제 7 회

食品工學 計算法

卞 裕 亮
〈延世大 工大 食品工學科 敎授〉

3-3. 대류에 의한 열이동

대륜에 의한 열이동은 유체의 이동, 혼합에 의하여 열이 전달되는 현상이다.

대류에는 가열이나 냉각시 밀도 차이에 의해 일어나는 자연대류와 외부에서 강제로 유체를 이동·교반시킴으로써 일어나는 강제대류의 두 가지가 있다.

유체는 고체표면에서 얇은 유체층을 형성하여 전열 저항을 나타내는데, 유체의 열전도도와 경막 두께의 비를 표면열이동계수(surface heat transfer coefficient)라 한다.

실제 식품 공업에서는 주로 전도와 대류가 혼합된 형태의 열이동이 일어나며, 이때 열이동 계산에서 중요한 점은 표면 열이동 계수(h)를 구하는 것이다.

대류에 의한 열이동은 주로 다음의 무차원군(dimensionless group)들 사이의 실험적인 경험식으로 표현되며, 이 실험식으로부터 표면 열이동 계수를 구할 수 있다.

$$\left.\begin{array}{l} \text{넛셀수}(N_u)=h_cD/k \\ \text{프랜틀수}(P_r)=C_p\mu/k \\ \text{레이놀드수}(R_e)=\dfrac{Dv\rho}{\mu} \\ \text{그래숍수}(G_r)=D^3\rho^2\beta g\Delta T/\mu^2 \end{array}\right\} \quad (3\text{-}20)$$

여기서 h_c는 표면 열이동 계수(W/m^2·K), D는 관의 직경(m), L은 관의 길이(m), k는 열전도도(W/m·K), C_p는 정압비열(J/kg·K), μ는 점도(Pa·s), ρ는 밀도(kg/m^3), β는 열팽창 계수(K^{-1}), g는 중력 가속도(9.8m^2/s)이며, 이 값들은 경막의 평균 온도(T_f)에서 구한다.

3-3-1. 자연대류

자연대류(natural convection)에 의한 열이동은 일반적으로 다음과 같은 형태의 관계식으로 표현된다.

$$(N_u)=a[(P_r)\cdot(G_r)]^m \quad (3\text{-}21)$$

여기서 a와 m은 표 3-1과 같이 각 경우에 따라 실험적으로 결정된 상수이다.

〔예제 3-10〕 수직 가열벽의 높이가 0.305m, 표면의 온도가 505.4K인 제빵용 오븐이 311K의 공기와 접촉하고 있을 때, 표면 열이동 계수와 단위 면적당 열이동 속도를 구하라. (단 복사에 의한 열이동은 무시한다.)

〔풀이〕 경막의 평균온도 $T_f=\dfrac{T_w+T_b}{2}$

$=\dfrac{505.4+311}{2}=408.2K$

408.2K에서 공기의 물성치를 구하면, $k=0.0343$W/m·K, $\rho=0.867$kg/m^3, $P_r=0.69$, $\mu=2.32\times10^{-5}$ Pa·s, $\beta=\dfrac{1}{408.2}=2.45\times10^{-3}$

〈표 3-1〉 자연대류에서 식(3-21)의 상수치

Physical Geometry	$(N_{Gr}N_{pr})$	a	m
Vertical planes and cylinders			
[vertical height $L<1m(3ft)$]			
	$<10^4$	1.36	1/5
	10^4-10^9	0.59	1/4
	$>10^9$	0.13	1/3
Horizontal cylinders			
[diameter D used for L and $D<0.20m(0.66ft)$]			
	$<10^{-5}$	0.49	0
	$10^{-5}-10^{-3}$	0.71	1/25
	$10^{-3}-1$	1.09	1/10
	$1-10^4$	1.09	1/5
	10^4-10^9	0.53	1/4
	$>10^9$	0.13	1/3
Horizontal plates			
Upper surface of heated plates or lower surface of cooled plates	$10^5-2\times10^7$	0.54	1/4
	$2\times10^7-3\times10^{10}$	0.14	1/3
Lower surface of heated plates or upper surface of cooled plates	10^5-10^{11}	0.58	1/5

K^{-1}, $\Delta T=(505.4-311)=194.4K$이다.

