

<論 文>

국부하중을 받는 직교이방성 원통셸의 해석

이 영 신\* · 박 정 화\*\* · 옹 장 우\*

(1984년 1월 4일 접수)

Analysis of Orthotropic Cylindrical Shells Subjected to Localized Loads

Young Shin Lee, Jung Hwa Park and Jang Woo Ong

Abstract

The stress state of orthotropic cylindrical shells subjected to localized loads is considered. The governing equations for orthotropic cylindrical shells are derived on the basis of the Morley-Koiter's isotropic shell theory. It is assumed here that the material has a special orthotropy. Solutions are obtained by the Bijlaard's method in the form of double Fourier series. Numerical examples are presented for cylindrical shells having various orthotropic material properties and shell geometries.

기 호 설 명

<p><math>D_x</math> : <math>E_x h / (1 - \mu_x \mu_\phi)</math></p> <p><math>D_\phi</math> : <math>E_\phi h / (1 - \mu_x \mu_\phi)</math></p> <p><math>E_1</math> : <math>E_x / (1 - \mu_x \mu_\phi)</math></p> <p><math>E_2</math> : <math>E_\phi / (1 - \mu_x \mu_\phi)</math></p> <p><math>E_x, E_\phi</math> : 직교이방성 셸의 <math>x</math> 및 <math>\phi</math> 방향의 탄성계수</p> <p><math>G_{x\phi}</math> : 직교이방성 셸의 전단탄성계수</p> <p><math>h</math> : 셸두께</p> <p><math>H^4</math> : <math>E_\phi / E_x</math></p> <p><math>K_x, K_\phi</math> : <math>x</math> 및 <math>\phi</math> 방향의 굽힘강성계수  <math>K_x = E_x h^3 / 12(1 - \mu_x \mu_\phi)</math>, <math>K_\phi = E_\phi h^3 / 12(1 - \mu_x \mu_\phi)</math></p> <p><math>k</math> : <math>h^2 / 12R^2</math></p> <p><math>M_x, M_\phi</math> : 합모우멘트(단위 길이당의 굽힘 모우멘트)</p> <p><math>N_x, N_\phi</math> : 합응력(단위 길이당의 막력)</p> <p><math>R</math> : 셸반경</p> <p><math>\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}</math> : 축방향, 원주방향, 반경방향의 변위</p>	<p><math>u, v, w</math> : 축방향, 원주방향, 반경방향의 무차원변위  <math>u = \bar{u}/R</math>, <math>v = \bar{v}/R</math>, <math>w = \bar{w}/R</math></p> <p><math>\alpha</math> : <math>L/R</math></p> <p><math>\xi, \phi</math> : 축방향, 원주방향의 무차원 좌표계  <math>\xi = x/R</math>, <math>\phi = y/R</math></p> <p><math>\lambda^4</math> : <math>3(1 - \bar{\nu}^2)(R/h)^2 H^4</math></p> <p><math>\mu_x</math> : <math>x</math> 방향의 Poisson 비</p> <p><math>\mu_\phi</math> : <math>\phi</math> 방향의 Poisson 비</p> <p><math>\bar{\nu}</math> : <math>\sqrt{\mu_x \mu_\phi}</math></p> <p><math>\bar{\nabla}^2</math> : <math>\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + H^2 \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}</math></p> <p><math>\bar{\nabla}^4</math> : <math>\bar{\nabla}^2 \bar{\nabla}^2</math></p> <p><math>\bar{\nabla}^8</math> : <math>\bar{\nabla}^4 \bar{\nabla}^4</math></p>
---	---

1. 서 론

원통셸은 강도 대 중량비가 특히 높은 구조적 특징에 의해서 항공기, 원자력발전소, 석유화학공장의 구조물 등에 널리 사용되고 있다.

\* 경희원, 충남대학교 기계설계학과  
 \*\* 충남대학교 대학원, 현재 대한조선공사

원통셀 구조물에서 직교이방성(orthotropy)은 티타늄, 흑연(graphite) 및 복합재료의 사용으로 인한 재료적 특성 또는 내부보강재의 부착, 주름성형(corrugation)으로 인한 구조적 특성으로 나타나는데 이러한 특성은 높은 압축강성을 가진으로 좌굴에 대한 저항력을 크게하는 이점이 있다.

한편 원통셀 요소에 지지대(support), 노즐(nozzle) 및 기타 부착물(attachment)의 접합시 이에 외부하중이 작용하여 극부적인 파손을 일으키는 경우가 많아서 이러한 문제에 관한 연구가 계속되어 오고 있다<sup>(1-4)</sup>. 직교이방성 원통셀의 경우 극부하증의 문제는 Kozarow<sup>(1)</sup>, Kliger<sup>(3)</sup>, Artiukhin<sup>(4)</sup> 등에 의해 연구가 되었는데 Kozarow는 Love의 등방성(isotropic) 셀이론에 기초하여 직교이방성 원통셀의 지배방정식 및 일반해를 구하였고, Kliger는 원통셀의 두께방향의 전단계수를 고려한 비교적 두꺼운 원통셀에 대해 사각분포하중의 경우에 해석을 하였으며, Artiukhin은 Ambartsumian의 이방성 원통셀 방정식으로부터 특수 직교이방성(special orthotropy)으로 간주하여 집중하중의 경우에 그 해석결과를 보였다.

