

<論 文>

평면 응력 Bore Expanding 에 있어서의 평면 이방성의 영향

주진원\* · 이종홍\*\* · 양동열\*

(1984년 4월 11일 접수)

The Effect of Planar Anisotropy in Plane-Stress Bore Expanding

Jin Won Joo, Choong<sup>3</sup>Hong Lee and Dong Yol Yang

Abstract

The matrix method, as an effective FEM formulation for the analysis of rigid-plastic deformation, was applied to the bore expanding of anisotropic sheet metal. The effect of planar anisotropy on sheet metal deformation was studied for bore expanding process under the uniform radial stretching condition, and the results were compared with isotropic and normal anisotropic solutions. Experiments were carried out using a flat punch for cold-rolled sheet metal.

The experimental results were compared with computations from the matrix method with the boundary conditions corresponding to actual experiment. Both in theory and experiment, it is found that the maximum thinning which results in necking occurs in the direction of the minimum R-value. The results also suggest that the matrix method is efficient for analyzing planar anisotropic sheet metal.

The comparison between theory and experiment suggests that Hill's theory of planar anisotropy is somewhat exaggerated. However, the theoretical predictions are in qualitative agreement with the experimental results.

기 호 설 명

$A$  : 요소의 면적  
 $F_x, U_x$  : 압연 방향의 외력 및 속도  
 $F_y, U_y$  : 횡 방향의 외력 및 속도  
 $R_n$  : 구멍의 반지름  
 $R_\alpha$  : 압연 방향으로부터 각도  $\alpha$  방향의 Lankford 계수  
 $T$  : 응력 벡터(traction vector)

$U$  : 요소내의 속도  
 $u, \Delta u$  : 절점 속도 및 절점 속도 증분  
 $U_0$  : 바깥 경계면의 반경 방향 속도  
 $v$  :  $x$  방향의 절점속도  
 $w$  :  $y$  방향의 절점속도  
 $Y_0$  : 항복 응력  
 $\beta$  : 수렴 계수(deceleration coefficient)  
 $\bar{\sigma}$  : 유효 응력(effective stress)  
 $\dot{\epsilon}$  : 유효 변형도율(effective strain rate)  
 $\sigma_x, \epsilon_x$  : 압연 방향의 응력 및 변형도

\* 정희원, 한국과학기술원

\*\* 정희원, 경방기계(주)

$\sigma_y, \epsilon_y$  : 횡 방향의 응력 및 변형도  
 $\tau_{xy}, \gamma_{xy}$  : 전단 응력 및 전단 변형도

1. 서론

금속 성형된 제품은 대체로 방향에 따라 다른 성질을 가지고 있으며, 그 중에서 냉간 압연 등의 냉간 성형 공정에 의한 판재 금속은 이러한 이방성의 성질이 두드러져, 이에 대한 성형을 다루는 데 있어서 이방성은 중요하게 다루어져야 할 문제이다.

Hill의 이방성 소성 이론<sup>(1)</sup>이 발표되면서 박판 금속의 성형성에 대하여 많은 연구<sup>(2,3)</sup>가 진행되었고, 전자 계산기의 발달로 수치적인 방법<sup>(4-7)</sup>이 박판 금속을 해석하는데 이용되기 시작하였다. 박판 금속의 내경확장(bore-expanding)에 대해서는 Yamada와 Koide<sup>(8)</sup>가 등방성 재료에 대하여, Parmar와 Mellor<sup>(9)</sup>는 직교 이방성(normal anisotropy) 재료에 대하여 증분 이론(incremental theory)을 사용하여 해석하였다. 그러나, 박판 금속에서는 평면 이방성(planar anisotropy)의 성질이 뚜렷하기 때문에, Hill이 제시한 이방성 소성 이론을 근거로 하고 C.H. Lee와 Kobayashi<sup>(10)</sup>가 개발한 매트릭스법(matrix method)을 이용하여 내경확장 문제를 해석한다.