따라서 $G_r=\dfrac{L^3\rho^2 g\beta\Delta T}{\mu^2}$

$$=\frac{(0.305)^3(0.867)^2(9.80)(2.45\times10^{-3})(194.4)}{(2.32\times10^{-5})^2}$$

$=1.84\times10^8$

그러므로 $G_r\cdot P_r=(1.84\times10^8)\cdot(0.690)$

$=1.270\times10^8$

식 3-21과 표 3-1에서

$$N_u=\frac{hL}{k}=0.59\ (G_r\cdot P_r)^{\frac{1}{4}}$$

$$\therefore\ h=\frac{k}{L}a(G_r\cdot P_r)^m$$

$$=\left(\frac{0.0343}{0.305}\right)(0.59)(1.27\times10^8)^{\frac{1}{4}}$$

$=7.03W/m^2\cdot K$

한편 열이동 속도는 (3-13)식에서

$q=hA(T_w-T_b)$

$$\therefore\ \frac{q}{A}=(7.03)(194.4)=1366.6W/m^2$$

3-3-2. 강제대류

상변화가 없는 경우에 있어서 강제대류(forced convection)는 유체가 층류(laminar flow)로 흐를 경우와, 난류(turbulent flow)로 흐르는 경우로 나눠서 생각해야 한다.

유체가 관 내부에서 흐르는 경우는 다음의 실험식이 성립한다.

(ㄱ) 층류로 흐를 때($R_e<2100$)

$$N_u=1.86\left(R_e\cdot P_r\cdot\frac{D}{L}\right)^{1/3}\left(\frac{\mu_b}{\mu_m}\right)^{0.14} \quad (3\text{-}22)$$

(ㄴ) 난류로 흐를 때($R_e>10,000$, $0.7<P_r<700$, $L/D>60$)

$$N_u=0.023\ R_e^{0.8}P_r^{0.4}\left(\frac{\mu_b}{\mu_w}\right)^{0.14} \quad (3\text{-}23)$$

여기서 μ_b와 μ_w는 유체의 온도와 벽면의 온도에서의 점도를 나타낸다.

(ㄷ) 전압이 1기압인 공기의 난류

$$h_L=\frac{3.52v^{0.8}}{D^{0.2}} \quad (3\text{-}24)$$

(ㄹ) 유체가 물인 경우

$$h_L=1429(1+0.0146T)\frac{v^{0.8}}{D^{0.2}} \quad (3\text{-}25)$$

여기서 T는 섭씨 온도(°C)이며, h_L은 대수평균 온도에서의 표면 열이동계수이다.

유체가 고체 주위를 . . 때는 다음의 식으로 표현된다.

(ㅁ) 고체가 구인 경우($1<R_e<70,000$)

$$N_u=2.0+0.6\ R_e^{\frac{1}{2}}\ P_r^{\frac{1}{3}} \quad (3\text{-}26)$$

(ㅂ) 유체가 평면위를 층류로 흐르는 경우

($R_e<3\times10^5$, $P_r>0.7$)

$$N_u=0.664\ R_{eL}^{0.5}\ P_r^{\frac{1}{3}} \qquad (3\text{-}27)$$

(ㅅ) 유체가 평면 위를 난류로 흐르는 경우 ($R_e>3\times10^5$, $P_r>0.7$)

$$N_u=0.0366R_{eL}^{0.8}N^{\frac{1}{3}} \qquad (3\text{-}28)$$

여기서 R_{eL}은 관의 직경 D대신 평면의 길이 L을 사용한 레이놀드수이다.

〔예제 **3-11**〕 탈지 분유 수용액이 2B동관(내경 52.9mm)내를 질량 유속 1,500kg/h로 흘러 30°C에서 50°C까지 가열된다. 관 내벽에서의 표면 열이동 계수를 구하라. (유체의 평균 온도에서의 밀도는 1.05×10^3kg/m^{3}이고 점도는 1.5×10^3Pa·s, 비열은 4.2×10^3J/kg·K, 열전도도는 0.5W/m·K이다.)

〔풀이〕 관의 단면적$=\pi(0.0529)^2/(4)$
$=2.198\times10^{-3}$m^2

$\bar{v}=(1500)/(3600)(1.05\times10^3)(2.198\times10^{-3})$
$=0.1805$m/s

$R_e=(0.0529)(0.1805)(1.05\times10^3)/(1.5\times10^{-3})=6.684\times10^3$

난류이므로 (3-23)식을 이용하여야 한다.