본 연구에서는 기존연구에 비하여 해의 형태가 간단하고 비교적 오차가 적은 해를 구하기 위하여 Morley-Koiter<sup>(5-8)</sup>의 등방성 원통셀 이론에 기초하여 직교이방성 원통셀의 지배방정식을 유도하고 반경방향의 극부하증(사각분포하중, 집중하중, 축방향 및 원주방향 모멘트)하에서 원통셀의 변위 및 응력상태를 2중 Fourier 급수를 적용하여 해석하였으며 수치예를 통하여 이들 값의 직교이방특성 및 셀형상에 따른 영향을 고찰하였다.

### 2. 지배방정식의 유도

직교이방성 원통셀의 지배방정식을 Morley-Koiter<sup>(5-8)</sup>의 등방성 원통셀 이론에 기초하여 유도한다. 본 유도과정에서 직교이방성 재료의 전단계수  $G_{x\phi}$ 는 탄성계수  $E_x, E_\phi$ 와 프와송 비  $\mu_x, \mu_\phi$ 로 다음의 식 (1)과 같이 표시되는 특수 직교이방성<sup>(10,11)</sup>으로 간주하였고 직교이방성의 주방향은 좌표축과 일치하게 설정하였다.

$$G_{x\phi} = \frac{(E_x E_\phi)^{1/2}}{2[1 + (\mu_x \mu_\phi)^{1/2}]} = G_{av} \quad (1)$$

Fig. 1에서는 해석모델인 셀의 형상과 변위의 무차원량 및 단위길이당의 내력, 모멘트에 대한 부호규약을 보여준다.

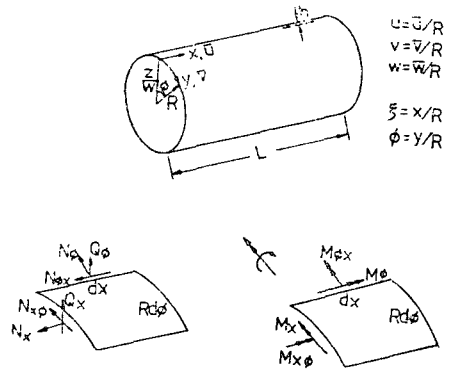


Fig. 1 Shell geometry and sign convention

직교이방성 원통셀의 변형에너지는 신장 및 압축성분(membrane component)과 굽힘성분(bending component)의 합으로서 다음과 같이 얻어진다.

$$U = U_m + U_b = \int \left\{ \frac{D_x}{2} [u'^2 + H^4 (v-w)^2 + 2\mu H^2 u' (v-w)] + \frac{1-\bar{\mu}}{2} H^2 (u'+v')^2 + \frac{K_x}{2R^2} [w''^2 + 2\mu H^2 w'' (w''+v'') + H^4 (w''+v'')^2 + 2(1-\bar{\mu}) H^2 (w'' - \frac{1}{4}u' + \frac{3}{4}v')^2] \right\} ds \quad (2)$$

여기서  $D_x = \frac{E_x h}{1-\bar{\mu}^2}$ ,  $K_x = \frac{E_x h^3}{12(1-\bar{\mu}^2)}$ ,  $H^4 = \frac{E_\phi}{E_x}$ ,  $\bar{\mu} = (\mu_x \mu_\phi)^{1/2}$ 이며 ( ' ), ( '' )는  $\xi$  및  $\phi$ 에 대한 편도함수,  $ds$ 는 셀 중앙면에서의 미소면적을 나타낸다.

Koiter 형태의 수정변형에너지(modified strain energy)<sup>(7)</sup>를 구하기 위해 식 (2)의 적분인자(integrand)에 비해 무시할 수 있는 미소항을 다음과 같이 설정한다.

$$\frac{K_x}{2R^2} [-2(1-\bar{\mu}) H^2 u' (w''+v'') + 2H^2 (v-w) (w''+H^2 w'' + H^2 v'') - \frac{3}{8}(1-\bar{\mu}) H^2 (u'+v')^2 - (1-\bar{\mu}) H^2 (u'+v') (w'' - \frac{1}{4}u' + \frac{3}{4}v'') + H^4 (v-w)^2] \quad (3)$$

따라서 (3)항을 식 (2)의 항에 결합하고 반경방향 하중 항을 고려하면 직교이방성 원통셀의 수정 에너지 범함수(modified energy functional)는 다음과 같이 얻어진다.

$$P_2(U) = \int \left\{ -ZRw + \frac{D_x}{2} [u'^2 + H^4 (v-w)^2 + 2\mu H^2 u' (v-w)] + \frac{1-\bar{\mu}}{2} H^2 (u'+v')^2 + \frac{K_x}{2R^2} [w''^2 + H^4 w''^2 + 2\mu H^2 w'' w'' + 2(1-\bar{\mu}) H^2 w''^2 + 2H^2 w (w'' + H^2 w'') + H^4 w^2 + 2(1-\bar{\mu}) H^2 (u'v' - u'v'')] \right\}$$

$$+u'w''-u'w'+v'w''-v'w']\} ds \quad (4)$$

여기서  $Z$ 는 단위면적 당의 반경방향 하중이다.