본 논문에서는 반경 방향으로 균일하게 잡아당기는 문제에 대하여 등방성, 직교 이방성, 평면 이방성의 해를 비교하고, 성형성에 중요한 의미를 갖는 두께방향 변형도와 원주방향 응력의 분포에 대하여 해석한다. 또 냉간 압연된 철판을 사용하여 평저 펀치(flat punch)에 의한 스트레칭(stretching) 실험을 하고, 실험과 같은 경계 조건으로 시뮬레이션(simulation)하여 결과를 비교한다.

2. 이론 해석

Hill이 제시한 이방성 소성 이론으로부터 평면 응력 조건( $\sigma_z = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$ )하에서의 유효 응력과 유효 변형도율은 다음과 같이 정의된다.

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{3}{2} \left[ \frac{(G+H)\sigma_x^2 - 2H\sigma_x\sigma_y + (H+F)\sigma_y^2}{F+G+H} + 2N \cdot \tau_{xy}^2 \right]^{1/2}} \quad (1)$$

$$\bar{\epsilon} = \sqrt{\frac{2}{3} \left[ (F+G+H) \left\{ \frac{(G+H)\epsilon_y^2 + (F+H)\epsilon_x^2}{FG+GH+HF} + 2H\epsilon_x \cdot \epsilon_y + \frac{\gamma_{xy}^2}{2N} \right\} \right]^{1/2}} \quad (2)$$

유동 법칙을 이용하여 응력-변형도율의 관계를 구하면,

$$\sigma = \frac{\bar{\sigma}}{\bar{\epsilon}} \frac{D\bar{\epsilon}}{Dt} \quad (3)$$

여기서  $D = \frac{2(F+G+H)}{3(FG+GH+HF)}$

$$\begin{bmatrix} F+H & H & 0 \\ H & G+H & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3(FG+GH+HF)}{4N} \end{bmatrix}$$

이 된다.

여기서  $F, G, H, N$ 은 이방성을 나타내는 계수로 다음과 같이 표시된다.

$$R_{90} = \frac{H}{G}, R_{00} = \frac{H}{F}, R_{45} = \frac{2N-F-G}{F+G} \quad (4)$$

전체가 소성 영역에 있는 강소성체  $V$ 에 대한 변분 원리(variational principle)를 생각하면, 경계면  $S_u$ 에서 적합성(compatibility)조건과 속도 경계조건을 만족하는 등적 가용 속도장(kinematically admissible velocity field) 중에서, 정해(exact solution)는 다음에서 정의되는 범함수(functional)  $\Phi$ 를 최소로 하는 것이다.

$$\Phi = \int_V \sigma^T \underline{\underline{\epsilon}} dV - \int_{S_T} \underline{T}^T \underline{U} dS \quad (5)$$

각 요소내의 속도  $\underline{U}$ 와 변형도율  $\underline{\underline{\epsilon}}$ 은 각 요소의 절점 속도  $\underline{u}$ 로 표시할 수 있다.

$$\underline{U} = \begin{Bmatrix} v \\ w \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1 & 0 & q_2 & 0 & q_3 & 0 & q_4 & 0 \\ 0 & q_1 & 0 & q_2 & 0 & q_3 & 0 & q_4 \end{bmatrix} \underline{u} = \underline{N} \underline{u} \quad (6)$$

한편,  $q_1 = \frac{1}{4}(1-s)(1-t), q_2 = \frac{1}{4}(1+s)(1-t)$

$q_3 = \frac{1}{4}(1+s)(1+t), q_4 = \frac{1}{4}(1-s)(1+t)$

여기서  $s, t$ 는 국소 좌표제이다.

