

스펙트럼 해석을 이용한

난류유동의 이해

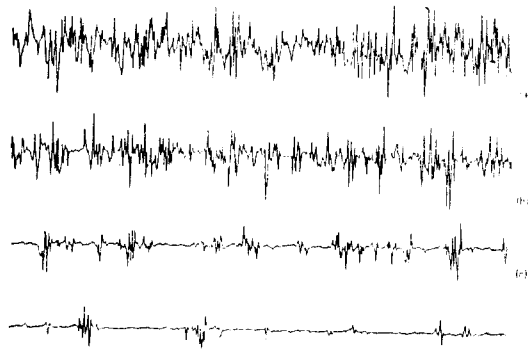
정 명 균

<한국과학기술원 기계공학과>

1. 난류유동의 정의와 특성

난류유동은 유체의 속도와 온도, 밀도, 압력 등이 시간과 장소에 따라서 불규칙적으로 매우 빠르게 변동하는 유동의 형태로서 유체의 표면 장력, 밀도차이 또는 속도의 구배등 유동의 불안정 요소가 존재할때 어느 임계조건을 지나면 층류유동이 난류유동으로 천이하게 된다. 이 난류로의 천이가 일어나는 임계조건은 일반적으로 레이놀즈 수로 표시되는데 예를들면 관유동인 경우 $Re_{crit} = 2000$ 이며 제트인 경우 10, 평판위의 평행유동인 경우 50,000 정도로서 자연현상과 공학시스템에서 볼 수 있는 대부분의 유동이 이에 속한다. 유동이 난류로 되면 일반적으로 마찰과 열전달이 증가하고 유체의 혼합이 매우 활발하게 일어나는데 우리가 난류유동에 대한 이해를 추구하고 있는 이유는 바로 이와같은 특성이 열·유체관련 기계시스템의 설계에 중요한 역할을 하기 때문이다.

유체가 흐를 때 수반하는 동력손실의 원인인 운동량 전달과 열전달의 정도는 층류인 경우에는 유체자체의 물리적 특성, 즉 점성계수와 열전도 계수에 의존하지만 난류인 경우는 유동의 난류성분의 크기에 의해서 결정된다. 이 난류성분의 순간적인 값은 그림 1과 같이 시간에 따라서 또는 장소에 따라서 불규칙적으로 요동하고 있지만 특수한 실험기법을 이용하여 유동을 가

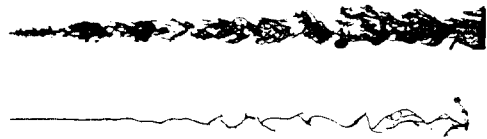


(a), (b); 순수한 난류유동
(c), (d); 난류와 층류가 섞인 유동

그림 1 원형봉 뒷 부분에서 측정된 순간속도 변화의 예



a; 2차원 전단혼합 유동의 shadograph 사진



b; 2차원 난류제트 유동에 염료를 주입하여 얻어진 유동가시화 사진

그림 2 난류유동의 유동 가시화 사진

시화시켜 보면 그림 2와 같이 매우 규칙적인 거시적 구조를 갖고 있음을 보게 된다. 여기서 우리는 난류유동이 국소적으로는 불규칙적으로 변

동하면서도 전체적으로는 어느 특정한 법칙이 존재하고 이 법칙에 따라서 유동장이 형성되어 마찰이나 열전달 또는 혼합이 증대되는 것을 짐작하게 된다.

난류유동은 그 불규칙적 요동을 계속하기 위해서는 이에 필요한 운동에너지를 외부로부터 계속 공급받아야 하는데 이것을 난류에너지 생성이라고 하며 또한 국소적으로 인접 유체 입자간의 상대속도 구배가 대단히 크게 변하기 때문에 이들 인접 유체층사이에 심한 마찰이 일어나 난류 운동에너지가 전 유동장에서 계속적으로 소멸하게 된다. 이 난류에너지의 단위 시간당의 생성량 ρ 와 소멸량 ε 사이의 관계와 이들에 관계되는 특성주파수(또는 파동수)를 아는 것은 난류 유동의 구조와 특성을 이해하고 이를 공학적으로 이용하는데 대단히 중요한 문제가 되고 있다.

2. 난류유동과 스펙트럼 해석

그림 3은 임의의 진폭과 임의의 주기를 갖는 다섯가지의 정현함수를 산술적으로 합하면 보다 복잡한 형태의 “불규칙적”으로 요동하는 신호를 얻게됨을 보여주고 있다. 이 그림 3과 그림 1을 비교해 보면 우리는 난류운동의 불규칙적 요동을 진폭과 주기가 다른 정현함수들의 합으로 표현할 수 있을 것이라고 생각할 수 있다. 실제로 있어서 기계시스템의 진동은 유한개의 정

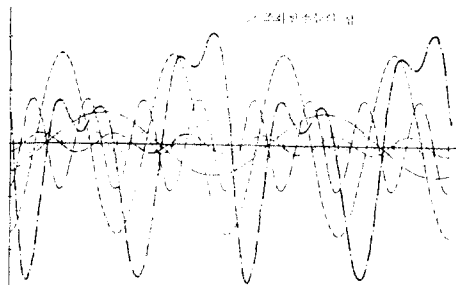


그림 3 임의의 주파수와 진폭을 가진 정현파의 산술적인 합에 의해서 얻어진 “불규칙적 임의 신호(Irregular random signal)”