$P_r=(4.2\times10^3)(1.5\times10^{-3})/(0.5)=12.6$

$\therefore\ N_u=\dfrac{h\cdot D}{k}=(0.023)(6.684\times10^3)^{0.8}(12.6)^{0.4}=72.6$

$\therefore\ h=(72.6)(0.5)/(0.0529)=688$W/m^2·K

〔예제 **3-12**〕 직경이 5.1cm이고 표면 온도가 82.2°C인 구를 1기압, 15.6°C의 공기로 냉각하고자 한다. 공기의 유속이 12.2m/s일 때, 표면 열이동 계수를 구하라.

〔풀이〕 경막의 평균 온도 $T_f=48.9(322.1K)$ 그러므로 $322.1K$에서 공기의 물성치를 구하면, $k=0.028$W/m·K, $\rho=1.097$kg/m^3, $\mu=1.95\times10^{-5}$Pa·s, $P_r=0.704$이다.

$$R_e=\frac{(0.051)(12.2)(1.097)}{1.95\times10^{-5}}=3.49\times10^4$$

난류이므로 (3-26)식을 이용한다.

$N_u=2.0+(0.6)(3.49\times10^4)^{0.5}(0.704)^{\frac{1}{3}}$
$=102.18$

$\therefore\ h=(102.18)(0.028)/(0.051)$
$=56.1$W/m^2·K

3·4. 非定常狀態 傳熱

비정상상태에서 전도에 의한 열이동은 프리에의 제 2 법칙(Fourier's 2nd law)에 따른다.

$$\frac{\partial T}{\theta\partial}=\alpha\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right) \qquad (3\text{-}29)$$

여기서 α는 열확산도(thermal diffusivity) 〔m^2/s〕로 $k/C_p\cdot\rho$로 표시되며 θ는 전열시간이다.

비정상 상태에서의 전열 계산은 (3-29)식을 여러 경우에 따라 직접 푸는 해석적 방법과 이 해석적 방법에 의해 구한 解(solution)를 도표화하여 이용하는 방법, 그리고 초기및 경계조건이 복잡한 경우에는 수치해석(numerical analysis)을 이용한 방법등이 있다.

3-4-1. 해석적 방법

고체 표면과 액체 사이의 전열 저항이 무시되는 경우에, 여러 가지 고체의 모양과 초기 및 경계조건에 따라 (3-29)식의 해를 구하면 다음과 같다.

(ㄱ) semi-infite slab . . . . .

$$Y=\frac{(T_e-T)}{(T_e-T_0)}=erf\left[x/2(\alpha\theta)^{\frac{1}{2}}\right] \qquad (3\text{-}30)$$

초기 및 경계조건 :

	$x=0$	$x>0$
$\theta=0$	T_e	T_0
θ	T_e	T
$\theta\to\infty$	T_e	T_e

(ㄴ) infite slab에서의 전열

$$Y=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1-(-1)^n}{n}\left[\sin\left(\frac{n\pi}{2L}x\right)\right]\right.$$

$$\left[exp\left(-\frac{n^2\pi^2\alpha}{4L^2}\theta\right)\right]\Big\} \qquad (3\text{-}31)$$

초기 및 경계조건 :

	$x=0, 2L$	$0<x<2L$
$\theta=0$	T_e	T_0
θ	T_e	T
$\theta\to\infty$	T_e	$\to T_e$

$\theta,\quad x=L,\quad \dfrac{\partial T}{\partial x}=0$

(ㄷ) 반경이 R인 infite cylinder에서의 전열

$$Y=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_0[B_n(r/R)]}{B_nJ_1(B_n)}exp(-B_n{}^2F_0) \qquad (3\text{-}32)$$

여기서 r은 중심축에서 반경 방향의 거리이며, J_0, J_1은 Bessel함수, B_n은 $J_0(B_n)$의 n번째 근(root), F_0는 Fourier수로 $\dfrac{\alpha\theta}{R^2}$을 나타낸다.

(ㅁ) Newmann의 관계식

$$Y=(Y)_x(Y)_y(Y)_z \qquad (3\text{-}33)$$

여기서 $(Y)_x, (Y)_y, (Y)_z$는 각각 x, y, z 방향으로의 Y이다.