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v \\ w \end{Bmatrix} = \underline{B} \underline{u} \quad (7)$$

여기서

$$\underline{B} = \begin{bmatrix} Y_1 & 0 & Y_2 & 0 & Y_3 & 0 & Y_4 & 0 \\ 0 & X_1 & 0 & X_2 & 0 & X_3 & 0 & X_4 \\ X_1 & Y_1 & X_2 & Y_2 & X_3 & Y_3 & X_4 & Y_4 \end{bmatrix}$$

$X_1 = \frac{\partial q_1}{\partial x}, Y_1 = \frac{\partial q_1}{\partial y},$  등

식 (5)에 식 (3), (6), (7)을 대입하여 정리하면 다음과 같이 된다.

$$\Phi = \int_V \frac{\bar{\sigma}}{\bar{\epsilon}} \underline{u}^T \underline{K} \underline{u} dV - \int_{S_T} \underline{T}^T \underline{N} \underline{u} dS \quad (8)$$

여기서,

$$\underline{K} = \underline{B}^T \underline{D} \underline{B}$$

변분 원리에 의해서 정해는  $\Phi$ 를  $\underline{u}$ 에 대하여 미분 하여 그 값을 0으로 할 때 얻어진다.

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \underline{u}} = \sum_{n=1}^M \frac{\partial \Phi^{(m)}}{\partial \underline{u}} = 0 \quad (9)$$

여기서  $M$ 은 요소의 개수이다.

식 (8)을 식 (9)에 대입하여 정리하면,

$$\int_V \left( \frac{2\bar{\sigma}}{\bar{\epsilon}} \right) \underline{K} \underline{u} dV + \int_V (\underline{u}^T \underline{K} \underline{u}) \frac{\partial}{\partial \underline{u}} \left( \bar{\sigma} / \bar{\epsilon} \right) dV = \int_{S_T} \underline{N}^T \underline{T} dS \quad (10)$$

이 되고, 위의 비선형 방정식을 선형화하기 위하여, 다음과 같이 속도 벡터  $\underline{u}$ 에 증분  $\Delta \underline{u}$ 를 도입한다.

$$\underline{u} = \underline{u}^* + \Delta \underline{u} \quad (11)$$

Taylor 급수로 전개하여 2차항 이상을 무시하면 다음과 같이 근사시킬 수 있다.

$$\bar{\epsilon} = \bar{\epsilon}^* + \left( \frac{\partial \bar{\epsilon}^*}{\partial \underline{u}} \right) \cdot \Delta \underline{u} \quad (12)$$

식 (11), (12)를 식 (10)에 대입하여 정리하면 다음과 같이 된다.

$$\underline{P} \cdot \Delta \underline{u} = \frac{1}{Y} \underline{F} - \underline{H} \quad (13)$$

여기서

$$\underline{P} = 2 \int_V \left\{ \frac{1}{\bar{\epsilon}^*} \underline{K} + \left[ M - \frac{1}{(\bar{\epsilon}^*)^2} \underline{N} \right] \right\} dV$$

$$\underline{H} = \int_V \left\{ \frac{2}{\bar{\epsilon}^*} \underline{K} \underline{u}^* - \frac{1}{(\bar{\epsilon}^*)^2} \underline{u}^{*T} \underline{K} \underline{u}^* \underline{E} \right\} dV$$

$$\underline{F} = \int_{S_T} \underline{N}^T \underline{T} dS$$

$$\underline{A} = \frac{\partial \bar{\epsilon}^*}{\partial \underline{u}} \underline{T} \underline{E} = \underline{B}^T \underline{A}$$

$$\underline{M} = \frac{1}{(\bar{\epsilon}^*)^2} \left[ \frac{1}{\bar{\epsilon}^*} \underline{u}^{*T} \underline{K} \underline{u}^* \underline{E} - \underline{K} \underline{u}^* \right] \underline{E}^T$$

$$\underline{N} = \underline{E} \underline{u}^T \underline{K}$$

여기서 구한  $\Delta \underline{u}$ 를 앞에서 계산된  $\underline{u}^*$ 에 더하여 새로운 속도  $\underline{u}$ 를 구해내고,  $\Delta \underline{u}$ 가 0에 가까워질 때까지 축차(iteration)를 계속한다. 문제에 따라서, 오차가 갑자기 증가하여 수렴을 하지 않는 경우가 있다. 이 경우에는 다음과 같은 수렴 계수(deceleration coefficient)  $\beta$ 를 도입하여 수렴을 가능하게 한다<sup>(11)</sup>.

$$\underline{u} = \underline{u}^* + \beta \cdot \Delta \underline{u} \quad (0 < \beta \leq 1) \quad (14)$$

### 3. 균일한 스트레칭(Stretching)에 의한 내경 확장공정(Bore Expanding)

박판 금속의 가공에서 평면 이방성(planar anisotropy)의 영향을 알아보기 위하여, 평면 응력하에서의 내경확장공정을 생각해 보기로 한다. 이상적인 경우로 가운데 구멍이 있는 원형 박판의 가장자리에서 균일한 변위를 가하여 반경 방향으로 잡아당기는 경우에 대하여 해석한다(Fig. 1).

