

이동경계 문제의 유한요소 해석

関 沃 基

<延世大學校 機械工學科>

1. 머리말

근래에 공학문제에 대한 근사해를 유한요소법을 이용하여 구하는 방법이 일반적으로 사용되고 있으며, 구조해석에 유한요소 개념이 도입된 이래 유체, 열 및 전자장 등의 연속체 문제해석에 있어서도 유한요소법이 응용되고 있다. 정상상태(steady state)는 물론 시간에 따라 변수(온도, 밀도, 압력등)가 변화하는 과도상태(transient state)의 경우나 변수의 변화에 따라 문제가 특징지어지는 과도상태의 비선형문제 해석에도 적용되고 있다. 특히 대상으로 하는 물체가 온도의 변화에 따라 그 물성이 크게 변화하고 이에 따라 물체의 상(相, phase)이 바뀌게 되는 경우에도 성공적으로 응용되고 있다.

온도의 변화에 따라 상변화(phase change)가 일어나는 경우에는, 이 상변화과정에서 요구되는 열에너지의 균형으로 인해, 에너지 방정식의 지배를 받고 있는 열전도 문제에 유한요소법을 적용하는 별도의 기법이 요구되고 있다.

이러한 문제는 물의 결빙 및 해빙, 가공식품의 냉동, 고체연료의 연소, 고분자의 반응, 금속의 용접등 주위에서 쉽게 찾아볼 수 있다.

본 강좌에서는 이러한 상변화를 수반하는 문제의 해석에 유한요소법을 적용하는 방법을 기술하고 이에 따른 문제점을 고찰하고자 한다. 먼저 상변화를 설명하고, 이에 따른 이동경계

(moving boundary)를 정리하고, 유한요소법의 응용을 구체적으로 소개하고자 한다.

끝으로 Stefan 문제를 통하여 상변화구간이 시간에 따라 이동하는 이동경계문제를 소개하며, 이러한 상변화 문제를 유한요소법을 이용하여 해석하는데 따른 문제점과 주의사항을 검토하고자 한다.

2. 상변화-이동경계

물리적인 대상을 이상화시켜 해석적 모델을 선정할 때 모델은 영역(domain)과 경계(boundary)로 이루어지며, 이 영역과 경계는 대부분의 경우 공간에 고정되어 있다. 그러나 상변화가 일어나는 문제에서는 영역 전체에 걸쳐 상변화가 일순간에 동시에 일어나지 않으므로, 영역과 이 영역을 둘러싸고 있는 고정된 경계(fixed boundary) 이외에 영역 내부에서 상변화가 발생하는 부분으로 이루어지는 또 다른 경계를 고려할 수 있다. 이 경계의 위치는 상변화가 시간에 따라 진행되는데로 결정되므로 미지수이며, 그 위치가 시간에 따라 이동하므로 이동경계(moving boundary)라 한다. 이동경계는 상변화가 있는 물체 뿐만 아니라, 염료가 섬유내로 침투하는 현상, 근육내의 산소가 확산 및 소모되는 현상, 유체가 다공질 물질(porous medium) 내로 스며드는 현상 등에서도 찾아볼 수 있다.

이러한 광범위한 이동경계문제를 해석하기 위

해 다양한 방법이 논의되고 있으며, 1차원의 일부 물리적 현상에 대해 이론해가 있다. 대부분 유한차분법(finite difference)을 이용하여 문제를 해석하고 있으나, 이를 기하학적으로 복잡한 모델에 적용하는데 따른 제한성을 극복하기 위해, 일반적인 이동경계문제에 대해 유한요소법의 응용이 연구되고 있다.

본 강좌에서는 상변화로 인한 이동경계문제를 유한요소법을 이용하여 해석하는 과정을 설명하고자 한다. 실례로 물의 결빙 및 해빙에 따른 결빙점(freezing front, freezing point)의 이동을 유한요소 결과와 함께 소개하고, 해석과정의 고려사항을 설명하고자 한다.

3. 유한요소법의 응용

먼저 온도변화에 따라 상변화가 일어나는 문제에 대해 수학적인 모델을 소개하고 유한요소법의 적용과 고려사항을 검토한다.

3.1. 수학적 모델

상변화는 온도의 변화에 따라 발생하므로 그 위치를 온도의 함수로 표시할 수 있다. 또한 상변화는 물성의 변화를 함께 하므로 물성도 온도의 함수로 나타내게 된다. 따라서 상변화로 인한 이동경계문제에 대한 수학적 모델은 에너지의 균형을 고려한 다음과 같은 편미분 방정식으로 주어진다.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k_x \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_y \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k_z \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) + Q - \rho c \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \quad (1)$$

또한 고정경계에서의 조건은, 경계 Γ_ϕ 에서,

$$\phi - \bar{\phi} = 0 \quad (2)$$

와, 경계 Γ_q 에서,

$$k_x \frac{\partial \phi}{\partial x} n_x + k_y \frac{\partial \phi}{\partial z} n_y + k_z \frac{\partial \phi}{\partial z} n_z + q + q_c + q_r = 0 \quad (3)$$

으로 주어진다.

