

---

# Weighted Hadamard 變換을 利用 한 Image Data 處理에 關한 研究

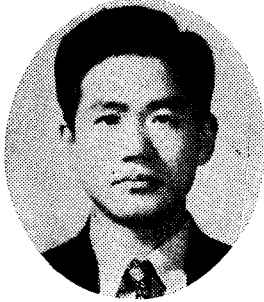


Image Data Processing by  
Weighted Hadamard Transform.

全北大學校 電子工學科  
助教授 李 門 浩\*

---

## Abstract

The Hadamard matrix is a symmetric matrix made of plus and minus ones as entries. Therefore the use of Hadamard transform in the image processing requires only the real number operations and results in the computational advantages. Recently, however, certain degradation aspects have been reported. In this paper we propose a WH matrix which retains the main properties of Hadamard matrix.

The actual improvement of the image transmission in the inner part of the picture has been demonstrated by the computer simulated image developments. The orthogonal transforms such as Hadamard transform offers a useful facility in the digital signal processing. As the size of the transmission block increases, however, the assignment of bits for each data must increase exponentially. Thus the SNR of the image tends to decline accordingly. As an attempt to increase the SNR, we propose the WH matrix whose elements are made of  $\pm 1$ ,  $\pm 2$ ,  $\pm 3$ ,  $\pm 4$ , and the unitform is  $8 \times 8$  matrix.

## 1. 서 론

일반적인 신호원(speech, image 등)은 인접한 sample data 간에 correlation(Similarity 또는 redundancy)이 크다. 신호원의 redundancy를 줄이는 방법으로 대체로 predictive coding 법과 transform coding 법의 2가지를 사용한다. 전자의 경우는 신호원의 유사성을 이용하여 지나간 data 들로부터 현재의 data 를 추측하여 이들의 차(redundancy 감소)를 coding 하는 반면에 후

자의 경우는 신호원의 energy 가 분산되어 있는 것을 (variance 가 크다) 신호변환에 의해 변환 영역에서 energy 가 소수의 data 에 집중(variance 가 작다)되어 data compression 을 얻을 수 있다 이 transform coding 법은 FFT algorism 이후 real time transform 가능성으로 관심을 끌게 되었고 이로 인하여 시간이 많이 걸리는 이론적인 최상의 KLT(Karhune-Lòeve Transform)에 가까우면서도 FFT 를 이용할 수 있는 sinusoidal transforms(DCT, HAAR, DST 등)을 낳게 되었다.<sup>1,5,6,7)</sup>

\* 通信技術士(電氣通信)

## 2. Unitarytransform 의 성질

(a) 1차원 신호변환 : data vector  $X(x(n))$ 은  $x(t)$ 를 일정한 주기로 Sampling 한 값  $n=0, 1, 2, \dots, N-1$ 를 변환 matrix  $T(N \times N)$ 로 변환된 vector  $Y$ 는 (1)로 정의되고 unitary transform 인 경우에는 (2)를 만족해야만 한다. (\* $t$ 는 conjugated transpose)

$$Y = TX \quad (1)$$

$$y(m) = \sum_n t(m, n) x(n) \quad T^{-1} = T^* t \quad (2)$$

(b) 2차원 신호 변환 : 2차원 신호 Matrix  $X$ 를 변환matrix  $T$ 로 변환된 vector  $Y$ 는 식 (3)으로 정의되고  $T^t$ 는 transpose matrix이다.

$$Y = TXT^t$$

$$y(1, k) = \sum_m \sum_n t(1, m) x(m, n) t_1(n, k) \quad (3)$$

(c) unitary transform 의 성질 : (2)를 이용하여 1차원 변환의 경우 다음 성질을 알 수 있다.

a) Energy 보존

$$Y^* t Y = X^* t X$$

$$\sum_m |y(m)|^2 = \sum_n |x(n)|^2 \quad (4)$$

b) Covariance: data vector  $X$ 의 Covariance matrix  $C_x$ 는 (5)로 정의된다.

$$C_x = E[X - E(X)][X - E(X)]^* t \quad (5)$$

여기서  $E(X)$ 는  $X$ 의 평균값을 말한다.

위와 마찬가지로 방법으로 (1)과 (2)를 이용하여  $Y$ 의 covariance matrix  $C_y$ 는 (6)으로 나타낼 수 있다.

$$C_y = T C_x T^* t \quad (6)$$

여기서  $T$ 가 실수라면 (orthogonal matrix),  $C_y$ 는  $C_x$ 를  $T$ 로 2차원 변환한 것과 같다.

