX=B$ 인 매트릭스 방정식을 풀기위해 가우시안 소거법을 사용한 후, back-substitution 알고리즘을 이용하여 계산하였다. 컴퓨터는 PDP-11/44 미니 컴퓨터를 사용하였다.

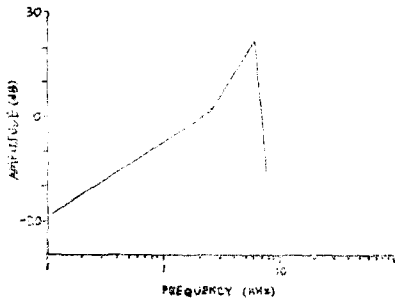
5. 결과 고찰

그림 3은 Rhode의 Mössbauer 기법에 의해 측정된 진폭특성과 위상특성을 나타내는 것으로서 그림 3-(a)에서와 같이 낮은 주파수에서는 약 6dB/oct로 서서히 증가하고 최적 주파수 근처에서는 24dB/oct로 증가하여 이 점을 지난후 100dB/oct로 급격히 감소한다. 위상특성은 그림 3-(b)에서와 같이 낮은 주파수에서는 선형적으로 변하지만, 최적 주파수를 지난 후에는 급격히 감소하여 고주파수에서는 일정한 값을 갖는다. 위상특성이 음(-)의 값을 갖는 것은 추돌운동에 의한 기저막 운동이 지연되고 있음을 알 수 있다.

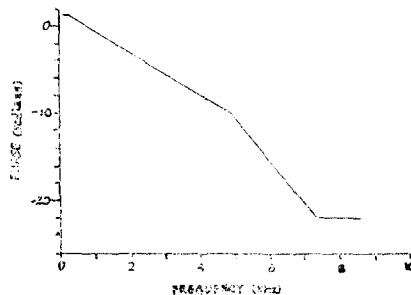
그림 4는 기저막 속도의 진폭특성을 나타내는 그림으로서 매개변수 값에 대한 2차근사방법, $N=2$ 로 계산한 결과이다. 진폭특성은 스테이프스에서 헬리코트레마를 향해 점진적으로 증가하다가 최대공진을 일으킨 후, 급격히 감소하는 Rhode의 측정치와 잘 일치하고 있음을 알 수 있다.

그림 5는 위상특성을 나타내는 그림으로서 이 곡선은 진폭특성과는 달리 스테이프스로부터 헬리코트레마를 향해 점차 감소하여 공진점 위치에서 급속히 감소하는 현상을 보여주고 있으나, Rhode가 측정된 위상변화에 대해 50%정도 밖에 변하지 않는 것을 알 수 있으므로 같은 매개변수에 대해 위상과 진폭특성을 동시에 만족시킬 수는 없었다.

그림 6은 모델에 의해 계산된 압력을 나타내고 있다. 여기서 압력은 최고점에 도착한 후 단조적으로 감소하는 특성을 나타내고 있다. 즉 2차원 모델의 해는 기저막 속도, 압력특성이 공진점을 일으키는 위치에서 일치하고 있음을 알 수 있다.



(a)



(b)

그림 3. Rhode의 기저막 변위의 진폭 및 위상곡선
Fig. 3. The amplitude and phase curve of the BM displacement by Rhode