여기서 ϕ 는 온도, k_x, k_y, k_z 는 열전도계수, ρ

는 밀도, c 는 열용량, Q 는 내부 열원, n_x, n_y, n_z 는 Γ_ϕ 에 수직인 방향 n 의 좌표 x, y, z 에 대한 방향여편, q, q_c, q_r 은 Γ_q 에서 열의 흐름이다. 고정경계 Γ_ϕ 는 일정온도 $\bar{\phi}$ 가 주어진 경계이고, Γ_q 는 열에너지의 흐름이 q, q_c 및 q_r 로 주어진 경계이다. 경계 Γ_ϕ 에서 대류에 의한 열의 흐름은 q_c , 복사에 의한 흐름은 q_r , 전도에 의한 흐름을 q 로 하였다. 경계조건 식 (2)를 Dirichlet 경계조건 또는 필수(essential)경계조건이라 하고 식 (3)을 Neumann 경계조건 또는 자연(natural) 경계조건이라 한다.

3.2. 유한요소법

경계조건 식 (2)~(3)을 만족하는 식 (1)의 해를 유한요소법을 이용하여 구하기 위해 온도에 대한 근사해를 다음과 같이 가정한다. 이는 주어진 문제의 모든 영역에 대해 그리고 임의의 시간에 대해 주어진 온도이다.

$$T = \sum_{i=1}^n N_i(x, y, z) T_i(t) \quad (4)$$

여기서 $N_i(x, y, z)$ 는 요소에 대해 부분적으로 정의된 함수로써 절점(nodal point)의 온도 T_i 와 함께 요소내의 임의의 점에서 온도를 가정하는데 사용된다. 해를 구하기 전에 절점에서의 온도 T_i 를 가정하고 식 (4)를 식 (1)에 대입하면 식 (4)가 엄밀해(exact solution)가 아니므로 오차에 의한 잔류(residual)가 남게 된다. 이 잔류에 가중(加重, weighting)함수 W_i 를 곱하고 전 영역에 걸쳐 적분한 값을 영으로 취하면, 절점에서의 미지수 T_i 에 대한 연립방정식을 얻게 된다. 식 (1)로부터 적분내에 2차도함수값이 들어가므로 이를 1차도함수를 갖는 항으로 차수를 낮추기 위해 Green 정리를 사용한다. 이러한 고차의 도함수를 갖는 적분항을 저차의 도함수를 갖는 적분항으로 바꾸어줌으로써, 요소와 요소의 사이에서 독립변수의 연속조건(continuity condition)을 만족시키는 함수 N_i 를 용이하게 선택할 수 있다.

이 결과 연립방정식을 행렬식으로 쓰면 다음 식과 같다.

$$C\dot{T} + KT + F = 0 \quad (5)$$

이 식에서 행렬과 벡터의 요소는

$$K_{i,j} = \sum_{\Omega} \left(\frac{\partial N_i}{\partial x} k_x \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} k_y \frac{\partial N_j}{\partial y} + \frac{\partial N_i}{\partial z} k_z \frac{\partial N_j}{\partial z} \right) d\Omega + \sum_{\Gamma_q} (\alpha_c + \alpha_r) N_i N_j d\Gamma \quad (6)$$

$$C_{ii} = \sum_{\Omega} \rho c N_i N_i d\Omega \quad (7)$$

$$F_i = - \sum_{\Omega} N_i Q d\Omega + \sum_{\Gamma_q} N_i (q - \alpha_c T_{ac} - \alpha_r T_{ar}) d\Gamma \quad (8)$$

이다. 위 과정에서 경계 Γ_q 에서 복사에 의한 열 전달은, T_{ar} 을 참고온도라 하면,

$$q_r = \varepsilon \sigma (T^4 - T_{ar}^4) = \alpha_r (T - T_{ar}) \quad (9)$$

이며 (ε 은 복사율, σ 는 Stefan 상수), 식 (6)과 식 (8)의 α_r 은

$$\alpha_r = \varepsilon \sigma (T^2 + T_{ac}^2) (T + T_{ac}) \quad (10)$$

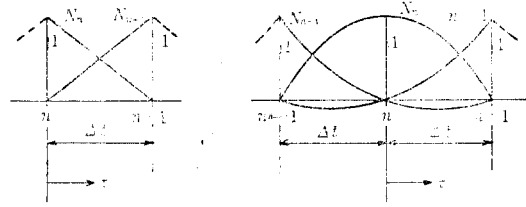
과 같이 가정하였다. 식 (5)의 열용량행렬 C 와 열전도행렬 K 그리고 열량벡터 F 가 모두 온도 T 의 함수로 주어지므로, 식 (5)는 비선형이다.