현함수들의 합으로 표현할 수 있지만 이 난류유동의 경우는 자유도가 무한개인 불규칙적 운동이므로 무한개의 정현함수의 합으로서 표현할 수 있으므로 우리는 다음과 같이 정의되는 Fourier 적분 변환을 사용하게 된다.

$$G(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-j\omega t} dt$$

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega)e^{j\omega t} d\omega$$

여기서 $g(t)$ 는 시간에 따라 변동하는 물리적인 성질이며 $G(\omega)$ 는 각 주파수(Angular frequency, $\omega = 2\pi f$; f , 주파수)의 함수로서 시간함수 $g(t)$ 의 Fourier 변환함수이다. 일반적으로 $G(\omega) = R(\omega) + jX(\omega) = A(\omega)e^{j\phi(\omega)}$ 로 분리되고 여기서 $A(\omega)$ 를 $g(t)$ 의 스펙트럼 Fourier, $A^2(\omega)$ 를 에너지 스펙트럼이라고 하며 $\phi(\omega)$ 를 위상함수라고 부른다. Fourier 스펙트럼 $A(\omega)$ 는 정현함수 $e^{j\phi(\omega)} = \cos\phi(\omega) + j\sin\phi(\omega)$ 의 계수이므로 $A(\omega)$ 는 각 주파수 ω 를 갖는 정현운동이 불규칙적 신호함수 $g(t)$ 를 이루는데 어느 정도의 공헌을 하고 있는가를 나타내는 수치이다. 따라서 $A(\omega)$ 를 흔히 신호함수 $g(t)$ 의 각 주파수 ω 에서의 Fourier 성분이라고도 부른다. 위에서도 언급한 바와 같이 난류유동을 무한개의 서로 다른 주파수와 진폭을 갖는 정현운동의 산술적 총합이며 이들 각각의 정현운동들은 난류 운동에너지에 가산적인 공헌을 하고 있다고 볼 수 있으며 또한 유체의 운동방정식에서의 비선형항이 요구하는 일정한 법칙에 따라 상호간에 에너지 교환이나 운동량 교환등의 작용이 일어난다고 볼 수 있다. 다시말하면 Fourier 해석은 불규칙적인 난류운동 성분을 서로 다른 크기의 정현운동들로서 분리시켜 표현할 수 있게 하기 때문에 난류유동을 수학적으로 또한 실험적으로 이해하는데 필수불가결한 해석 방법임을 알 수 있다.

3. 상관함수와 난류에디의 크기

난류유동중에 있는 유체입자의 궤적을 시간에 따라서 추적해 보면 그림 4와 같이 순간적인 회

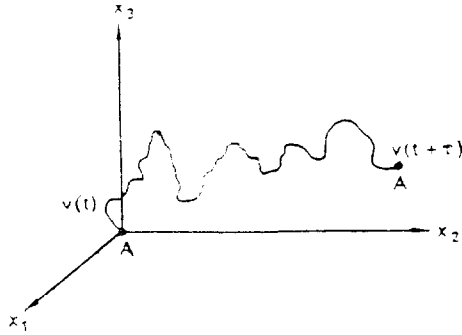


그림 4 착색된 특정한 유체입자의 난류운동패적

전유동의 연속으로서 회전축과 크기가 3차원 공간에서 시간에 따라 불규칙적으로 변하는 것을 알 수 있다. 이 순간적인 회전 유동의 크기 즉 순간적으로 그리는 회전체적을 난류에디라고 부르며 난류정상유동인 경우 난류장의 한점에 속도 측정계를 놓고 신호를 받으면 이점을 연속적으로 지나가는 수많은 에디들의 운동의 결과를 얻게되므로 이 불규칙한 신호를 Fourier 해석을 하면 이점을 지나가는 에디들의 크기에 따른 에너지 분포를 알 수가 있다. 우리가 흥미를 갖고 있는 것은 어떤 각 주파수 (ω) 또는 파장(에디의 크기)의 에디가 가장 많은 난류에너지를 갖고 있으며, 어떤 크기의 에디에서 에너지 소멸이 가장 많이 일어나고 있는 것인지, 또한 외부적으로 에너지가 생성되어 공급되고 있는 난류에너지를(공진을 일으켜) 가장 효과적으로 흡수하는 에디의 크기 또는 각 주파수는 어느 것인가 하는 문제이다. 외부적인 인자에 의해서 난류운동에너지가 어느 특정한 한 방향(예를 들면 x 방향)의 속도 성분에 공급되었을 때 이 난류에너지가 다른 방향의 속도성분에 재분배되는 과정과 걸리는 시간등이 난류유동의 동력학을 이해하고 운동량, 열 그리고 물질전달 현상을 이해하는데 필요한 훌륭한 정보를 제공하는 것이다. 이와같이 요동하는 난류성분의 시간상의 전개와 공간적인 전개를 이해하는데 필요한 직접적인 통계적 양은 상관함수로써 주어진 시간, 주어진 지점에서 순간속도가 $u(x_0, t_0)$ 이었다면 미소시간 Δt 이 경과한 후의 속도값, $u(x_0, t_0 + \Delta t)$ 또는 Δx 만큼 떨

어진 지점에서 같은 순간에 갖는 속도 $u(x_0 + \Delta x, t_0)$ 는 평균적으로 얼마일 것이냐 하는 것을 나타내는 통계량이다.