식 (4)에서 변분법(variational methods)을 적용하면 다음과 같은 변위평형 방정식(displacement equilibrium equations)이 얻어진다.

$$u'' + \frac{1-p}{2} H^2 v'' + \frac{1+p}{2} H^2 v' - p H^2 w' = 0 \quad (5)$$

$$\frac{1+p}{2} H^2 u' + \frac{1-p}{2} H^2 v'' + H^4 v'' - H^4 w' = 0 \quad (6)$$

$$p H^2 u' + H^4 v' - H^4 w - k(\bar{\nabla}^2 + H^2)w = -\frac{R}{D_x} Z \quad (7)$$

$$\text{여기서 } \bar{\nabla}^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + H^2 \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}, \quad k = \frac{h^2}{12R^2}$$

식 (5)~(7)로부터  $w, u, v$ 가 서로 독립적으로 표시되는 식으로 변환하면 다음과 같은 식으로 된다. 이 식이 본 직교이방성 원통셀의 지배 방정식이다.

$$\bar{\nabla}^4(\bar{\nabla}^2 + H^2)^2 w + 4\lambda^4 w'''' = \frac{R^3}{K_x} \bar{\nabla}^4 Z \quad (8)$$

$$\bar{\nabla}^4 u = -H^4 w'' + p H^2 w'' \quad (9)$$

$$\bar{\nabla}^4 v = H^4 w'' + (2+p)H^2 w'' \quad (10)$$

여기서

$$\lambda^4 = 3(1-p^2)(R/h)^2 H^4 \quad (11)$$

식 (8)과 관련하여 Flügge, Vlasov 및 Donnell 형태의 변위  $w$ 와 하중  $Z$ 간의 평형 방정식을 유도하면 다음과 같은 방정식이 얻어진다.

Flügge 형태 방정식 ;

$$\bar{\nabla}^4(\bar{\nabla}^2 + H^2)^2 w + 4\lambda^4 w'''' + 2(1-p)(H^6 w'' + H^6 w'' - H^2 w''') = \frac{R^3}{K_x} \bar{\nabla}^4 Z \quad (12)$$

Vlasov 형태 방정식 ;

$$\bar{\nabla}^4(\bar{\nabla}^2 + H^2)^2 w + 4\lambda^4 w'''' + 2(1-p)(H^6 w'' - H^2 w''') = \frac{R^3}{K_x} \bar{\nabla}^4 Z \quad (13)$$

Donnell 형태 방정식 ;

$$\bar{\nabla}^8 w + 4\lambda^4 w'''' = \frac{R^3}{K_x} \bar{\nabla}^4 Z \quad (14)$$

### 3. 일반해의 유도

앞에서 구한 지배 방정식[식 (8)~(10)]의 일반해를 Bijlaard<sup>(9)</sup>의 해석방법에 따라 유도한다. 여기서 원통셀의 양단은 국부 하중의 효과를 고려하여 단순지지된 것으로 간주한다<sup>(3,9)</sup>.

#### 3.1. 해석절차

양단 단순지지된 원통셀의 경계조건을 만족하는 변

위  $w, u, v$ 와 반경방향 하중  $Z$ 를 다음과 같이 2중-무한 Fourier 급수 형태로 둔다.

$$\left. \begin{aligned} w &= \sum_n \sum_n w_{nn} \cos m\phi \sin \frac{n\pi\xi}{\alpha} \\ u &= \sum_n \sum_n u_{nn} \cos m\phi \cos \frac{n\pi\xi}{\alpha} \\ v &= \sum_n \sum_n v_{nn} \sin m\phi \sin \frac{n\pi\xi}{\alpha} \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

$$Z = \sum_n \sum_n Z_{nn} \cos m\phi \sin \frac{n\pi\xi}{\alpha} \quad (16)$$

여기서

$$\alpha = \frac{L}{R}, \quad \xi = \frac{x}{R}$$

식 (15), (16)을 식 (8)~(10)에 대입하여 Fourier 급수의 계수간의 관계식을 구하면 다음과 같다.

$$w_{nn} = \Phi^{(1)}{}_{nn} Z_{nn} \quad (17)$$

여기서

$$\begin{aligned} \Phi^{(1)}{}_{nn} &= \frac{R^3}{K_x} \left[ \left( \frac{n\pi}{\alpha} \right)^2 + (Hm)^2 \right]^2 / \left[ \left( \frac{n\pi}{\alpha} \right)^2 + (Hm)^2 \right]^2 \times \left[ \left( \frac{n\pi}{\alpha} \right)^2 + (Hm)^2 - H^2 \right]^2 \\ &+ 4\lambda^4 \left( \frac{n\pi}{\alpha} \right)^4 \end{aligned} \quad (18)$$

$$U_{nn} = \Phi^{(1)}{}_{nn} \Phi^{(2)}{}_{nn} Z_{nn} \quad (19)$$

여기서

$$\begin{aligned} \Phi^{(2)}{}_{nn} &= \left[ (H^2 m)^2 \frac{n\pi}{\alpha} - p H^2 \left( \frac{n\pi}{\alpha} \right)^3 \right] / \left[ \left( \frac{n\pi}{\alpha} \right)^2 + (Hm)^2 \right]^2 \end{aligned} \quad (20)$$

$$V_{nn} = \Phi^{(1)}{}_{nn} \Phi^{(3)}{}_{nn} Z_{nn} \quad (21)$$

여기서

$$\begin{aligned} \Phi^{(3)}{}_{nn} &= \left[ H^4 m^3 + H^2 (2+p) m \left( \frac{n\pi}{\alpha} \right)^2 \right] / \left[ \left( \frac{n\pi}{\alpha} \right)^2 + (Hm)^2 \right]^2 \end{aligned} \quad (22)$$

따라서 변위  $w, u, v$ 는 다음식으로 표시된다.