3.3. 시간적분

식 (5)에 온도 T 의 시간에 대한 1차미분항이 포함되어 있다. 이제 시간 t 를 독립변수로 하여 식 (4)와 유사한 근사해를 다음과 같이 가정한다.

$$T = \sum N_i(t) T_i(x, y, z) \quad (11)$$

식 (11)에서 함수 $N_i(t)$ 의 최저 차수항은 식 (5)에서 T 가 1차미분항을 갖고 있으므로 1차항이다. 과도상태의 온도에 대한 해를 구하기 위해 시간을 독립변수로 하여 미소시간 Δt 를 길이로 갖는 1차원 요소를 그림 1과 같이 고려한다. 그림 1에 표시한 방식 이외에 4점방식(4-point scheme), 5점방식(5-point scheme) 등도 고려할 수 있으나 실제로 2점방식(2-point scheme) 및 3점방식(3-point scheme)이 널리 사용되고 있다. 시간좌표(time coordinate)에서 국부좌표(local coordinate) τ 와 함수 N_i 및 \dot{N}_i



$$0 \leq \tau \leq 1, \quad \tau = \frac{t}{\Delta t}$$

$$N_n = 1 - \tau$$

$$N_{n+1} = \tau$$

$$\dot{N}_n = -\frac{1}{\Delta t}$$

$$\dot{N}_{n+1} = \frac{1}{\Delta t}$$

$$-1 \leq \tau \leq 1, \quad \tau = \frac{t}{\Delta t}$$

$$N_n = (1 - \tau)(1 + \tau)$$

$$N_{n+1} = \frac{1}{2} \tau(1 + \tau)$$

$$N_{n-1} = -\frac{1}{2} \tau(1 - \tau)$$

$$\dot{N}_n = -\frac{2\tau}{\Delta t}$$

$$\dot{N}_{n+1} = \left(\frac{1}{2} + \tau\right) / \Delta t$$

$$\dot{N}_{n-1} = \left(-\frac{1}{2} + \tau\right) / \Delta t$$

(a) 2점방식

(b) 3점방식

그림 1 시간좌표에서의 함수 $N_i(t)$

의 시간에 대한 1차도함수 \dot{N}_i 를 그림 1에 표시하였다. 시간좌표상에서 n 를 임의의 시간순간이라 하면 $n-1$ 및 $n+1$ 를 n 순간 이전 및 이후의 시간순간이라 한다. 따라서 요소의 길이는 두 시간순간 사이의 시간차이가 된다.

구간내의 임의의 점(τ)에서 온도 및 이의 변화율은 2점방식에서

$$T = N_n T_n + N_{n+1} T_{n+1} \quad (12)$$

및

$$\dot{T} = \dot{N}_n T_n + \dot{N}_{n+1} T_{n+1} \quad (13)$$

로 주어지고, 3점방식에서

$$T = N_{n-1} T_{n-1} + N_n T_n + N_{n+1} T_{n+1} \quad (14)$$

및

$$\dot{T} = \dot{N}_{n-1} T_{n-1} + \dot{N}_n T_n + \dot{N}_{n+1} T_{n+1} \quad (15)$$

로 주어진다. 이 식 (12)~(15)를 식 (5)에 대입하고, 가중함수 W_i 를 곱한후 적분을 취하여 주면, 2점방식에서는

$$\int_0^1 W_i [C(\dot{N}_n T_n + \dot{N}_{n+1} T_{n+1}) + K(N_n T_n + N_{n+1} T_{n+1}) + F] d\tau = 0 \quad (i=1) \quad (16)$$

이며 3점방식에서는

$$\int_{-1}^1 W_i [C(\dot{N}_{n-1} T_{n-1} + \dot{N}_n T_n + \dot{N}_{n+1} T_{n+1})$$

$$+K(N_{n-1}T_{n-1}+N_nT_n+N_{n+1}T_{n+1}) + F]dz=0 \quad (j=1) \quad (17)$$

로 된다.

온도에 따라 물성(material properties)이 변화하는 문제에서는 위 식 (16)~(17)의 행렬 C 와 K 그리고 벡터 F 가 온도의 함수이므로, 각 시간단계에서 이들의 값 C_n, K_n 및 C_{n-1}, K_{n-1} 등이 필요하게 된다. 이는 매 시간단계(time step)에서 해가 수렴할 때까지 반복계산을 하여야 하는 비선형 문제임을 뜻하며, 반복계산(iteration)을 피하기 위한 방법들이 제시되고 있다.