만일 $u(x_0, t_0)$ 과 $u(x_0 + \Delta x, t_0)$ 의 상관함수값이 영(0)이라면 이것은 지점 $x_0 + \Delta x$ 에서의 속도는 지점 x_0 에서의 속도와는 무관한 것을 나타내며 또한 x_0 에서의 에디의 움직임이 $x_0 + \Delta x$ 까지는 영향을 미치지 못하는 것을 의미한다.

따라서 상관함수를 $u(x_0, t_0) u(x_0 + \Delta x, t_0)$ 로 정의할 때

$$l = \frac{1}{u(x_0, t_0)^2} \int_0^\infty u(x_0, t_0) u(x_0 + \Delta x, t_0) dx$$

는 평균적인 에디의 크기를 나타내게 된다.

4. 3차원 에너지 스펙트럼 함수

임의의 한 점에서의 i 방향의 난류속도를 $u_i(x, t)$ 같은 점에서 시간이 τ 만큼 경과한 후 j 방향의 난류속도를 $u_j(x, t + \tau)$ 라 할 때 그 난류운동이 통계적으로 정상과정(stationary process)이라면 3차원 상관함수 R_{ij} 와 power 스펙트럼 ϕ_{ij} 은 다음과 같이 정의된다.

$$R_{ij}(\tau) \equiv u_i(x, t) u_j(x, t + \tau)$$

$$\left[\phi_{ij}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_{ij}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \right.$$

$$\left. R_{ij}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{ij}(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega \right.$$

Power 스펙트럼 $\phi_{ij}(\omega)$ 은 각 주파수 ω 의 함수로 표시되며 만일 상관함수가 $u_i(x, t)$ 와 $u_j(x + r, t)$ 사이에서 주어지면

$$R_{ij}(r) \equiv u_i(x, t) u_j(x + r, t),$$

$$\left[\Phi_{ij}(k) = \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint_{-\infty}^{\infty} R_{ij}(r) e^{-ik \cdot r} d^3r. \right.$$

$$\left. R_{ij}(r) = \iiint_{-\infty}^{\infty} \Phi_{ij}(k) e^{-ik \cdot r} d^3k. \right.$$

로서 power 스펙트럼은 파동수 벡터 $k \left(\frac{2\pi}{\lambda_1}, \frac{2\pi}{\lambda_2}, \frac{2\pi}{\lambda_3} \right)$ 의 함수가 된다. 여기서 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 는 각각 x, y, z 방향의 파장 즉 에디의 크기로서 k 가 클수록 작은 에디를 나타낸다.

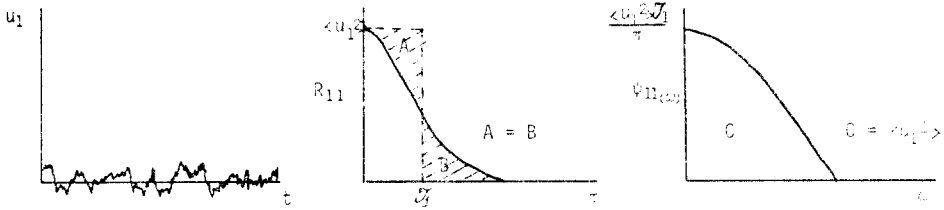


그림 5 난류속도 신호와 상관함수 그리고 스펙트럼의 관계

4.1. 시간 스펙트럼, $\phi_{ii}(\omega)$

시간은 1차원 변수이므로 $\phi_{ii}(\omega)$ 는 1차원 함수이다. 한편

$$\frac{1}{2}R_{ii(0)} = \frac{1}{2}(\overline{u_1^2} + u_2^2 + u_3^2) \equiv \frac{3}{2}u^2$$

으로서 단위질량의 유체의 난류운동 에너지이며 위의 Fourier 변환쌍의 관계에 의하면

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi_{ii}(\omega) d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} (\phi_{11} + \phi_{22} + \phi_{33}) d\omega = R_{ii(0)} = 3u^2$$

의 관계가 있으며 여기서 u 는 난류의 특성속도이다.

또한

$$\begin{aligned} \phi_{ii(0)} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_{ii}(\tau) d\tau = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} R_{ii}(\tau) d\tau \\ &= \frac{\langle u_i u_j \rangle}{\pi} \mathcal{S} \\ &= \frac{3}{\pi} u^2 \mathcal{S} \sim u^2 \mathcal{S} \end{aligned}$$

로서 시간 스펙트럼은 $\omega=0$ 에서 영이 아니고 $\phi_{ii(0)}$ 는 대략적으로 $u^2 \mathcal{S}$ 의 값을 갖는다. 여기서 \mathcal{S} 는 난류유동장의 Eulerian 특성 시간 스케일로서 다음과 같이 정의되며

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &\equiv \frac{1}{u_i u_j} \int_0^{\infty} R_{ii}(\tau) d\tau \\ &= \frac{1}{3u^2} \left(\int_{-\infty}^{\infty} R_{11}(\tau) d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} R_{22}(\tau) d\tau + \int_0^{\infty} R_{33}(\tau) d\tau \right) \end{aligned}$$

한 지점에서 난류데이터를 측정할 때 데이터의 독립적인 한 시간적인 길이를 나타내 일반적으로 데이터의 샘플링 길이를 $2\mathcal{S}$ 로 한다. 실제에 있어서는 세 방향의 시간 상관함수 R_{11} , R_{22} , R_{33} 를 모두 측정하여 \mathcal{S} 를 얻는 경우는 매우