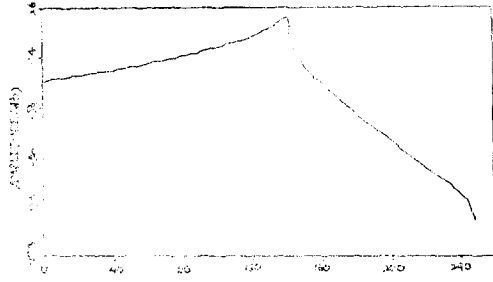


그림 4. 기저막 속도의 진폭특성
Fig. 4. The magnitude characteristic of BM velocity

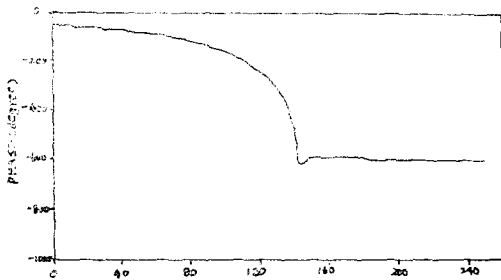


그림 5. 기저막 속도의 위상특성
Fig. 5. The phase characteristic of BM velocity

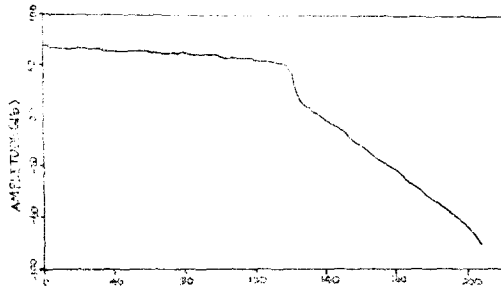


그림 6. 기저막 압력의 진폭특성
Fig. 6. The magnitude characteristic of BM pressure

그림 4, 5, 6, 7은 기저막의 길이 L 을 250 등분하여 계산 하였으며, 그림 7은 이 등분의 0.2, 0.35, 0.65, 0.8의 거리에서 주파수의 변화에 따른 속도특성을 나타내는 그림으로서, 주파수는 50Hz에서 16000Hz까지를 로그 함수적으로 110 등분한 값을 나타내고 있다. 이 곡선은 이동파가 스테이프스에서 헬리코트레마를 향해 점진적으로 전파해가는 특성을 나타내고 있다. 즉 스테이프스에 가까운 점에서는 고주파수에서 최대공진을 나타내고 헬리코트레마에 가까울수록 저주파수에서 최대 공진을 나타내는 생리학적인 추정치와 일치하고 있다.

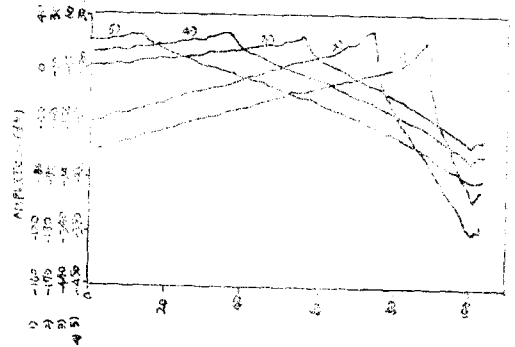


그림 7. 주파수 변화에 따른 기저막 속도의 진폭특성
1) $L \times 0.2$ 2) $L \times 0.35$ 3) $L \times 0.5$ 4) $L \times 0.65$
5) $L \times 0.8$
Fig. 7. The magnitude characteristic of BM velocity with frequency variation
1) $L \times 0.2$ 2) $L \times 0.35$ 3) $L \times 0.5$ 4) $L \times 0.65$
5) $L \times 0.8$

6. 결 론

본 연구에서는 기저막 운동의 주요특성을 하나의 적분방정식으로 해를 구하는 대신에 한 쌍의 미분방정식을 수치적으로 계산한 결과, Rhode의 추정치와 잘 일치하는 것을 보여주고 있다. 이 방법에 의한 수치해는 하나의 적분방정식보다 풀기가 쉽고 시간이 덜 소요되는데 비해 생리학적인 추정치와는 진폭특성은 매우 잘 일치하고 있으나, 위상특성은 정확히 일치하지 않고 있다. 그러나, N 의 차수를 높이면 추정치와 좀더 일치하는 모델을 얻으리라 생각한다.

본 연구에서는 코클리어 모델을 선형적으로 해석하였으나 많은 생리학적인 추정치 코클리어 공진점 부근에서는 비선형 특성을 나타내고 있으므로, 본 모델에서의 기저막 함수의 damping항을 조정함으로써 Hall이 제안한 비선형특성을 고찰하여 코클리어의 마이크로 메가닉스에 응용할 수 있으리라 생각한다.

참 고 문 헌

- 1) Allen, J.B (1977 a): "Two-dimensional cochlear fluid model; new results", *J. Acoust. Soc. Am.*, 61.
- 2) Allen, J.B(1977 b): "Cochlear micromechanics", *J. Acoust. Soc. Am.* 62, 930~939.
- 3) Churchill, R.V (1960). *Complex variables and*

- Applications, 2nd ed. (McGraw-Hill, New York),*
Secs 80, 81, 105.
- 1) De Boer, E: "Short waves in three dimensional cochlear models: Solution for a 'BLOCK' MODEL", *Hearing Research* 4, pp. 53-77, 1981.
 - 2) Man Moham Soodhi (1977): "Method to computing motion in a two dimensional cochlear model", *J. Acoust. Soc. Am.* 61.
 - 3) Milne-Thomson, L.M (1950). *Jacobi Elliptic Function Tables (Dover, New York)*
 - 4) Rhoda, W.S: "Observation of the vibration of the nodal membrane in Squirrel monkeys using the Mössbauer technique", *J. Acoust. Soc. Am.* 49, pp. 1217-1231, 1971.