시간좌표의 3점, $n-1, n$ 및 $n+1$, 을 참고로 하여 온도 T_n 이 이 시간구간 $n-1$ 과 $n+1$ 사이에서 선형적으로 변화한다고 가정하면

$$\frac{\Delta T_n}{\Delta t} = \frac{T_{n+1}-T_{n-1}}{2\Delta t} \quad (18)$$

이 된다. 또한 시간 n 일때의 온도 T_n 을

$$T_n = \frac{T_{n+1}+T_n+T_{n-1}}{3} \quad (19)$$

와 같이 가정할 수 있으며, 식 (18)~(19)를 식 (5)에 대입하면 다음과 같다.

$$C_n\left(\frac{T_{n+1}-T_{n-1}}{2\Delta t}\right) + K_n\left(\frac{T_{n+1}+T_n+T_{n-1}}{3}\right) + F_n=0 \quad (20)$$

여기서 T_n 과 T_{n-1} 은 두 초기조건으로 주어지며, T_{n+1} 에 대해 식 (20)을 정리하면 다음식과 같다.

$$T_{n+1} = -\left(K_n + \frac{3}{2\Delta t}C_n\right)^{-1} \times \quad (21)$$

$$\left(K_n T_n + K_n T_{n-1} - \frac{3}{2\Delta t}C_n T_{n-1} + 3F_n\right)$$

시간좌표에서 세 순간 $n-1, n$ 및 $n+1$ 을 택하여 $n+1$ 에서의 온도 T_{n+1} 을 구하는데, 행렬식을 C_n 및 K_n 과 같이 n 에서의 값만 필요로 한다. 이는 2점방식에 의한 식 (16)이나 3점방식에 의한 식 (17)과 달리 두 초기조건 T_n 과 T_{n-1} 을 알고 있으면 반복계산(iteration)을 하지 않고 식 (21)에 의해 T_{n+1} 을 구할 수 있음을 뜻한다.

과도상태의 온도에 대한 해석을 유한차분법(finite difference)을 이용할 경우 식 (21)에 의

하면 안정된 해를 줌과 동시에 수치해의 결과가 이론해의 값에 수렴함이 알려지고 있다. 또한 유한요소법에 식 (21)을 적용할 경우에도 안정성과 수렴성이 수치실험(numerical experiments)을 통해 입증되었다. 그러나 이러한 안정된 해가 기대되는 문제가 제한되어 있으므로 이를 해결하기 위한 방법들이 연구되고 있다.

식 (21)에 의한 해는 수치근사(numerical approximation)해이다. 근사과정에 포함된 오차로 인해 수치방법에 의한 해는 그림 2와 같은 파동형상을 갖게 된다.

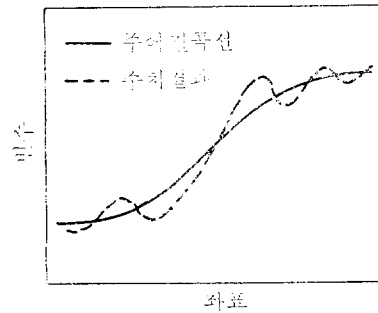


그림 2 원만한 분포의 변수와 수치근사해에 의한 파동

이러한 파동형상의 유한요소결과를 원만하게 하기 위해 시간 n 에서 열입력에 의한 벡터 F_n 을, 식 (19)에서 초기조건 T_n 을 가정할 때와 같은 방법으로, 다음과 같이 가정한다.

$$F_n = \frac{F_{n+1}+F_n+F_{n-1}}{3} \quad (22)$$

이 외에도 초기조건 T_{n-1} 을, $n \geq 2$ 인 경우에,

$$T_{n-1} = \frac{T_n+T_{n-1}+T_{n-2}}{3} \quad (23)$$

과 같이 재정리하면 식 (21)에 의한 수치결과와 파동형상이 더욱 감소되는 실험결과가 있다.

식 (21)에 따라 T_{n+1} 을 계산할 때, 관계행렬식과 벡터에 시간 $n+1$ 과 n 사이의 시간요소의 크기, 즉 시간증분(time increment),

$$\Delta t = t_{n+1} - t_n \quad (24)$$

의 적절한 범위를 고려하여야 한다. 안정된 해

를 갖기 위한 시간증분의 이론적 한계치는 공간 요소(spatial element)의 크기와 물성치의 함수로 주어지므로 온도에 따라 물성이 변화하는 비선형 문제에서는 적용하기가 어려우며, 실제 이동경계 문제를 해석하는데 있어서 컴퓨터 시간의 낭비를 가져오게 된다. 문제에 따라 여러가지 방법이 소개되고 있으나 온도차 $T_{n+1} - T_n$ 의 크기 $\|\Delta T\|$ 을 계산하여, 이 $\|\Delta T\|$ 의 값이 미리 가정한 일정한 값보다 적으면 Δt 를 증가하여 주고, 크면 감소하여 주어 컴퓨터 시간을 절약하면서 이동경계의 위치와 함께 온도분포를 구하는 방법이 있다. 온도차 $\|\Delta T\|$ 의 구체적인 범위 및 시간증분 Δt 의 증감은 문제에 따라 결정되어야 하나, 모든 문제에 적용될 수 있는 일반화된 방법이(저자가 아는 범위에서는) 없다.