$$\left. \begin{aligned} w &= \sum_n \sum_n \Phi^{(1)}{}_{nn} Z_{nn} \cos m\phi \sin \frac{n\pi\xi}{\alpha} \\ u &= \sum_n \sum_n \Phi^{(1)}{}_{nn} \Phi^{(2)}{}_{nn} Z_{nn} \cos m\phi \cos \frac{n\pi\xi}{\alpha} \\ v &= \sum_n \sum_n \Phi^{(1)}{}_{nn} \Phi^{(3)}{}_{nn} Z_{nn} \sin m\phi \sin \frac{n\pi\xi}{\alpha} \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

한편 합응력(stress resultants)  $N_x, N_\phi$ 와 모우멘트(stress couples)  $M_x, M_\phi$ 는 식 (4)로부터 다음의 형태로 얻어진다.

$$\left. \begin{aligned} N_x &= D_x [u' + p H^2 (v' - w) + k(1-p) H^2 (v' + w'')] \\ N_\phi &= D_\phi \left[ \frac{p}{H^2} u' + (v' - w) + k \frac{1-p}{H^2} (u' - w'') \right] \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

$$\left. \begin{aligned} M_x &= -\frac{K_x}{R} \left[ w'' + p H^2 w'' + H^2 w - (1-p) H^2 v \right] \\ M_\phi &= -\frac{K_\phi}{R} \left[ \frac{p}{H^2} w'' + w'' + w + \frac{1-p}{H^2} u' \right] \end{aligned} \right\}$$

여기서

$$D_\phi = \frac{E_\phi h}{1-\mu^2}, \quad K_\phi = \frac{E_\phi h^3}{12(1-\mu^2)}$$

따라서 식 (23)을 식 (24)에 적용하여 정리하면  $N_x$ ,  $N_\phi$  및  $M_x$ ,  $M_\phi$ 는 다음과 같이 공식화된다.

$$\left. \begin{aligned} N_x &= -D_x \sum_n \sum_n \phi^{(1)}_{nn} Z_{nn} \left\{ p H^2 + k(1-p) H^2 m^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{n\pi}{\alpha} \phi^{(2)}_{nn} - [p H^2 m + k(1-p) H^2 m] \right. \\ &\quad \left. \phi^{(3)}_{nn} \right\} \cos m\phi \sin \frac{n\pi\xi}{\alpha} \\ N_\phi &= -D_\phi \sum_n \sum_n \phi^{(1)}_{nn} Z_{nn} \left\{ 1 - k \frac{1-p}{H^2} \left( \frac{n\pi}{\alpha} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + \left[ \frac{p}{H^2} \frac{n\pi}{\alpha} + k \frac{1-p}{H^2} \frac{n\pi}{\alpha} \right] \phi^{(2)}_{nn} \right. \\ &\quad \left. - m \phi^{(3)}_{nn} \right\} \cos m\phi \sin \frac{n\pi\xi}{\alpha} \\ M_x &= \frac{K_x}{R} \sum_n \sum_n \phi^{(1)}_{nn} Z_{nn} \left\{ \left( \frac{n\pi}{\alpha} \right)^2 - H^2 \right. \\ &\quad \left. + p H^2 m^2 + (1-p) H^2 m \phi^{(3)}_{nn} \right\} \\ &\quad \cos m\phi \sin \frac{n\pi\xi}{\alpha} \\ M_\phi &= \frac{K_\phi}{R} \sum_n \sum_n \phi^{(1)}_{nn} Z_{nn} \left\{ \frac{p}{H^2} \left( \frac{n\pi}{\alpha} \right)^2 - 1 + m^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{1-p}{H^2} \frac{n\pi}{\alpha} \phi^{(2)}_{nn} \right\} \cos m\phi \sin \frac{n\pi\xi}{\alpha} \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

### 3.2. 각 하중상태에서의 $Z_{nn}$ 및 변위, 응력

(1) 사각면적 상의 분포하중(Fig. 2)

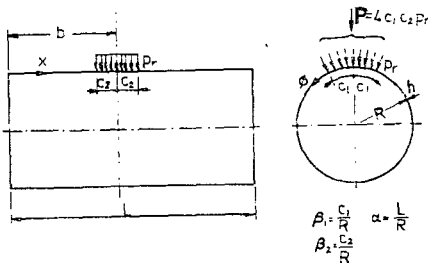


Fig. 2 Distributed load over rectangular area

하중의 중심점이  $x=b$ ,  $\phi=0$ 에 위치할 때 하중계수 (loading coefficient)  $Z_{nn}$ 은 다음과 같이 표시된다.

$$\left. \begin{aligned} Z_{nn} &= \frac{4\beta_1}{\pi^2} \frac{P_r}{n} \sin \frac{n\pi C_2}{L} \sin \frac{n\pi b}{L} \\ &\quad (m=0; n=1, 2, 3, \dots) \\ Z_{nn} &= \frac{8}{\pi^2} \frac{P_r}{mn} \sin m\beta_1 \sin \frac{n\pi C_2}{L} \sin \frac{n\pi b}{L} \\ &\quad (m=1, 2, 3, \dots; n=1, 2, 3, \dots) \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

한편 하중의 중심점이  $x=L/2$ ,  $\phi=0$ 에 위치할 때  $Z_{nn}$ 은 식 (26)에서 다음식으로 된다.

$$\left. \begin{aligned} Z_{nn} &= (-1)^{n-1/2} \frac{4\beta_1}{\pi^2} \frac{P_r}{n} \sin \frac{n\pi\beta_2}{\alpha} \\ &\quad (m=0; n=1, 3, 5, \dots) \\ Z_{nn} &= (-1)^{n-1/2} \frac{8}{\pi^2} \frac{P_r}{mn} \sin m\beta_1 \sin \frac{n\pi\beta_2}{\alpha} \\ &\quad (m=1, 2, 3, \dots; n=1, 3, 5, \dots) \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

여기서  $\beta_1=C_1/R$ ,  $\beta_2=C_2/R$

따라서  $Z_{nn}$ 을 식 (23)과 식 (24)에 적용하면 변위와 합응력, 모우멘트가 구해진다.