드물며 대부분의 경우 평균 유동방향의 상관함수 $R_{11}(\tau)$ 를 사용하여 \mathcal{S}_1 을 다음과 같이 정의한다.

$$\mathcal{S}_1 = \frac{1}{\langle u_1^2 \rangle} \int_0^{\infty} R_{11}(\tau) d\tau$$

이 경우

$$R_{11(0)} = \langle u_1^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{11}(\omega) d\omega$$

으로서 $\phi_{11}(\omega) d\omega$ 는 각 주파수가 $(\omega, \omega + d\omega)$ 구간에 있는 정현파동(sine wave)들이 전체에너지 $\langle u_1^2 \rangle$ 에 공헌하는 정도를 나타낸다. 그리고

$$\begin{aligned} \phi_{11(0)} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_{11}(\tau) d\tau = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} R_{11}(\tau) d\tau \\ &= \frac{1}{\pi} \langle u_1^2 \rangle \end{aligned}$$

로서 $\omega=0$ 에서 $\phi_{11(0)}$ 의 값이 영이 아님을 알 수 있다. 이들의 관계를 그림 5에 나타내었다.

4.2. 파동수 스펙트럼과 3차원 에너지 스펙트럼 함수, $E_{(k)}$

3차원 파동수 스펙트럼 $\Phi_{ij}(k)$ 는 각 방향에 대한 power 스펙트럼 밀도의 정보를 갖고 있는 포괄적인 수치들로서 우리가 보다 더 흥미를 갖고 있는 것은 3차원적인 파동수 벡터 k 에 대한 분포가 아니고 오히려 절대크기 k 를 갖는 스칼라 파동수에 있어서의 에너지 함유량이다. 이러한 정보는 파동수벡터 공간좌표계 원점으로부터 거리가 k 인 구자 표면위에서 $\Phi_{ij}(k)$ 를 적분하면 다음과 같은 3차원 에너지 스펙트럼 함수 $E_{(k)}$ 를 구하게 된다.

$$E_{(k)} \equiv \frac{1}{2} \iint_{|k|=k} \Phi_{ii}(k) ds(k)$$

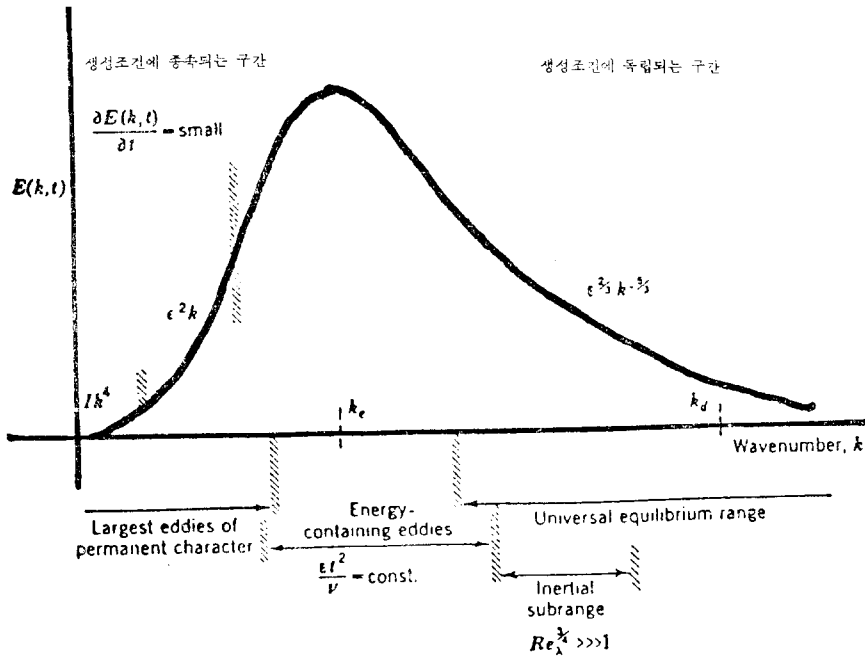


그림 6 대표적인 3차원 에너지 스펙트럼 함수

이 정의에 따르면

$$\int_0^\infty E(k) dk = \frac{1}{2} \int_0^\infty \left[\sum_{l, k_1=k} \Phi_{ii}(k) ds_{(k)} \right] dk = \frac{1}{2} \iiint_{-\infty}^\infty \dots$$

$$\Phi_{ii}(k) dk = \frac{1}{2} \langle u_i u_i \rangle = \frac{3}{2} u^2$$

으로서 즉 3차원 에너지 스펙트럼 함수가 포함하는 전체면적은 그 지점에서의 난류운동에너지의 양과 같게 된다. 그림 6은 대표적인 3차원 에너지 스펙트럼 함수를 보여주고 있는 것으로서 난류에디들을 크기에 따라 대략적으로 3가지로 구분하고 있다. 파동수가 $k < k_c$ 인 구간은 그 난류유동장의 물리적 경계가 허용하는 한 가장 큰 에디의 크기를 나타내며 이것은 경계의 기하학적 형상에 크게 좌우된다. $k \approx k_c$ 인 구간은 스펙트럼 상에서 가장 많은 에너지를 함유하고 있는 에디들로서 에너지함유 에디라고 부르며 이 에디들의 크기는 대체적으로 그 유동장의 특성길이 l 과 같으며 난류유동장의 특성속도 u 과 특성길이 l 에 의해서 주어지는 난류생성에 관련된 시간스케일 u/l 에 가장 공명이

잘 일어나는 에디들이기 때문에 평균 유동장의 전단유동 때문에 계속적으로 생성되는 난류운동 에너지를 가장 잘 받아 흡수하는 구간이다. 다시 말하면 난류운동에너지는 $k \approx k_c$ 에서 주로 공급, 흡수되고 있다.