3.4. 상변화요소에서의 수치적분

식 (6)~(8)의 행렬과 벡터는 함수와 물성의 영역과 고정경계에 대한 적분으로 주어진다. 다양한 형상의 요소에 대해 이 적분을 수행하기 위해 국소좌표(local coordinate)에서 Gauss 적분을 하고 이를 전체좌표(global coordinate)로 투영하게 된다. 요소의 영역내부와 고정경계에서는 이들의 계산이 일반적으로 사용되는 수치적분방법에 의해 가능하지만 상변화가 있는 요소에서는 상변화에 따른 물성의 급격한 변화로 인해 적절한 수치계산을 할 수 없게 된다. 상변화에 따른 물성변화의 대표적인 예로 물의 결빙 및 해빙에

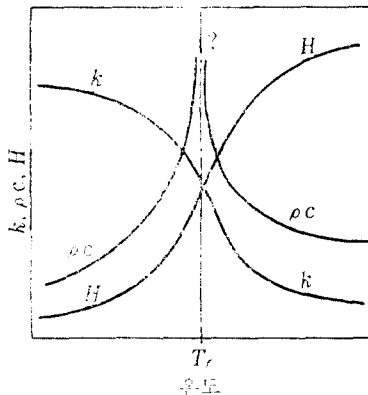


그림 3 물의 빙점 주위에서의 물성의 변화

따른 물성을 그림 3에 도시하였다.

결빙되어 고체상태로 있는 경우와 해빙되어 액체상태로 있는 경우는 열전도도 k 와 열용량 ρc 의 크기에 차이가 있으나, 이 온도범위에서는 물성이 온도에 따라 일정한 상수값을 갖게되므로 적분을 수행할 수 있게 된다. 그러나 상변화가 발생하는 온도구간에서는 잠열(latent heat)의 효과로 인해 열용량 ρc 가 그림 3과 같은 Dirac 함수에 가까운 경향을 보여 어떠한 원만한 함수로도 표시할 수가 없다. 상변화가 발생하는 요소에서 ρc 가 포함된 적분을 수행하기 위해서는 ρc 가 잠열을 나타낼 수 있어야 한다. 이를 위해 열용량과 온도의 함수로 표시되면서 상변화 구간에서 원만하고 연속인 물리적인 양으로써 엔탈피(Enthalpy)를 이용한다. 엔탈피는

$$H = \int_{T_r}^T \rho c dT \quad (25)$$

로 주어지며, 상변화구간에서 열용량은

$$\rho c = \frac{dH}{dT} \quad (26)$$

로부터 구할 수 있다. 따라서 상변화를 수반하는 문제에서는 열용량 ρc 대신에 엔탈피 H 를 온도의 함수로 표시하고, 각 결점(node)에서의 엔탈피 H_i 로부터 요소내부의 임의의 점에서 엔탈피는 식 (4)에서 도입한 함수 N_i 를 이용하여

$$H = \sum N_i(x, y, z) H_i \quad (27)$$

로부터 계산한다. 식 (7)의 열용량 행렬의 요소 C_{ij} 를 Gauss 적분법으로 계산하기 위해 적분점(integration point)에서의 열용량 ρc 는 식 (26)에 따라 구한다. 식 (26)에 따라 열용량 ρc 를 계산하는데 엔탈피의 온도에 대한 변화율은 공간에서의 변화율과 시간좌표에서의 변화율 등을 고려한 방법들이 있다.

먼저 엔탈피의 좌표에 대한 변화율과 온도의 좌표에 대한 변화율을 구하고, 이들의 비로써 열용량은

$$\rho c \approx \frac{1}{3} \left(\frac{\partial H}{\partial x} / \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y} / \frac{\partial T}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z} / \frac{\partial T}{\partial z} \right) \quad (28)$$

에 따라 상변화 요소에서 ρc 의 극값을 잃지 않

고 열에너지의 균형을 계산한다.

다음은 좌표에 대한 변화를 대신에 상변화 방향에 대한 변화율을 구하고, 즉 온도구배의 방향에 따라 엔탈피와 온도의 변화를 계산하고,

$$\rho c = \frac{\partial H}{\partial S} / \frac{\partial T}{\partial S} = \left(\frac{\partial H}{\partial x} n_x + \frac{\partial H}{\partial y} n_y + \frac{\partial H}{\partial z} n_z \right) / \frac{\partial T}{\partial S} \quad (29)$$

로부터 열용량을 계산한다. 위 식 (29)에서

$$n_x = \frac{\partial T}{\partial x} / \frac{\partial T}{\partial S}, \quad n_y = \frac{\partial T}{\partial y} / \frac{\partial T}{\partial S}, \quad n_z = \frac{\partial T}{\partial z} / \frac{\partial T}{\partial S} \quad (30)$$

등이고

$$\frac{\partial T}{\partial S} = \left[\left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (31)$$

이므로 식 (29)는

$$\rho c = \left(\frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z} \frac{\partial T}{\partial z} \right) / \left[\left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (32)$$

으로 된다. 상변화가 발생하는 요소에서 식 (28) 또는 식 (32)로 열용량 ρc 를 계산하고 식 (21)로 T_{n+1} 을 계산한 결과, T_{n+1} 에 약간의 파동형상이 나타난다. 엔탈피와 온도의 공간에 대한 변화율의 평균을 취하여 열용량을

$$\rho c = \left\{ \left(\frac{\partial H}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial H}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial H}{\partial z} \right)^2 \right\}^{1/2} / \left\{ \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right)^2 \right\}^{1/2} \quad (33)$$

으로 계산하여 주어 파동형상의 감소를 기대하나 식 (28) 또는 식 (32)에 대한 장점은(저자의 경험상) 없다.