해석에 사용된 유한 요소는 4각형 선형 요소이며, 유한 요소 격자 분포도가 Fig. 2에 나타나 있다.

이론에 사용되는 모델은 두께 1mm, 내경 10mm, 외경 50mm 이고, 이방성 계수는  $R_{90}=1.32$ ,  $R_{45}=1.06$ ,  $R_{0}=1.69$ 이다. 응력-변형도 관계는 다음 식으로 표현된다.

$$\bar{\sigma} = Y_0 (1 + \bar{\epsilon} / \bar{\epsilon}_0)^n \quad (15)$$

여기서  $Y_0=1$ ,  $\bar{\epsilon}_0=0.08$ ,  $n=0.24$ 로 하였다. 압연 방향과 폭 방향에 대하여 대칭하다고 가정하므로 1/4 원만을 고려하여,  $x$  축(압연 방향)을 따라서는  $U_x=0$ ,

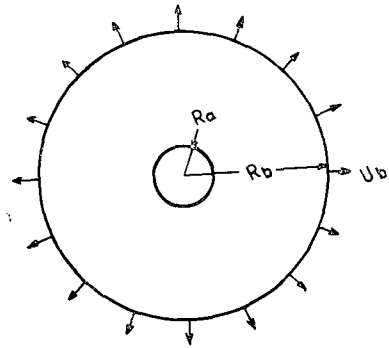


Fig. 1 Idealized bore expanding test

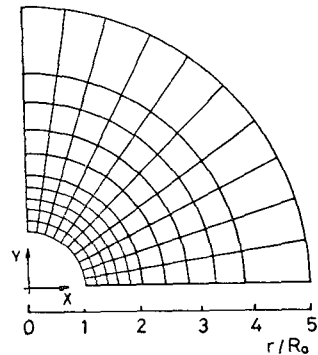


Fig. 2 Finite element mesh pattern

$F_x=0$ ,  $y$ 축(폭 방향)을 따라서는  $U_x=0$ ,  $F_y=0$ 의 경계 조건이 주어진다. 또, 바깥 경계면을 따라서는 반경 방향으로 균일하게  $U_r, U_\theta$ 가 주어지고, 나머지 부분에서는  $F_x=0$ ,  $F_y=0$ 의 경계 조건이 주어진다.

Fig. 3에 반경 방향의 변위,  $U_r$ 의 분포가 나타나 있다. 등방성의 경우 ( $\bar{R}=1.0$ )에 비해서 직교 이방성

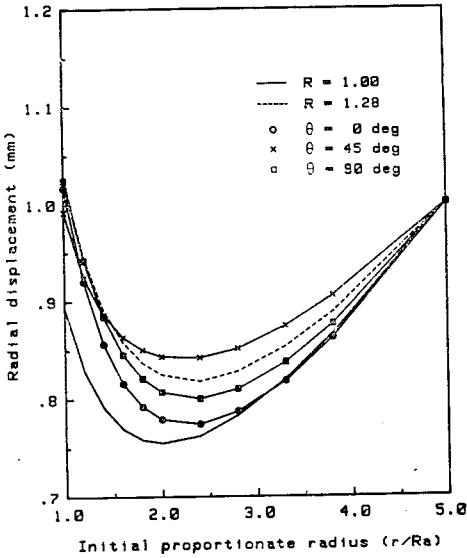


Fig. 3 Radial displacement distribution as functions of radius(uniform stretching)

의 경우 ( $\bar{R}=1.28$ )일 때 최고 14.0%까지의 차이를 보이며, 평면 이방성의 경우에는  $r/R_a=2.4$ 에서 직교 이방성의 경우와 최고 6.5%의 차이를 보인다. 또, 구멍 근처에서는 압연 방향에서  $U_r$ 이 가장 크고,  $R$ -값이 가장 작은 방향( $\theta=40.6^\circ$ )에서  $U_r$ 이 가장 크다.