세번째 구간은 첫째와 두번째 구간과는 달리 난류 유동장의 평균유동과 경계조건에 관계없이 모든 난류유동에 대해서 공통적으로 에너지 스펙트럼이 형성되는 구간으로서 만유 평형 스펙트럼 구간(universal equilibrium range)이라고 부른다. 이 구간은 또다시 두 개의 구간으로 특징지어 지는데 $k \geq k_d$ 구간에서는 에디크기가 대단히 작기 때문에 극소적인 속도구배가 상대적으로 대단히 커서 유체간의 점성마찰에 의하여 난류운동에너지 소멸 구간이라고 부른다. $k_c \ll k \ll k_d$ 에서는 에너지 생성이나 소멸이 없이 비교적 큰 에디 k_c 에서 흡수된 난류운동에너지를 보다 더 작은 에디로 스펙트럼상에서 전달해 주며 자신은 평형상태를 유지하고 있는 구간으로서 관성구간(Inertial subrange)이라고 부른다.

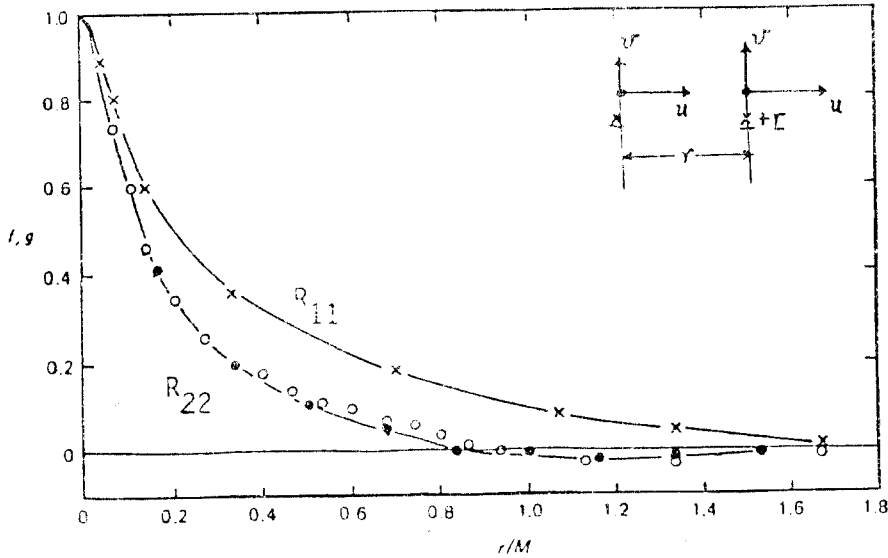


그림 7 1차원 상관함수 $R_{11}(r, 0, 0)$ 와 $R_{22}(r, 0, 0)$

4.3. 1차원 스펙트럼과 Aliasing 문제

1차원 상관함수와 스펙트럼은 어느 임의의 일직선을 따라 한 방향의 속도 성분을 측정함으로써 얻어지는데 거의 대부분의 실험들이 이에 속한다. 1차원 상관함수들 $R_{11}(r_1, 0, 0)$ 과 $R_{22}(r_1, 0, 0)$ 는 그림 7에 나타나 있으며 R_{11} 을 종방향 상관함수, R_{22} 를 횡방향 상관함수라고 부른다. 이에 따라서 종방향 스펙트럼 F_{11} 과 횡방향 스펙트럼 F_{22} 는 다음과 같은 Fourier 변환 쌍에 의해서 정의된다.

$$F_{11}(k_1) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_{11}(r_1, 0, 0) e^{-ik_1 r_1} dr_1$$

$$F_{22}(k_1) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_{22}(r_1, 0, 0) e^{-ik_1 r_1} dr_1$$

위의 정의들과

$$R_{11}(r_1, 0, 0) = \iiint_{-\infty}^{\infty} \phi_{11}(k) e^{ik_1 r_1} dk_1 dk_2 dk_3$$

를 비교하여 보면 우리는 1차원 스펙트럼 F_{11} 과 3차원 power 스펙트럼 ϕ_{11} 과의 관계는

$$F_{11}(k_1) = \iint_{-\infty}^{\infty} \phi_{11}(k) dk_2 dk_3$$

임을 쉽게 알 수 있다. 위의 중적분 과정을 그림 8을 참고로 생각해 보면 1차원 스펙트럼

$F_{11}(k_1)$ 은 파동수 k_1 에서 실제로는 k_1 보다 큰 파동수를 갖는 에디들의 에너지를 포함하게 되므로 결과적으로 k_1 에서의 $F_{11}(k_1)$ 의 값은 k_1 보다 큰 파동수의 에디들의 에너지를 모두 포함한 수치를 갖게 된다. 따라서 $k_1=0$ 에서는 유한하게 큰 값을 가지게 된다. 이 현상을 1차원 스펙트럼 함수의 Aliasing 문제라고 부른다. 물리적으로는 $k_1=0$ 는 무한대 크기의 에디를 의미하며 무한대 크기의 에디는 가상적인 것이어서 난류운동 에너지를 가질 수 없기 때문에 $F_{11}(k_1=0)$ 는 물리적으로는 영이어야 함으로 Aliasing 문