지금까지 언급한 방법들은 모두 엔탈피의 온도에 대한 변화율의 평균을 공간에 대해서 고려하였다. 그러나 식 (21)에서 행렬 C_n 을 계산하는데 $(\rho c)_n$ 이 필요하고 이를 엔탈피와 온도의 공간에 대한 변화율 대신 시간에 대한 변화로써 계산한다.

$$(\rho c)_n = \frac{dH}{dT} \approx \frac{H_n - H_{n-1}}{T_n - T_{n-1}} \quad (34)$$

이 식 (34)로부터 직접 계산한 $(\rho c)_n$ 으로 Stefan 문제와 2차원에서 물의 결빙에 관한 문제를 해석하여 파동형상이 감소되고 이론해와 잘 일치함을 보여주고 있다.

지금까지 식 (28), (32), (33) 및 (34) 등으로 상변화가 발생하는 요소에서 잠열의 효과로 인한 열용량의 급격한 변화를 수치적분에 포함시킬 수 있음을 설명하였다. 위 방법들에 의한 열용량행렬의 계산이 잠열을 포함시키고 있으나, 온도의 변화율 및 상변화구간의 가정 등 동시에 고려하여야 할 사항들이 있으며, 이는 다음 검토에서 논의하고자 한다.

4. 예 제

상변화로 인한 이동경계문제에 대한 대표적인 예로 Stefan 문제를 고려해 본다. Stefan이 극지(極地)의 얼음두께를 연구한 이후 결빙문제를 Stefan 문제라 한다. 이는 본질적으로 1차원 문제이며, Stefan 및 Neumann에 의해 해석적인 해가 주어진 경우이므로, 이동경계문제를 수치적으로 계산한 결과를 비교 검토하기 위해 자주 인용되는 문제이다.

본 예제에서는 Stefan 문제를 유한요소법으로 해석하는데 따른 정성적인 내용만 설명하기로 한다. 온도에 따른 물성치의 변화는 실험을 통해 정량적인 값들이 결정되어야 하나 본 예제에서는 그림 3의 분포를 이상화하여 그림 4와 같은 분포를 갖는 것으로 가정하였다. 이 그림 4의 내용은 실제 물의 물성치를 정성적으로 구체화시킨 것이며, 상변화 구간에서 잠열의 효과는 ρc 의 크기 및 엔탈피의 증가로 표시하였다.

상변화 구간에서 열용량은 잠열의 효과때문에 불연속으로 되며, 상변화 구간에서 이의 크기는 엔탈피의 상승으로 표시하였다. 열전도도는 상변화 구간에서 선형적으로 감소하는 것으로 가정하였다.

결빙온도를 T_f 로, 상변화 구간을 $T_f - \Delta T$ 에

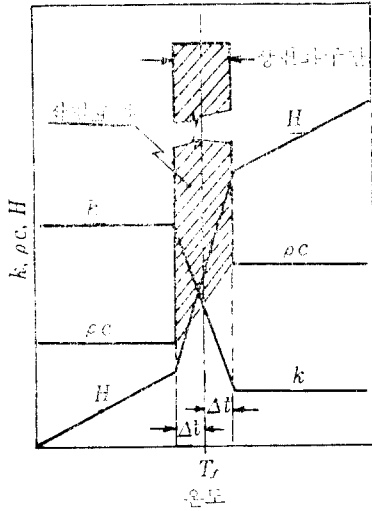
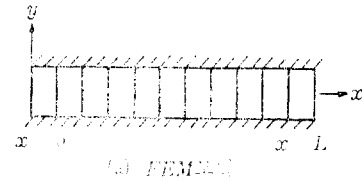


그림 4 물의 물성치의 정성적 이상화

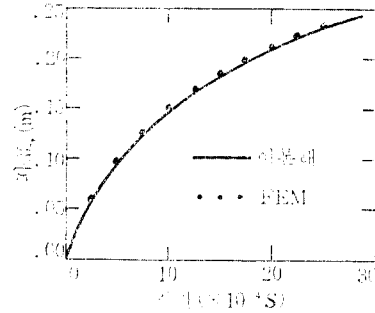
서 $T_f + \Delta T$ 로 가정하였다. 이 1차원 문제에 대한 유한요소모델을 그림 5와 같이 2차원으로 이상화하였다. 길이 방향을 x -축으로 하고 가로 방향을 y -축으로 하여, 가로방향으로는 열의 흐름이 없는 단열조건을 취하였다. 잠열의 효과는 식 (28)을 사용하여 계산하였으며, 이때 영역은 $x-y$ 좌표의 2차원이므로 식 (28)의 분모의 계수는 2이다.