Fig. 4는 두께 방향 변형도  $\epsilon_z$ 의 분포를 나타내고 있다. 등방성의 경우에서 보다, 직교 이방성의 경우에서  $\epsilon_z$ 의 구배(gradient)가 크다. 그러나, 평면 이방성의 경우에는 다른 분포를 보이고 있다. 즉,  $\theta=45^\circ$ 에서 구배가 가장 크며, 가장 얇아지는 지점도 이 부분에서 생기게 된다. 또한, 압연 방향과 폭 방향에서는 구멍 주위에서 보다, 구멍에서 약간 떨어진 곳에서의  $|\epsilon_z|$ 이 더 커진다. 구멍 주위에서는  $R$ 값이 가장 작은 곳( $\theta=40.6^\circ$ )에서  $|\epsilon_z|$ 이 가장 크고,  $R$ 값이 가장 큰 곳( $\theta=90^\circ$ )에서  $|\epsilon_z|$ 이 가장 작다. 구멍 주위에서 어느 정도 떨어진 곳에서는 이와 반대의 현상이 나타난다.

Fig. 5에 상당한 응력 집중 현상을 보이는 원주 방향 응력,  $\sigma_\theta$ 의 분포가 나타나 있다.  $\sigma_\theta$ 는  $\epsilon_z$ 와 함께 박판 금속의 성형성에 중요한 의미를 갖는데,  $\epsilon_z$ 의 경우와 같이  $\theta=0^\circ$ 와  $\theta=90^\circ$  근처에서는 구멍 주위에서 보다, 구멍에서 약간 떨어진 곳( $r/R_a=1.7$ )에서 최고값을 갖고,  $\theta=40.6^\circ$  근처에서 최고값을 갖는다. 구멍 근처에서 구배가 크고, 구멍에서 멀어질수록 구배는 작아진다.

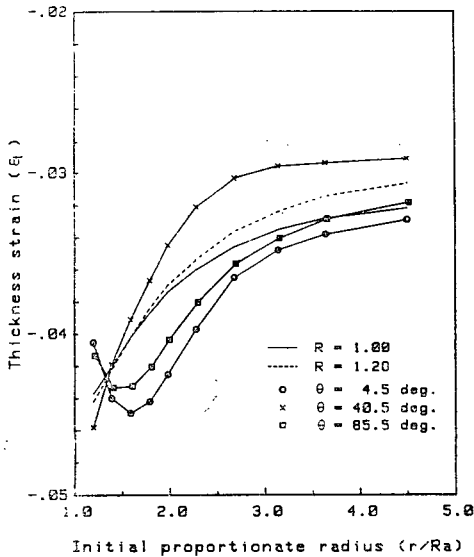


Fig. 4 Thickness strain distributions as functions of radius(uniform stretching)

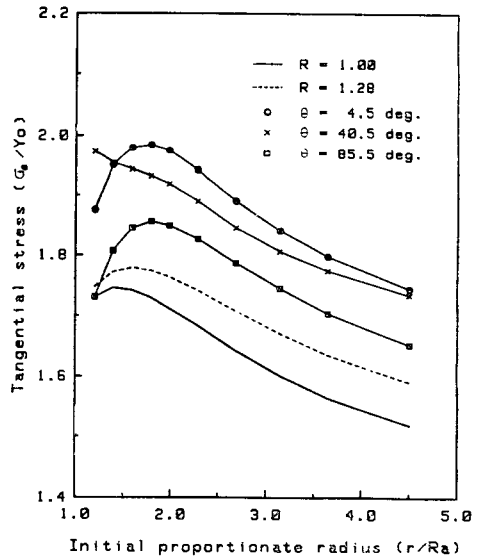


Fig. 5 Tangential stress distributions as functions of radius(uniform stretching)

위에서 평면 이방성의 경우에 두께 방향 변형도와 원주 방향 응력이 다같이 구멍 주위에서  $R$  값이 가장 작은 부분에서 최고값을 갖는다는 것을 알 수 있다. 이것으로 박판 금속의 스트레칭에서 파단이 일어나는 곳을 추측할 수 있다.