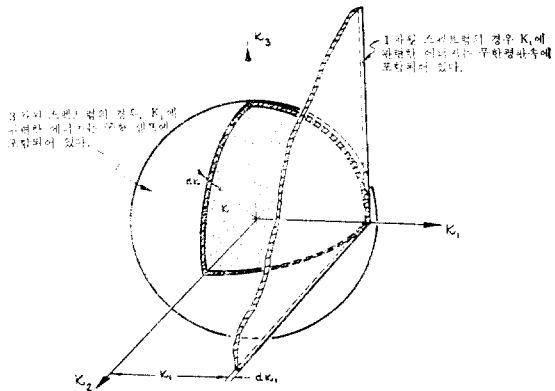


그림 8 1차원 에너지 스펙트럼 $F_{11}(k_1)$ 과 3차원 스펙트럼 $\phi_{11}(k)$ 의 관계

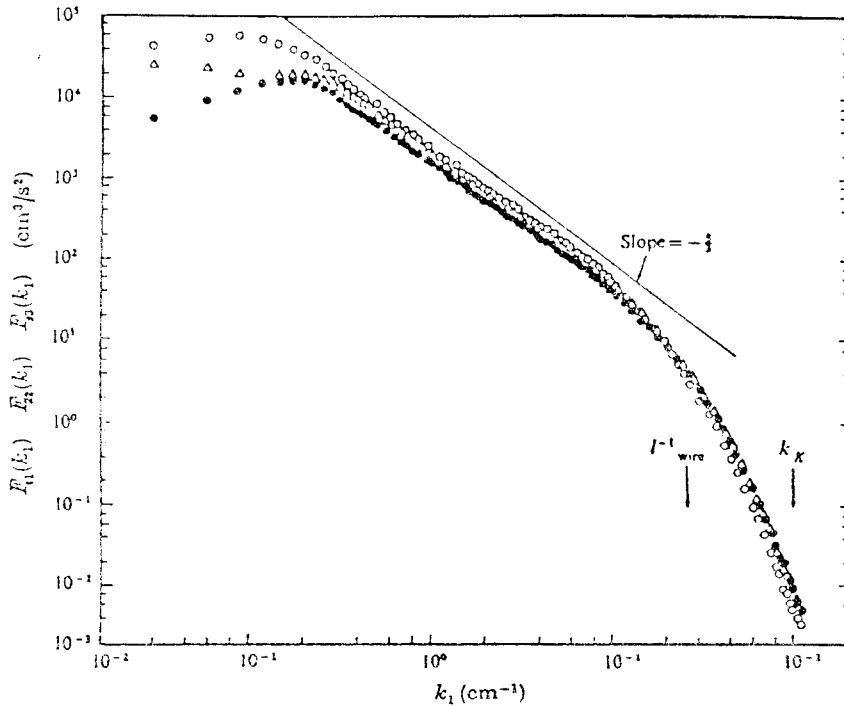


그림 9 대표적인 1 차원 에너지 스펙트럼 $F_{11}(k_1)$, $F_{22}(k_1)$ 과 $F_{33}(k_1)$

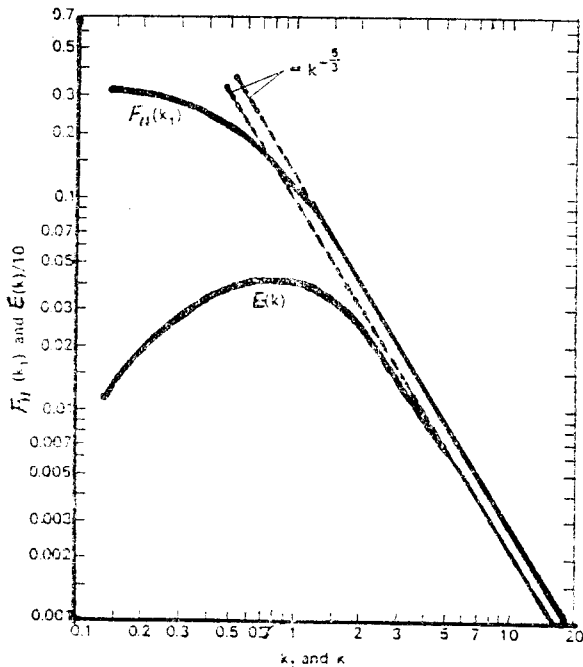


그림 10 3 차원 에너지 스펙트럼 함수 $E(k)$ 와 1 차원 에너지 스펙트럼 $F_{11}(k_1)$ 의 관계

제는 $F_{11}(k_1)$ 의 스펙트럼 해석에 문제를 제기하고 있다. $F_{11}(k_1)$ 과 $F_{22}(k_1)$ 의 대표적인 형태가 그림 9에 나타나 있다. 일반적으로 $F_{11}(k_1)$, $F_{22}(k_1)$ 과 $E(k)$ 사이의 관계는 대단히 복잡하지만 난류유동장이 등방성인 경우는 다음과 같은 관계가 있다.

$$E(k) = k^3 \frac{d}{dk} \left[\frac{1}{k} \frac{dF_{11}(k)}{dk} \right]$$

$$\frac{d}{dk_1} F_{22}(k_1) = -\frac{k_1}{2} \frac{d^2}{dk_1^2} F_{11}(k_1)$$

그림 10은 $F_{11}(k_1)$ 과 $E(k)$ 의 관계를 표시하는 한가지 예이며 만일 $E(k) \propto k^n$ 이면 $F_{11}(k_1)$, $F_{22}(k_1) \propto k_1^n$ 으로서 같은 지수 n 을 갖게 됨을 알 수 있다.