모델에서 $x=0$ 일때 온도는 얼음의 온도 T_i 이며 $x=L$ 일때 온도는 물의 온도 T_w 이다. 상변화구간 $2\Delta T$ 는 $0.5K$ 로 가정하였다. 이론해는 좌표의 구간이 $0 \leq x \leq \infty$ 에 대한 것이나, 모델은 $0 \leq x \leq 1(m)$ 로 구간을 취하였으므로, $x=1m$ 에서 물의 온도 T_w 에 변화가 있게 되면 컴퓨터계산을 중지하였다. 초기시간증분 (Δt)을 200초로 하여 앞에서 설명한 방법으로 시간증분을 변화시켜 가면서 계산한 이동경계의 위치가 그림 5(b)에 표시되어 있다. 이동경계의 위치는 결빙점(freezing point, freezing temperature)의 위치를 시간에 대해 표시한 것이다.

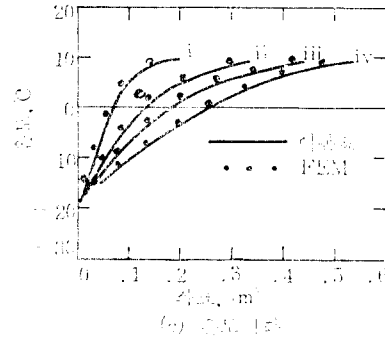
또한 모델길이에 따른 온도분포는 그림 5(c)에 표시하였으며, 해석적 곡선과 유한요소결과가 잘



(a) FEM 모델



(b) 이동경계의 위치



i: 1.8×10^4 s, ii: 7.2×10^4 s
iii: 14.4×10^4 s, iv: 28.8×10^4 s

그림 5 Stefan 문제의 유한요소모델과 이동경계의 위치

일치하고 있음을 보여주고 있다.

5. 검토 및 결론

지금까지 상변화를 수반하는 이동경계문제를 유한요소법을 적용하여 해석하는데 따른 이론 및 기법을 소개하고 물의 결빙 및 해빙을 예로 들어 설명하였다. 관련문헌을 참고하는 것이 구체적인 문제의 해결방법을 찾는 가장 좋은 방법이 될 것이다. 대부분의 참고문헌(특히 기술논문)은 특정한 이론이나 방법의 특징과 장점을 주로 기술하고 있다. 이동경계문제를 취급한 기술문

현에서도 해석이 가능하다는 의견 또는 개선된 방법이라는 점이 강조되고 있다. 그러나 이동경계문제를 실제로 취급하는 데는 기술논문에서 언급하지 않은 어려움이 허다하다.

일례로 앞에서 설명한 Stefan 문제를 해석하는데 상변화 구간이 요소와 요소의 경계를 넘을 때 온도분포(분포)에 심한 파동형상이 나타나게 된다. 그림 6에서 결빙온도의 위치를 시간에 대해 도시하여 보면, 이동경계(빙점전선, freezing front)가 요소와 요소의 경계를 넘어갈 때 이동경계 위치의 급격한 전진이 있게 되고, 온도분포의 파동형상으로 인해 복수의 빙점전선이 나타나게 된다.

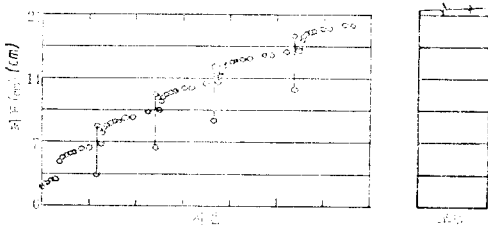


그림 6 온도분포의 파동형상으로 인한 복수의 이동경계

이는 일정한 온도 T_i 를 빙점전선으로 가정하고 온도분포곡선에서 온도 T_i 가 복수가 됨으로 해서 나타나는 현상이다. 따라서 이러한 파동형상을 시간증분의 감소, 요소크기의 감소 및 수치적분방법의 개선 등을 통해 줄이는 방법들이 요구된다.

상변화구간 ΔT 의 가정 또한 온도분포에 영향을 미치게 된다. 그림 7은 이 ΔT 의 영향을 나타내주는 예이다. 물성은 열용량 $\rho c = 1$, 열전도도 $k = 1.08$, 잠열의 효과는 70.26, 모델의 길이 $L = 4m$ 로 하였을 때 $x = 1m$ 에서의 시간에 따른 온도의 저하를 표시하였다. 잠열의 효과는 식 (33)을 이용하여 계산하였다. 여기서 상변화구간의 가정이 수치해의 결과에 영향을 미치게 됨을 알 수 있다.