(2) 집중하중(Fig. 3)

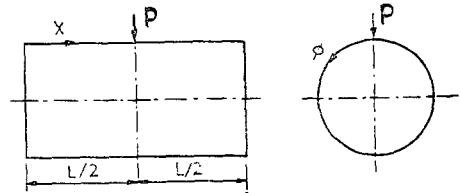


Fig. 3 Concentrated load

집중하중  $P$ 는 분포하중  $P_r$ 의 합력으로서

$$P = 4\beta_1\beta_2 R^2 P_r, \quad \text{또는} \quad P_r = \frac{P}{\beta_1\beta_2 R^2} \quad (28)$$

로 표시되므로 하중 작용점이  $x=L/2$ ,  $\phi=0$ 에 위치할 때  $Z_{nn}$ 은 식 (27)로부터 다음과 같이 표시된다.

$$\left. \begin{aligned} Z_{nn} &= (-1)^{n-1/2} \frac{P}{\pi R^2 \alpha} \quad (m=0; n=1, 3, 5, \dots) \\ Z_{nn} &= (-1)^{n-1/2} \frac{2P}{\pi R^2 \alpha} \quad (m=1, 2, 3, \dots; n=1, 3, 5, \dots) \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

따라서 식 (29)를 식 (23)과 식 (25)에 적용하면 합응력, 모우멘트가 구해진다.

(3)  $k$ 개의 사각면적 상의 분포하중(Fig. 4)

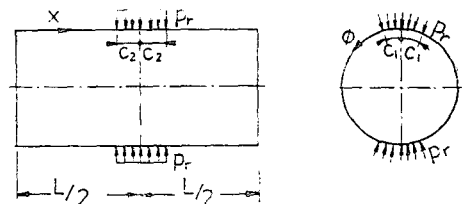


Fig. 4  $k$ -Distributed loads over rectangular area ( $k=2$ )

$k$  개의 분포하중이  $x = \frac{L}{2}$  의 원주 상에서 등간격으로 위치할 때  $Z_{mn}$  은 다음과 같이 표시된다.

$$\left. \begin{aligned} Z_{n0} &= (-1)^{n-1/2} k \frac{4\beta_1}{\pi^2} \frac{P_r}{n} \sin \frac{n\pi\beta_2}{\alpha} \quad (m=0; n=1, 3, 5, \dots) \\ Z_{nm} &= (-1)^{n-1/2} k \frac{8}{\pi^2} \frac{P_r}{kmn} \sin km\beta_1 \sin \frac{n\pi\beta_2}{\alpha} \quad (m=1, 2, 3, \dots; n=1, 3, 5, \dots) \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

이 경우 변위 및 하중의 급수형태는 식 (15), (16) 에 대신하여 다음의 형태로 표시된다.

$$\left. \begin{aligned} w &= \sum_n \sum_m w_{mn} \cos km\phi \sin \frac{n\pi\xi}{\alpha} \\ u &= \sum_n \sum_m u_{mn} \cos km\phi \cos \frac{n\pi\xi}{\alpha} \\ v &= \sum_n \sum_m v_{mn} \sin km\phi \sin \frac{n\pi\xi}{\alpha} \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

$$Z = \sum_n \sum_m Z_{mn} \cos km\phi \sin \frac{n\pi\xi}{\alpha} \quad (32)$$

따라서 식 (18), (20), (22)에서  $m$  은  $km$  으로 대체되며, 또한 식 (23)과 식 (25) 중의  $m$  도  $km$  으로 대체되어서 변위 및 합응력, 모우멘트가 구해진다.

(4)  $k$  개의 집중하중(Fig. 5)

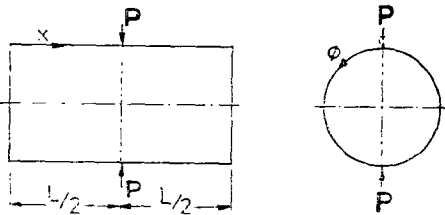


Fig. 5  $k$ -Concentrated loads( $k=2$ )

$k$  개의 집중하중이  $x = \frac{L}{2}$  의 원주 상에서 등간격으로 위치할 때  $Z_{mn}$  은 다음과 같이 표시된다.

$$\left. \begin{aligned} Z_{n0} &= (-1)^{n-1/2} k \frac{P}{\pi R^2 \alpha} \quad (m=0; n=1, 3, 5, \dots) \\ Z_{nm} &= (-1)^{n-1/2} k \frac{2P}{\pi R^2 \alpha} \quad (m=1, 2, 3, \dots; n=1, 3, 5, \dots) \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

이 경우 변위 및 하중의 급수형태는 식 (31), (32)로 표시되어 (3)의 경우와 같은 사항이 적용되어 변위 및

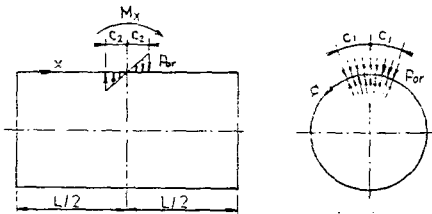


Fig. 6 Axial moment over rectangular area

합응력, 모우멘트가 구해진다.