(ㅂ) 반경이 R인 구에서의 전열

$$Y=\sum_{n=1}^{\infty}2(-1)^{n+1}\frac{\sin[n\pi(r/R)]}{n\pi(r/R)}$$
$$exp[-1(n\pi)^2F_0] \qquad (3\text{-}34)$$

〔예제 3-13〕 초기 온도가 100°C인 1m×1m×3cm의 편육을 10°C의 물속에. 냉각시킬 때, 냉각 10分후에 편육의 중심 온도를 구하라. 단, 경막 전열 저항은 무시하며 편육의 열전도도는 0.6W/m·K, 비열은 3.3×10^3J/kg·K, 밀도는 1.2×10^3kg/m³이다.

〔풀이〕 두께에 비하여 가로, 세로의 길이가 매우 커서 infinite slab으로 생각할 수 있으므로 식(3-31)을 이용하여 계산한다.

$T_0=100+273.2=373.2(K)$

$T_e=10+273.2=283.2(K)$

$\theta=(10)(60)=600(s)$

$L=(0.03)/(2)=0.015(m)$

$x=L=0.015(m)$

$\alpha=k/C_p\cdot\rho=(0.6)/(3.3\times10^3)(1.2\times10^3)$

$=1.515\times10^{-7}(m^2/s)$

$\dfrac{\alpha\theta}{4L^2}=(1.515\times10^{-7})(600)/(4)(0.015)^2$

$=0.1010$

$$Y=\frac{T_e-T}{T_e-T_0}=\frac{4}{\pi}\{exp[-\pi^2(0.1010)]$$
$$-\left(\frac{1}{3}\right)exp[-9\pi^2(0.1010)]$$
$$+\left(\frac{1}{5}\right)exp[-25\pi^2(0.1010)]\cdots\cdots\}$$
$$=\left(\frac{4}{\pi}\right)(0.3690-1.270\times10^{-4}$$
$$+1.503\times10^{-11}-\cdots\cdots)$$
$$=0.4697$$

$\therefore\ T=283.2-(0.4697)(283.2-373.2)$

$=325.5(K)=52.27(°C)$

3-4-2. 도표를 이용하는 방법

해석적 방법은 계산이 복잡하고 시간이 많이 걸리기 때문에 일반적으로 다음의 무차원군들의 관계로 도표화한 것을 이용한다.

$$Y=f(X, n, m) \qquad (3\text{-}36)$$

여기서 $Y=(T_e-T)/(T_e-T_0)$: 무차원온도

$X=\alpha\theta/R^2$: 무차원 시간

$n=r/R$: 무차원 위치

$m=k/(hR)$: 무차원 전열 저항

그림 3-7～3-9는 가장 많이 사용되는 도표로 Gurney-Lurie선도라 한다. Gurney-Lurie선도는 임의의 위치에 있어서 온도 변화의 개략적인 값을 얻는 데 이용된다.

X가 0.4～0.5이하에서는 부정확하지만, 이 범위에 대해서는 Olson-Schutz의 표나 그림 3-10을 이용하면 좋다. 육면체의 경우에는 그림 3-7을 이용하여 Newmann의 방법에 의해 전열 계산을 한다.

그림 3-7～3-9에서 m이 6～10이상인 경우에는 고체 표면의 전열 저항에 의해 지배를 받기 때문에 이런 경우는 다음 식에 의해 전열 계산을 한다.