4. 실험 및 시뮬레이션

실험에서 사용하는 시편은 공간 압연된 철판으로, 두께 0.8mm, 지름 160mm인 원형 박판의 중앙에 지름 16mm의 구멍을 뚫어 사용한다. 식 (15)로 표시되는 재료의 성질은 Table 1과 같다.

Table 1 Material properties of steel sheet

	0°	45°	90°	Mean value
$Y_0(\text{kg/mm}^2)$	22.9	21.2	22.6	22.0
$\bar{\epsilon}_0$	0.0197	0.0182	0.0195	0.0189
$n$	0.273	0.242	0.256	0.253
$R$	1.32	1.06	1.69	1.28

변형 후의 변위를 측정하기 위하여 실제 계산에서 사용한 격자와 같게 photogridding 을 한다. 재료의 이방성 때문에, 평면상에서 균일하게 잡아 당기는 것은

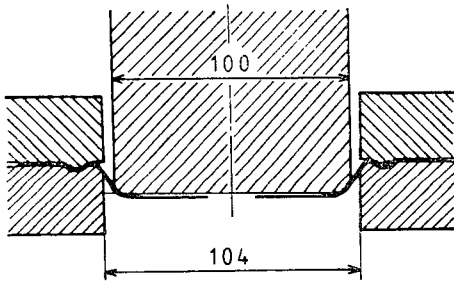


Fig. 6 Schematic diagram of bore expanding test

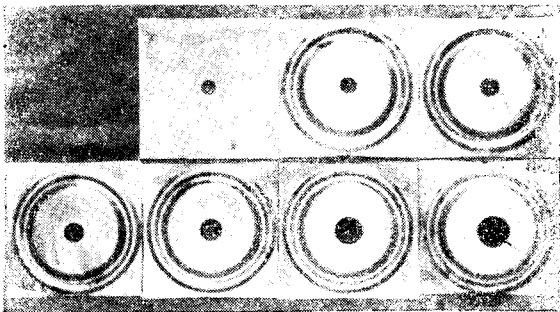


Fig. 7 Deformed grid pattern of specimen

불가능하므로 Fig. 6과 같이 평저 펀치에 의한 스트레칭 실험을 한다. 마찰을 없애기 위하여 Fig. 6과 같이 두 장의 박판을 사용하여 펀치와 시편이 직접 닿지 않도록 하고, 시편이 팽려 들어가지 않도록 6개의 압력 볼트로 금형을 고정시켰다. 펀치의 전진 속도는 0.5 mm/sec로 하고, 펀치가 2mm 전진할 때마다 사진을 찍어, 하중이 대략 최고점을 지날 때까지 계속한다. 실험에서 찍은 사진을 실제 시편의 4배인 같은 비율로 확대하여 디지털라이저(digitizer, Hewlett Packard Co.)로 각 절점의 위치를 측정한다. 각 단계의 변형된 모양이 Fig. 7에 나타나 있다.

각 단계간의  $x, y$  좌표값의 차이로부터 모든 절점의 변위증분을 구하고, 식 (7)과 식 (16)에 의해서 각 요소의 변형도율을 구할 수 있다.

$$\epsilon_{ij} = \int_A \epsilon_{ij} dA / A \quad (16)$$

평저 펀치에 의한 스트레칭 실험으로는 경계 조건을 임의로 조정할 수가 없고, 재료의 이방성 때문에 균일한 스트레칭이 불가능하므로, 실험에서 측정된 경계 조건으로 매트릭스법을 이용하여 시뮬레이션을 한다. 시편의 반경이 40mm( $r/R_0=5$ )인 원의 가장자리에서는 측정된  $U_x, U_y$ 가 경계조건으로 주어지고,  $x$  축을 따라서는  $U_x=0, F_x=0$ ,  $y$  축을 따라서는  $U_y=0, F_y=0$ , 그 밖의 절점에서는  $F_x=F_y=0$ 가 경계 조건으로 주어진다. 계산은 5번째 단계까지 즉, 펀치가 10mm 전진할 때까지 하였다.