(5) 사각면적 상의 축방향 모우멘트(Fig. 6)

축방향 모우멘트가 Fig. 6 에서와 같이 반경방향의 하중형태로 작용한다고 간주할 때  $Z_{mn}$  은 다음과 같이 표시된다.

$$\left. \begin{aligned} Z_{n0} &= \frac{2\alpha'\beta_1}{\pi^3\beta_2} P_{cr} \frac{(-1)^n}{n_2} \left( \sin \frac{n\pi\beta_2}{\alpha'} - \frac{n\pi\beta_2}{\alpha'} \cos \frac{n\pi\beta_2}{\alpha'} \right) \quad (m=0; n=1, 2, 3, \dots) \\ Z_{nm} &= \frac{4\alpha'}{\pi^3\beta_2} P_{cr} \frac{(-1)^n}{m^2 n} \left( \sin \frac{n\pi\beta_2}{\alpha'} - \frac{n\pi\beta_2}{\alpha'} \cos \frac{n\pi\beta_2}{\alpha'} \right) \quad (m=1, 2, 3, \dots; n=1, 2, 3, \dots) \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

여기서

$$\alpha' = \alpha/2 = L/2R$$

이 경우 변위 및 하중의 급수형태는 식 (15), (16)에 대신하여 다음의 형태로 표시된다.

$$\left. \begin{aligned} w &= \sum_n \sum_m w_{mn} \cos m\phi \sin \frac{n\pi\xi}{\alpha'} \\ u &= \sum_n \sum_m u_{mn} \cos m\phi \cos \frac{n\pi\xi}{\alpha'} \\ v &= \sum_n \sum_m v_{mn} \sin m\phi \sin \frac{n\pi\xi}{\alpha'} \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

$$Z = \sum_n \sum_m Z_{mn} \cos m\phi \sin \frac{n\pi\xi}{\alpha'} \quad (36)$$

따라서 식 (18), (20), (22)에서  $\alpha$  는  $\alpha'$  로 대체되며, 또한 식 (23)과 식 (25) 중의  $\alpha$  도  $\alpha'$  로 대체되어서 변위 및 합응력, 모우멘트가 구해진다.

(6) 사각면적 상의 원주방향 모우멘트(Fig. 7)

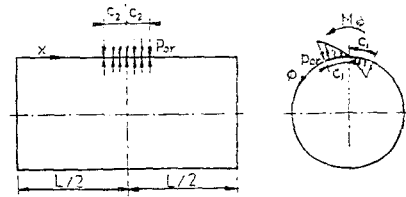


Fig. 7 Circumferential moment over rectangular area

원주방향 모우멘트가 Fig. 7 에서와 같이 반경방향의 하중형태로 작용한다고 간주할 때  $Z_{mn}$  은 다음과 같이 표시된다.

$$\begin{aligned} Z_{n0} &= (-1)^{n-1/2} \frac{8}{\pi^2\beta_1} \frac{P_{cr}}{m^2 n} (\sin m\beta_1 - m\beta_1 \cos m\beta_1) \\ &\quad \sin \frac{n\pi\beta_2}{\alpha} \quad (m=1, 2, 3, \dots; n=1, 3, 5, \dots) \end{aligned} \quad (37)$$

이 경우 변위 및 하중의 급수형태는 식 (15), (16)에 대신하여 다음의 형태로 표시된다.

$$\left. \begin{aligned} w &= \sum_m \sum_n w_{mn} \sin m\phi \sin \frac{n\pi\xi}{\alpha} \\ u &= \sum_m \sum_n u_{mn} \sin m\phi \cos \frac{n\pi\xi}{\alpha} \\ v &= \sum_m \sum_n v_{mn} \cos m\phi \sin \frac{n\pi\xi}{\alpha} \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

$$Z = \sum_m \sum_n Z_{mn} \sin m\phi \sin \frac{n\pi\xi}{\alpha} \quad (39)$$

따라서 식 (21)에서 부호가 바뀌어 식 (23)의 변위  $v$  는 다음식으로 표시되며,  $w$  와  $u$  표현식 중의  $\cos m\phi$  는  $\sin m\phi$  로 대체된다.

$$v = - \sum_m \sum_n \Phi_{mn}^{(1)} \Phi_{mn}^{(3)} Z_{mn} \cos m\phi \sin \frac{n\pi\xi}{\alpha} \quad (40)$$

한편 식 (25)에서도  $\cos m\phi$  는  $\sin m\phi$  로 대체되어 합응력, 모우멘트가 구해진다.

#### 4. 수치예 및 고찰

본 해석에 의한 직교이방성 원통셀의 응력 및 변위에 대한 수치예를 다음의 Figs. 8~15에 보인다. 수치 계산에서는 무차원 매개변수를 도입하여 수행하였으며 여기서  $E_\phi/E_x = \mu_\phi/\mu_x$  인 관계로 부터  $\mu_{max}$  는 0.3으로 설정하였고, 선도 중에서  $E_\phi/E_x=1$  은 등방성 원통셀의 경우이다. 한편 기존연구와의 비교를 위해 사각분포하중의 경우 Kliger<sup>(3)</sup>의 연구결과와, 집중하중의 경우 Artiukhin<sup>(4)</sup>의 연구결과를 함께 표시하였다.