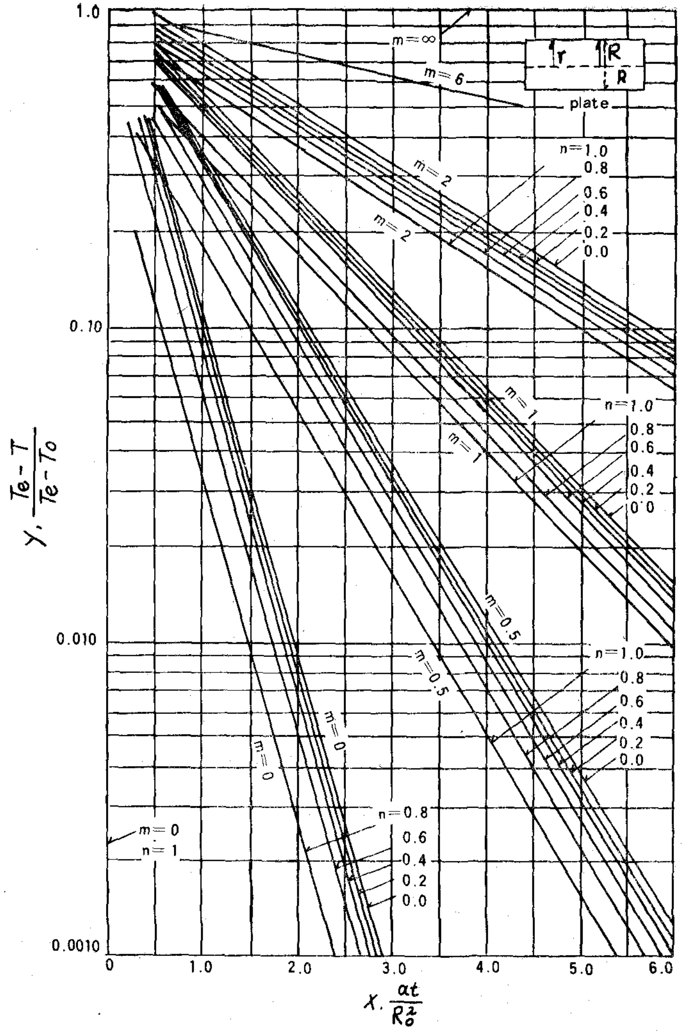

그림 3-7. Infinite Slab에서의 Gurney-Lurie선도

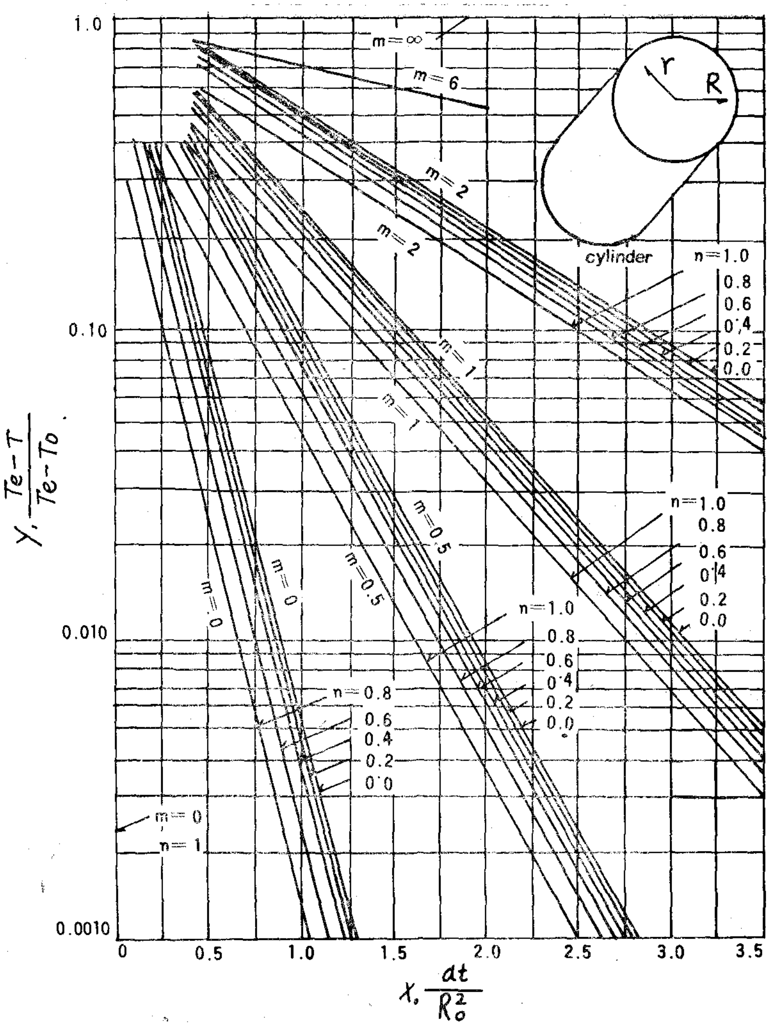

그림 3-8. Infinite에서의 Cylinder Gurney-Lurie선도

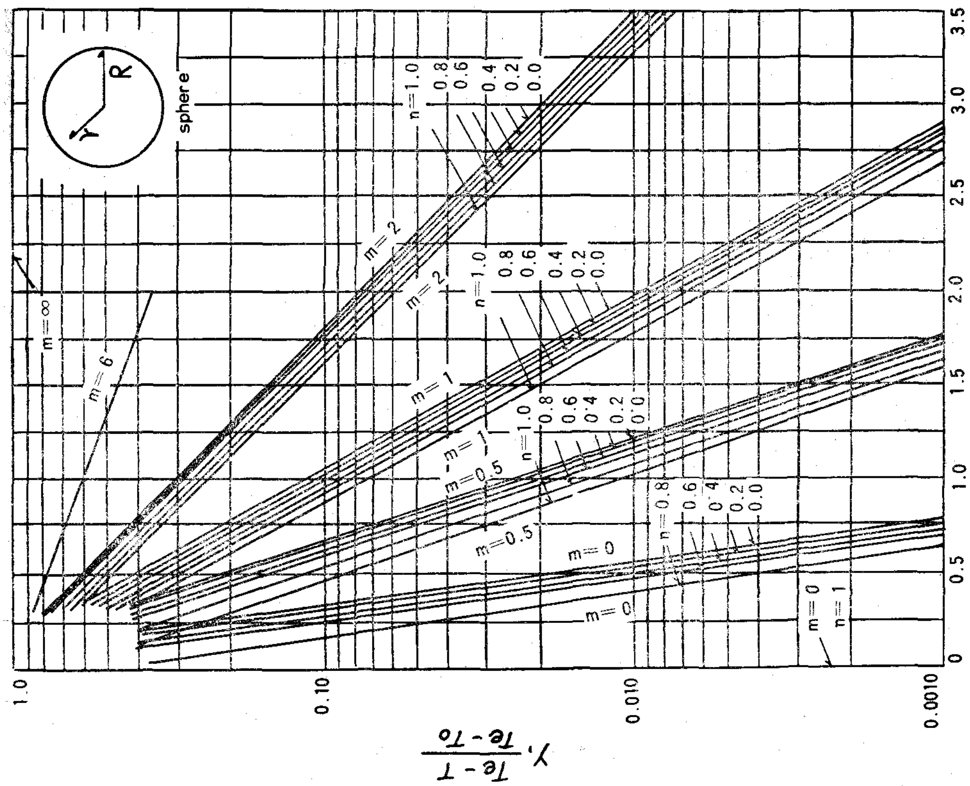

그림 3-9. 구에 있어서 Gurney-Lrue선도

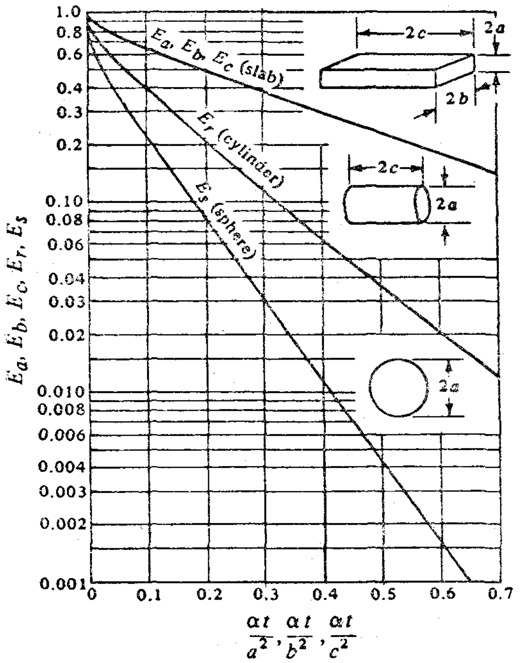

그림 3-10. 평균온도에서의 비정상 상태전열

$$E=\frac{T_e-T_{av}}{T_e-T_o}$$

$$-l_n Y=[(AR/V)/(1/m)X \qquad (3\text{-}37)$$

여기서 A, R, V는 각각 고체의 두께(m), 표면적(m^2), 부피(m^3)이며 infite slab의 경우 $AR/V=1$, infinite cylinder에서는 2, 구는 3의 값을 가진다.

〔예제 3-14〕 예제 3-13을 Gurney-Lurie선도를 이용하여 10, 15, 20, 25, 30分후의 중심 온도를 구하라. 표면 열이동 계수가 $80W/m^2 \cdot K$인 경우에 대해서도 중심온도를 구하라.