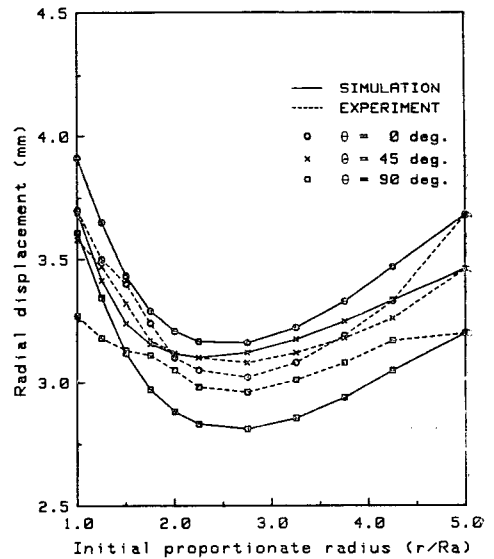


Fig. 8 Radial displacement distributions as functions of radius(experiment and simulation)

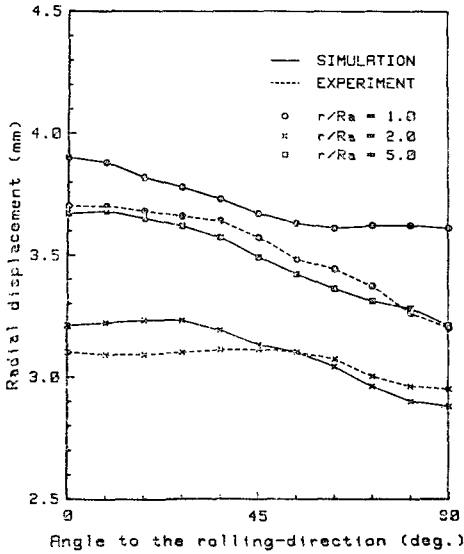


Fig. 9 Radial displacement distributions as functions of angle(experiment and simulation)

Fig. 8,9는 반경 방향 변위의 분포를 나타내고 있다. 실험과 시뮬레이션한 것의 경향은 대체로 일치하나, 실제로 실험에서는 각도에 따른 변화가 이론보다 작아서, 이방성의 영향이 작은 것으로 나타났다. 균일한 스트레칭 문제에서는  $R$ -값이 최소인 곳에서  $U_r$ 도 최소이었으나, 실험에서는  $U_r$ 이 압연 방향에서 가장

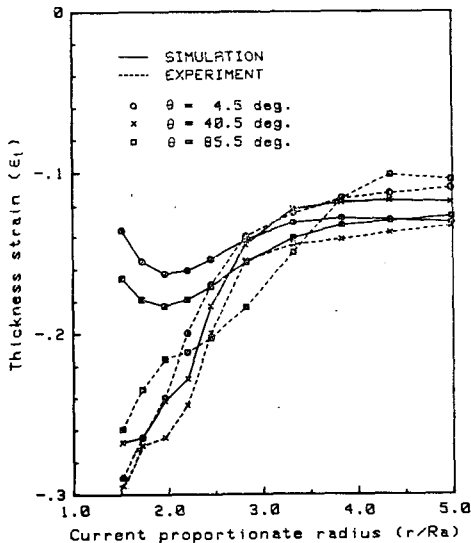


Fig. 10 Thickness strain distributions as functions of radius(experiment and simulation)

크고, 각도가 증가함에 따라 감소하였다.