Figs. 8~10에서는 사각분포하중의 작용면적이 감소할수록 즉, 하중이 집중됨에 따라 응력이 증가함을 보인다. Figs. 11~13에서는 하중작용면적이 일정한 경우 작용면적의 분포형상이 정방형에 가까운 부근에서 최대 응력

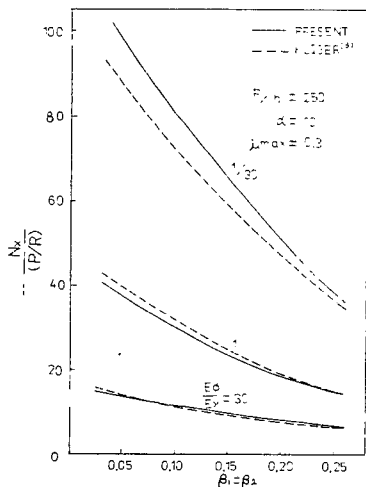


Fig. 8 Axial stress resultant versus half loaded length for a square load

이 발생함을 알 수 있다. Figs. 14, 15에서는 집중하중의 작용점에서의 변위는  $L/R$  이 증가할수록, 직교이방성 원통셀 매개변수  $\lambda$  가 감소할수록 증가함을 보인다. 또한 직교이방특성( $E_\phi/E_x$ )에 따른 응력 및 변위의 영향이 등방성 셀의 경우( $E_\phi/E_x=1$ )와 비교할 때 큰것을 알 수 있다.

본 해석에 의한 수치예와 비교한 기존 연구결과 중 Kliger는 직교이방성 원통셀의 두계방향의 전단계수를 고려하여  $E_i > E_j$  ( $i, j=x, \phi$ )일 때  $E_i/G_{iz}=2.5$ ,  $E_i/G_{iz}=2.6$  으로 가정하여 계산하였고, Artiukhin은 Ambartsumian의 이방성 방정식으로부터 본 해석에서와 같이 식 (1)로 표시되는 특수 직교이방성으로 간주하여 계산하였다. 본 연구에 의한 해석에서는 지배 방정식

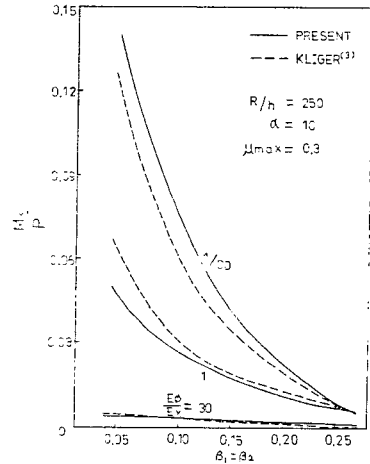


Fig. 9 Axial stress couple versus half loaded length for a square load

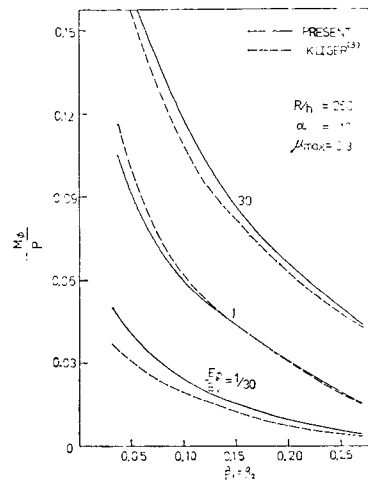


Fig. 10 Circumferential stress couple versus half loaded length for a square load

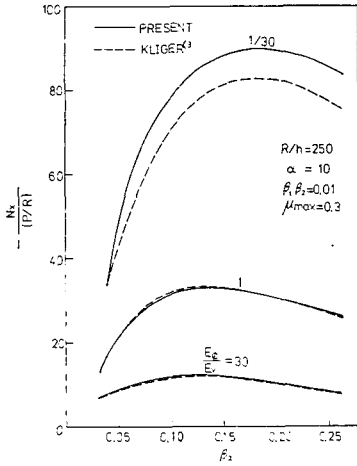


Fig. 11 Axial stress resultant versus half axial loaded length for a rectangular load

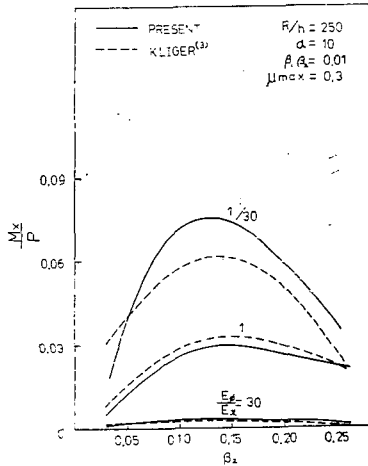


Fig. 12 Axial stress couple versus half axial loaded length for a rectangular load

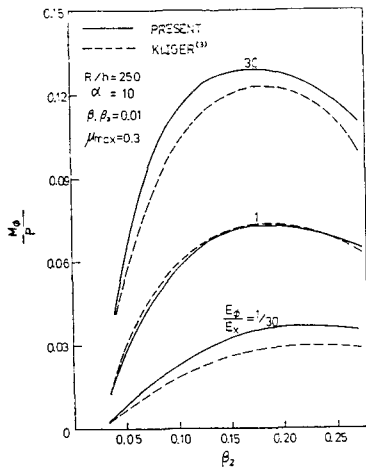


Fig. 13 Axial stress couple versus half axial loaded length for a rectangular load