온도분포가 상변화 구간에 걸쳐 급격한 변화가 있을 때는 앞에서 설명한 식 (19), (22) 및

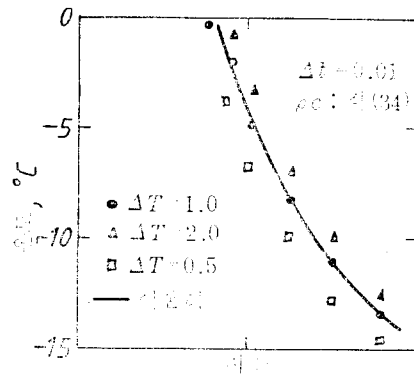


그림 7 상변화구간의 가정에 따른 속도저하곡선의 차이

(23) 등의 파동형상을 줄이는 방법에도 불구하고, 수치해의 결과는 항상 어느 정도의 파동형상을 나타낸다. 상변화가 없는 경우에도 변수의 분포가 급격히 변화할 때는 이러한 파동형상이 나타나게 되므로, 이를 해결할 수 있는 수치적 방법(a numerical method)이 요구된다. 상변화로 인한 이동경계문제에서는 상변화가 일어나는 요소에서의 온도변화가 상변화 온도구간 ΔT 보다 적어야 원만한 온도분포곡선을 얻을 수 있다고 하였다. 그러나 이는 원만한 분포와 변화를 갖는 경우이며, 지금까지 설명한 예에서는(즉 물의 결빙문제) 온도분포가 액체(물)와 고체(얼음)에 걸쳐 원만한 분포를 갖고 있으므로, 상변화가 발생하는 위치와 이 위치의 이동을 계산할 수 있었다.

여기서 소개한 유한요소기법은 원만한 온도변화를 갖는 이동경계문제에 대해 적용할 수 있음을 설명하였다. 상변화가 일어나는 요소에서 어느 한 시간 단계에 변화할 수 있는 온도의 범위는 상변화 온도구간 보다 적어야 원만한 수치해를 얻을 수 있음을 소개하였다. 잠열의 효과를 엔탈피의 온도에 대한 변화율로 처리하여 열용량 행렬을 계산할 수 있음을 설명하였다. 급격한 변화를 갖는 온도분포를 수치적으로 근사해를 구할 때 나타나는 파동형상은 연속적인 변수를 부분적으로 근사해를 가정 하는데서 포함되는 오차

에 기인한다. 따라서 이러한 급격한 변화의 변수를 취급하는 기법이 요구된다.

상변화를 수반하는 이동경계문제는 물의 결빙 금속의 열처리, 용접, 고체연료의 연소 등에서 많이 접하게 되나 전문적인 프로그램이 없으므로(저자가 조사한 바에 의하면) 온도분포를 요구하는 문제에서는 이의 선결이 요망되고 있다. 특히 구조해석문제에서 시간에 따라 온도조건이 변하는 경우가 많아 온도분포에 대해 따로 계산하고 그 후 구조해석을 하는 방법이 있으나, 이는 상변화와 같은 물성의 큰 변화가 없는 경우에만 가능하다. 따라서 상변화가 있는 문제에서 열탄성(thermo-elasticity)이나 열탄소성(thermo-elasto-plasticity)해석을 하기 위해서는 이동경계와 구조해석을 동시에 하여야 한다.

참 고 문 헌

- (1) Bonacina, C., G. Comini, "On the solution of the nonlinear heat conduction equations by numerical methods," *Int J Heat Mass Transfer*, Vol. 16, pp. 581~589, 1973
- (2) Bonacina, C., G. Comini, A. Fasano, and M. Primicerio, "Numerical solution of phase-change problems," *Int J Heat Mass Transfer*, Vol. 16, pp. 1825~1832, 1973
- (3) Comini, G., S. DelGuidice, R.W. Lewis and O.C. Zienkiewicz, "Finite element solution of non-linear heat conduction problems with special reference to phase change," *Int J Num Meth Engng*, Vol. 8, pp. 613~624, 1974
- (4) Crank, J., "*The Mathematics of Diffusion*," Clarendon Press, Oxford, 2nd ed., 1975
- (5) Del Guidice, S., G. Comini, and R.W. Lewis, "Finite element simulation of freezing progress in soils," *Int J Num Anal Meth Geomechanics*, Vol. 2, pp. 223~235, 1978
- (6) Luikov, A.V., "*Analytical Heat Diffusion Theory*," Academic Press, 1968
- (7) Morgan, K., R.W. Lewis, and O.C. Zienkiewicz, "An improved algorithm for heat conduction problems with phase change," *Int J Num Meth Engng*, Vol. 12, pp. 1191~1195, 1978
- (8) Ockendon, J.R. and W.R. Hodgkins, "*Moving Boundary Problems in Heat Flow and Diffusion*," Being the Proceedings of the Conference held at the University of Oxford, 25~27 March 1974, Oxford, 1975
- (9) Wilson, D.G., A.D. Solomon and P.T. Boggis, "*Moving Boundary Problems*," being Proceedings of the Symposium and Workshop on Moving Boundary Problems held at Gatlinburg, Tennessee on September 26~28, 1977, Academic Press, 1978
- (10) Zienkiewicz, O.C., C.J. Parekh, and A.J. Wills, "The application of finite elements to heat conduction problems," *Int J Num Meth Engng*, Vol. 8, pp. 821~845, 1974