5. 난류스펙트럼의 상사이론

2차원 균일 난류 유동에서 난류 운동에너지의 지배방정식

$$\frac{Dk}{Dt} = -\overline{u_1 u_2} \frac{dU}{dy} - \nu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)^2$$

의 오른쪽의 첫째항은 난류에너지 생성항이며 두 번째 항은 소멸항으로서 난류변수 $u_i u_j$ 와 $(\frac{\partial u_i}{\partial t})^2 \propto (\frac{\partial u_i}{\partial t})^2$ 가 생성과 소멸에 직접적으로 관계되는 변수들이다. 이 두 난류변수들의 power 스펙트럼은 그림 11 과 같이 스펙트럼 공간상에서 뚜렷이 분리된 스펙트럼을 갖고 있으며 Reynolds 수가 증가하면 할수록 이 분리된 정도는 더욱 크게 된다. 여기서 우리는 난류에너지 생성에 관계되는 에디는 작은 파동수(즉 큰 에디)에 속하며 에너지 소멸은 거의가 매우 큰 파동수(즉 작은 에디들)에서 일어남을 알 수 있다. 따라서 난류에너지의 3차원 스펙트럼 함수의 모양도 에디의 크기 즉 파동수에 따라서 다르며 따라서 각 구간에서의 특성치들도 다르게 되어야 함을 알 수 있다.

5.1. 에너지 소멸구간(Dissipation Range)의 난류 스펙트럼, $k \geq k_a$

파동수 k 에 해당하는 난류에디의 크기는 대략적으로 $2\pi/k$ 정도이며 그 에디가 갖고 있는 운동에너지의 크기가 $E(k)$ 이므로 파동수 k 인 에디의 특성속도는 $\sqrt{kE(k)}$ 정도임을 알 수 있다. 따라서 에디의 운동에 유발하는 특성속도구배

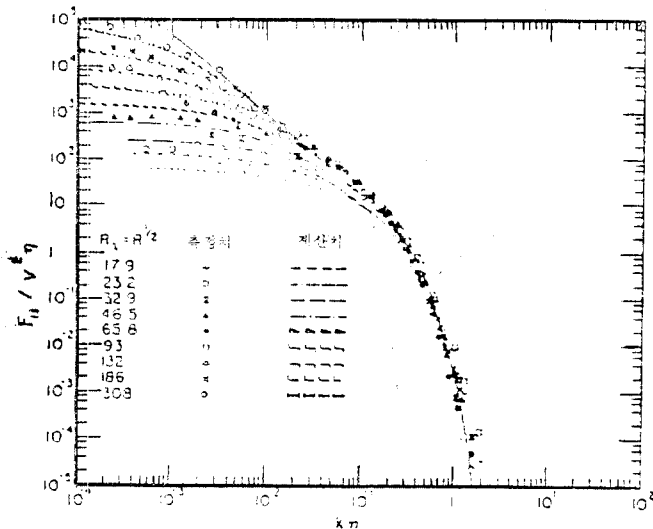


그림 12 물체의 뒷부분 중심선상을 따라 얻어진 난류속도 성분들의 1차원 에너지 스펙트럼 $F_{11}(k)v^2\eta$

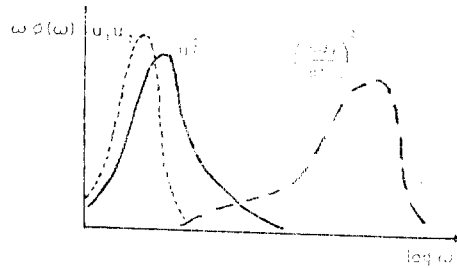


그림 11 물리적 영역에서 생성과 소멸에 관계되는 난류 변수들의 스펙트럼 $u_1 u_2, u_1^2$; 생성관련 변수 $(\frac{\partial u_1}{\partial t})^2$; 소멸관련 변수

(전단율)는

$$s(k) = \frac{\sqrt{kE(k)}}{2\pi/k} = \frac{\sqrt{k^3 E(k)}}{2\pi}$$

로서 $E \propto k^n$ 이므로 $S(k) \propto k^{n+1}$ 이 되어 k 가 증가할수록 즉 에디의 크기가 작아질수록 수반하는 전단율이 급격히 증가함을 알 수 있다. 또한 전단율 $S(k)$ 는 시간의 역수이므로 파동수 k 인 에디가 주위의 유동에 적응하는 시간(relaxation time)은 $s(k)^{-1}$ 즉 $2\pi / \sqrt{k^3 E(k)}$ 으로 에디의 크기가 작아질수록 적응시간이 짧아져서 에디들의 방향성을 쉽게 잃어버리고 등방성에디(Isotropic eddy)가 됨을 추측할 수 있다. 따라서 k 가 대