Fig. 10은 두께 방향 변형도,  $\epsilon_t$ 을 나타내고 있다. 시뮬레이션에서는 구멍에서 어느 정도 떨어진 곳에서  $|\epsilon_t|$ 이 최대가 되어,  $\theta=40.6^\circ$ ,  $r/R_a=1.8$ 에서 가장 얇아지고 있으나, 실험에서는 이것이 잘 나타나지 않고 구멍에서 멀어질수록  $|\epsilon_t|$ 이 작아지고 있다. 그러나,  $\theta=40^\circ$  근처에서  $|\epsilon_t|$ 이 최대가 되는 것은 실험과 시뮬레이션이 일치하고 있으며, 실험이 더 진행되었을 때 실제로 이 부근에서 파단이 일어났다(Fig. 7).

### 5. 결 론

(1) 재료의 이방성은 등방성에 비해서 변형을 크게 하며, 두께 방향 변형도의 구배를 크게 한다. 또 재료를 직교 이방성(normal anisotropy)으로 생각했을 때와 평면 이방성(planar anisotropy)으로 생각했을 때를 비교해 보면, 평면 이방성의 영향이 무시될 수 없을 정도로 크다.

(2) 실험 결과와 시뮬레이션한 결과를 비교해보면, 실제 실험에서는 평면 이방성의 영향이 적게 나타나나 경향은 대체로 일치하며, 가장 얇아지는 방향도 일치하고, 이것은  $R$ 값이 가장 작은 방향과도 일치한다.

(3) 실험 결과에 의한 변형의 각도에 따른 변화도는 Hill이 제시한 이방성 소성 이론을 사용하여 계산된 변형의 각도에 따른 변화도 보다 작게 나타나서, 실제로 평면 이방성의 영향이 실험에서는 예상보다 크게 나타나지 않았다. 다른 이방성 소성이론으로 박판 급속의 평면 이방성에 대하여 계산하여 실험과 비교하는 것도 좋은 과제가 될 것이다.

### 참 고 문 헌

- (1) R. Hill, Mathematical Theory of Plasticity, Oxford Univ. Press, 1950
- (2) S.P. Keeler and N.A. Backofen, "Plastic Instability and Fracture in Sheets Stretched over Rigid Punches", Trans. ASM, Vol. 56, No. 1, pp.25~48, 1963
- (3) Z. Marciniak and K. Kuczynski, "Limit Strains in the Process of Stretch-Forming Sheet Metal", Int. J. Mech. Sci., Vol. 9, pp.609~620, 1967
- (4) D.M. Woo, "Analysis of Cup-Drawing Process", J. Mech. Eng. Sci., Vol. 6, No. 2, pp.116~128, 1964

- (5) N. M. Wang, "Large Plastic Deformation of Circular Sheet Caused by Punch Stretching", Trans. ASME, J. Appl. Mech., Vol. 92, pp. 431~440, 1970
- (6) D.C. Chiang and S. Kobayashi, "The Effect of Anisotropy and Work-hardening Characteristics on the Stress and Strain Distribution in Deep-Drawing", Trans. ASME, J. Eng. Ind., Vol. 88, pp. 443~448, 1966
- (7) Y. Yamada, "Studies on Formability of Sheet Metals", Rep. Inst. Ind. Sci., Tokyo University, Vol. 11, pp. 240~251, 1961
- (8) Y. Yamada and M. Koide, "Analysis of the Bore-Expanding Test by the Incremental Theory of Plasticity", Int. J. Mech. Sci., Vol. 10 pp. 1~4, 1968
- (9) A. Parmar and P.B. Mellor, "Plastic Expansion of a Circular Hole in Sheet Metal Subjected to Tensile Stresses", Int. J. Mech. Sci., Vol. 20, pp. 707~729, 1978
- (10) C.H. Lee and S. Kobayashi, "New Solutions to Rigid-Plastic Deformation Problems Using a Matrix Method", Trans. ASME, J. Eng. Ind., Vol. 95, pp. 865~873, 1973
- (11) K.J. Bathé and A.P. Cimento, "Some Practical Procedures for the Solution of Nolinear Finite Element Equations", Computer Methods in Appl. Mech. and Eng., Vol. 22, pp. 59~85, 1980