〔풀이〕 $T_0=373.2K$, $T_e=283.2K$,

$\alpha=1.515\times10^{-7}m^2/s$, $R=0.015m$

$n=r/R=0/0.015=0$

i) $h=\infty$인 경우 ;

$m=k/(h\cdot R)=(0.6)/(\infty)(0.015)=0$

$\theta=600, 900, 1200, 1500, 1800$ s에 대해서

$X=\alpha\theta/R^2=0.404, 0.606, 0.808, 1.01, 1.212$ 이다.

그림 3-7에서 각각의 경우에 Y를 구하면,

$Y=0.25, 0.31, 0.19, 0.11, 0.068$

$\therefore\ T=(T_0-T_e)Y+T_e$이므로

$\theta=600, 900, 1200, 1500, 1800, (s)$에 대하여

$T=330, 311.1, 300.3, 293.1, 289.3K$

ii) $h=80\text{W/m}^2\cdot\text{s}$인 경우

$m=(0.60)/(80)(0.015)=0.5$

그림 3-7에서

$Y=0.73, 0.56, 0.52, 0.36, 0.28$

$\therefore\ T=348.9, 333.6, 330.0, 315.6, 308.4(\text{K})$

〔예제 3-15〕 초기 온도가 10°C인 두께 3cm의 무한 평판, 직경 3cm의 무한원주 및 구형의 편육을 각각 100°C의 물에 넣어 가열하고자 한다. Gurney-Lurie선도를 이용하여 중심 온도가 90°C로 될 때의 시간을 구하라. 표면 열이동 계수는 무한대로 크며, 편육의 물성치는 예제 3-13과 같다.

〔풀이〕

$T_0=10+273.2=283.2K$

$T_e=100+273.2=373.2K$

$T=90+273.2=362.2K$

$R=0.015\text{m}$

$\alpha=1.515\times10^{-7}\text{m}^2/\text{s}$

$n=r/R=(0)/(0.015)=0$

$m=(0.60)/(\infty)(0.015)=0$

$Y=(T_e-T)/(T_e-T_0)$

$=(373.2-363.2)/(373.2-283.2)=0.1111$

그림 3-7, 3-8, 3-9에서 각 경우에 $Y=0.1111$에 대응하는 X를 구하면

$X=1.03, 0.48, 0.32$

$X=\dfrac{\alpha\theta}{R^2}\ .\ .\ .\ \theta=XR^2/\alpha$

$\therefore\ \theta=1.535\times10^3, 715.2, 476.8s$

〔예제 3-16〕 직경이 6.8cm, 높이가 10.16cm인 퓨레(puree) 통조림을 115.5°C의 증기로 45분 가열했을 경우, 통조림 중심의 온도를 구하라. 단, 통조림의 초기 온도는 30°C이며 증기의 열이동 계수는 $4542\text{W/m}^2\cdot\text{K}$이다. 퓨레의 물성치는 $k=0.83\text{W/m}\cdot\text{K}$, $\alpha=2.007\times10^{-7}\text{m}^2/\text{s}$이다.

〔풀이〕 2차원의 열이동 계산이므로 Newmann의 관계식을 이용해야 한다.

먼저 반경 방향(x방향)의 $(Y)_x$를 구하면,

$$n=\frac{r_x}{R_x}=\frac{0}{0.034}=0$$

$$m=\frac{k}{h\cdot R_x}=\frac{0.83}{4542\times0.034}=0.0054$$

$$X=\frac{\alpha\cdot t}{R^2{}_x}=\frac{2.007\times10^{-7}\times45\times60}{(0.034)^2}=0.47$$

그림 3-8에서

$(Y)_x=0.11$

축 방향(Y방향)의 $(Y)_y$를 구하면,

$$n=\frac{r_y}{R_y}=\frac{0}{0.0508}=0$$

$$m=\frac{k}{h\cdot R_y}=\frac{0.83}{4542\times0.0508}=0.0036$$

$$X=\frac{\alpha\cdot t}{R_y{}^2}=\frac{2.007\times10^{-7}\times45\times60}{(0.0508)^2}=0.21$$

$\therefore$ 그림 3-7에서

$(Y)_y=0.8$

따라서 식(3-33)을 이용하면

$Y=(Y)_x\ (Y)_y$

$=0.11\times0.8=0.088$

$$\therefore\ \frac{T_e-T}{T_e-T_o}=\frac{115.6-T}{115.5-30}=0.088$$

$\therefore\ T=108(°\text{C})$

〈다음호에 계속〉