단히 큰 구간에서는 전단율이 커서 난류 운동에너지의 소멸은 대단히 작은 에디들에서 일어나고 적응시간이 대단히 짧기 때문에 평균유동과 큰 에디들의 성질과는 무관하게 스펙트럼 상에서 극소적으로 스스로 평형상태를 이루게 된다. 이 스펙트럼 구간에서 에디들의 특성을 지배하는 인자들은 단위 시간당의 에너지 소멸율 ϵ (m^2/sec^3)과 유체의 동점성 계수 ν (m^2/sec)이기 때문에 차원 해석으로 이들 에디의 특성길이(크기)는 $\eta = (\nu^3/\epsilon)^{1/4}$ 특성속도는 $v = (\nu\epsilon)^{1/4}$ 로 주어진다. 따라서 이 스펙트럼 구간에서의 에너지 스펙트럼 함수 $E(k)$ (단위는 m^3/sec)를 다음과 같이 무차원 함수로 무차원화 하면 함수 $f(k\eta)$ 는 모든 난류유동에서 공통적으로 적용되는 만

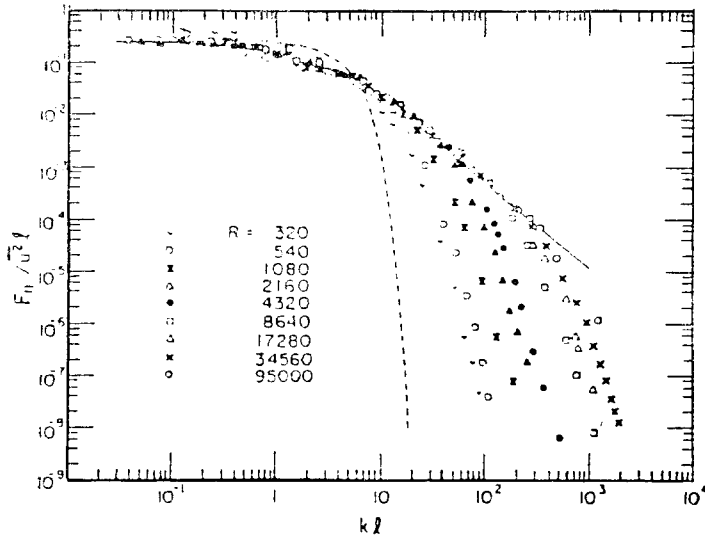


그림 13 물체의 뒷부분 중심선상을 따라 얻어진 난류속도 성분의 1차원 에너지 스펙트럼 $F_{11}(k_1)/u^2 l$

유함수가 된다.

$$\frac{E(k)}{v^2 \eta} = \frac{E(k)}{v^{5/4} \varepsilon^{1/4}} = f(k_\eta).$$

이에 대한 대표적인 실험데이터를 그림 12에서 보여주고 있다.

5.2. 난류에너지를 함유하는 구간의 난류스펙트럼, $k \sim k_d$.

작은 파동수 k 에 해당하는 에디들은 상대적으로 큰 에디들로서 이 에디들의 특성을 결정하는 주요 인자는 평균유동으로부터 이 구간의 난류 에디에 전수되는 에너지 전달율이며 이는 평균 전달율 u/l 로 주어진다. 또 다른 주요인자는 이들 에디들이 보다 작은 에디들로 스펙트럼 상에서 에너지를 전달해주는 율이며 이것은 평형상태인 경우 작은 에디에서의 시간당 에너지 소멸 율과 같게 된다. 따라서 에너지 스펙트럼은 $E(k, \varepsilon, u/l)$ 이 되어야 하는데 $\varepsilon \propto u^3/l$ 의 관계가 있으므로 결국 $E = E(k, u, l)$ 이 되어 차원해석 방법으로 에너지를 함유하는 큰 에디 구간의 난류스펙트럼 함수에 대한 다음과 같은 만유적인 함수 $F(kl)$ 를 얻게 된다.

$$\frac{E(k)}{u^2 l} = F(kl)$$

이 함수의 예가 그림 13에 나타나 있으며 작은 파동수 구간에서 외부조건에 관계없이 모든 데이터가 한 특정한 곡선상에 있음을 알 수 있다.

5.3. 관성구간(Inertial Subrange)의 난류스펙트럼, k .

$$\ll k \ll k_d$$

이 구간의 에디들은 난류운동 에너지의 흡수나 소멸에는 거의 무관하며 단지 자기보다 큰 에디로부터 전수받은 에너지를 바로 다음의 보다 작은 에디들로 시간당 ε 의 율로 전달시켜 주므로 주

요인자는 ε 과 k 가 된다. 따라서 차원 해석에 의하면

$$\frac{E(k)}{\varepsilon^{2/3} k^{-5/3}} = \alpha$$

가 되며 실험적으로 $\alpha \approx 1.5$ 이고 $E(k) \propto k^{-5/3}$ 임이 밝혀졌다. 이에 대한 실례로 그림 12와 그림 13에 나타나 있다. 이 구간에서의 스펙트럼 함수 $E(k) = 1.5 \varepsilon^{2/3} k^{-5/3}$ 를 이용하여 실험데이터의 정확도를 점검하기도 하며 에너지 소멸율 ε 을 추산하는데도 쓰여진다.

참 고 문 헌

- (1) Tennekes, H. and J.L. Lumley, A First Course in Turbulence, The MIT Press, 1972
- (2) Batchelor, G.K., The Theory of Homogeneous Turbulence, Cambridge at the University Press, 1953
- (3) Frost, W. and T.H. Moulden, Handbook of Turbulence, Vol. 1. Plenum Press, 1977
- (4) Panchev, S., Random Function and Turbulence, Pergamon Press, 1971
- (5) Monin, A.S. and A.M. Yaglom, Statistical Fluid Mechanics. Mechanics of Turbulence, Vol. 2, The MIT Press, 1975