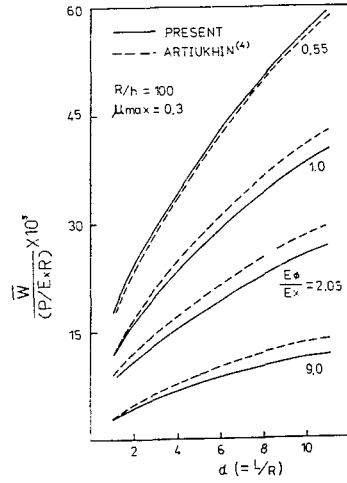


Fig. 14 Deflection versus length to radius ratio for a concentrated load

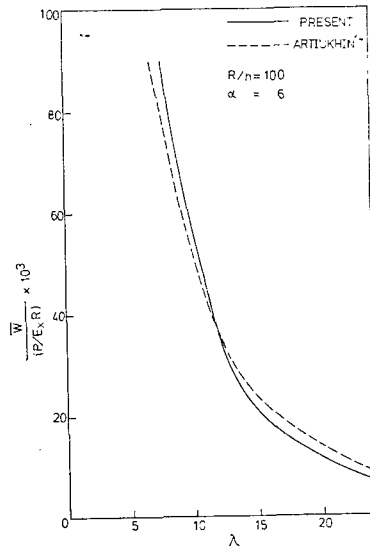


Fig. 15 Deflection versus orthotropic shell parameter for a concentrated load

의 형태가 기존연구와 비교하여 단순화 되었으며 극부하중의 경우 수치예를 통하여 해의 정밀도가 충분히 유지되는 것으로 여겨진다.

### 5. 결 론

(1) 본 연구에서는 Morley-Koiter의 등방성 원통셀 이론에 기초하여 직교이방성 원통셀의 지배방정식을 유도하였다. 또한 기존의 등방성 원통셀방정식과 유사한 형태를 갖는 Flügge, Vlasov, Donnell 형태의 직교이방성 원통셀의 지배방정식이 유도됨을 보였다.

(2) 반경방향의 국부하중을 받는 문제의 일반해를 구했으며, 수치예를 통하여 기존연구와 비교한 결과 비교적 잘 일치 하였으며, 기존 연구에 비하여 그 해법이 단순화 되었다.

(3) 본 해석을 확장하여 원통셸 요소와 노즐 및 파이프 교차부(interseciton) 해석에 이용할 수 있을 것이다.

후 기

본 연구는 1983 년도 한국과학재단의 연구비에 의하여 연구되었으며, 관계자 여러분께 깊은 감사를 드립니다.

References

- (1) Kozarow, M., "The Effect of Concentrated Loads on Orthotropic Cylindrical Shells", Theory of Plates and Shells, Bratislava, pp.345~363, 1966
- (2) Schwaighofer, J., and Microys, H.F., "Orthotropic Cylindrical Shells under Line Load", Journal of Applied Mechanics, Vol. 46, pp.356~362, 1979
- (3) Klinger, H.S., Forristall, G.Z., and Vinson, J.R., "Stresses in Circular Cylindrical Shells of Composite Materials Subjected to Localized Loads", AFOSR Technical Report No. 73-0494 TR, 1973
- (4) Artiukhin, Iu. P., "Solution for One-Layer and Many-Layers Orthotropic Shells under Local Loads", S. Issledovania po Teorii Plastini Obo-lochek, 4, Izd. Kazanskogo U-ta, 1966
- (5) Morley, L.S.D., "An Improvement on Donnell's Approximation for Thin-Walled Circular Cylinders", Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics, Vol. 12, Part 1, pp.89~99, 1959
- (6) Koiter, W.T., "General Equations of Elastic Stability for Thin Shells", Proceedings of the Symposium on the Theory of Shells in Honor of L.H. Donnell, University of Houston, pp.187~227, 1967
- (7) Mangelsdorf, C.P., "Koiter's Modified Energy Functional for Circular Cylindrical Shells", AIAA Journal, Vol. 9, No. 10, pp.2098~2099, 1971
- (8) Mangelsdorf, C.P., "The Morley-Koiter Equations for Thin Walled Circular Cylindrical Shells", Journal of Applied Mechanics, pp.961~965, Vol. 40, 1973
- (9) Bijlaard, P.P., "Stresses from Local Loadings in Cylindrical Pressure Vessels", Trans. ASME, Vol. 72, pp.805~816, 1955
- (10) Erdogan, F., Ratwani, M., and Yüceoglu U., "On the Effects of Orthotropy in a Cracked Cylindrical Shells", International Journal of Fracture, Vol. 10, No. 3, pp.369~374, 1974
- (11) Delate, F., and Erdogan, F., "The Crack Problem in a Specially Orthotropic Shell with Double Curvature", Engineering Fracture Mechanics, Vol. 18, No. 3, pp.529~544, 1973
- (12) Gill, S.S., 'The Stress Analysis of Pressure Vessels and Pressure Vessel Components', Pergamon Press, 1970
- (13) Vinson, J.R., and Chou, T.W., 'Composite Materials and Their Use in Structures', Applied Science Publ., 1975
- (14) Lukasiewicz, S., 'Local Loads in Plates and Shells', Pwn-Polish Scientific Publ. pp.405~410, 1979