만약  $C_x$ 의 eigen vector 로 구성된 unitary matrix  $P$ 가 존재한다면 (7)이 성립된다.

$$C_x P = P Q \quad \text{또는} \quad C_x^{-1} P = P Q^{-1} \quad (7)$$

여기서  $Q$ 는  $C_x$ 의 eigen value 로 된 diagonal matrix이다.  $P^* t$ 에다 (7)를 곱하면 (8)이 됨을 알 수 있다.

$$P^* t C_x P = Q \quad (8)$$

(6)과 (8)에서  $P^* t = T$ 라면  $C_y$ 는 대각선 matrix 가 되어 변환 영역에서 완전회 decorrelation 된 data  $y(m)$ 을 얻을 수 있다.

이러한 변환을 KLT라 하며 이 KLT는  $C_x$ 로부터  $P^* t$ 의 계산시간과  $P^* t$ 의 non-harmoniciry로 인한 변환하는데 장시간 계산 소요로 실제로 사용되는 경우에는 드무나 제한된 변화된 data를 취함에 있어서 MSE와 decorrelation 정도가 다른 Unitary transform에 비해 최상의 것으로 알려져 있다.

## 3. WH 변환

### (1) WH의 형태

우리의 시각은 화면의 가장자리보다는 화면의 중심의 화질에 대해 더욱 민감하다. 따라서 변환 후의 수신측에 SNR을 개선할 필요가 생긴다.<sup>9)</sup> 화면 중심 부분의 SNR을 크게 개선시킬 수 있는 변환 matrix를 WH라 하였고 Fig. 1에서 기본  $8 \times 8$  matrix를 보였다.

$$WH_8 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 & -2 & 2 & -2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & -4 & -3 & 3 & 4 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & 2 & 4 & -4 & -2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & -4 & -3 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & 4 & -3 & 3 & 4 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -2 & -2 & -2 & -2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Fig. 1  $8 \times 8$  WH unit form matrix

### (2) WH matrix의 특징

Fig. 1의 matrix는 Symmetric하며 첫째, column과 row를 제외하고는 그 element값의 합이 0이므로 Hadamard 변환이 갖는 redundancy를 갖게 된다.

(a) Kernel의 부호

순 방향 WH의 부호는 (9)식을 따르고 있다.

$$\sum_{i=0}^{n-1} b_i(x) b_i(u) WH(x, u) = (-1)^{\dots} \quad (9)$$

여기서  $b_k(z)$ 는  $Z$ 를 나타내는  $k$ 번째 bit의 2진수이다.

(b) WH matrix의 확장

$$H_k(1) = 1 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Table. Values of the WH transform kernel for  $N=8$

$u \backslash x$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	+	+	+	+	+	+	+	+
1	+	-	+	-	+	-	+	-
2	+	+	-	-	+	+	-	-
3	+	-	-	+	+	-	-	+
4	+	+	+	+	-	-	-	-
5	+	-	+	-	-	+	-	+
6	+	+	-	-	-	-	+	+
7	+	-	-	+	-	+	+	-

$$\begin{aligned} WH_{16} &= WH_8 \otimes H_8(1) \\ WH_{32} &= WH_{16} \otimes H_8(1) \\ &\vdots \\ WH_n &= WH_{n/2} \otimes H_8(1) \end{aligned} \quad (10)$$

where,  $\otimes$  Kronecker matrix product.

(c) WH의 Center Kernel

$$WH_8(c, k) = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 4 & -4 \end{bmatrix} = 4H_8(1) \quad (11)$$

$$WH_n(c, k) = WH_{n/2}(c, k) \otimes 4H_8(1) \quad (12)$$

(3) WH의 전송

변환 부호화 방식인 WH를 이용한 Image 전송계통도는 Fig. 2와 같다.

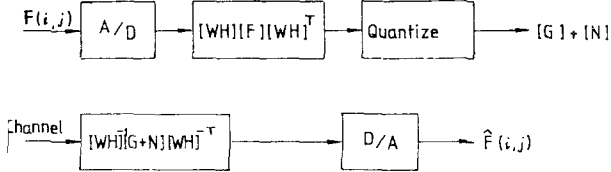


Fig. 2 Transform of image processing

Hadamard 방식은 redundancy 만 고려되어 Quantization에서 생기는 Noise가 수신단에 미치는 영향에 대한 고려가 부족하므로 SNR이 크게 저하되어 이에 대하여 Fig. 2처럼 WH를 전송하여 SNR의 증가를 보였다.

(4) Hadamard와 WH변환 비교

입력영상신호  $F(i, j)$ 에 대한 확률밀도 함수가 UDF를 갖으며 입력영상 신호간에 decorrelation하고 block 전송의 크기를  $N \times N$ 으로 할 경우

WH는  $N=2N'+3$ 의 관계를 갖도록 한다.<sup>8)</sup>

(a) 수신단 비교

$\bar{F}_h(i, j)$ ,  $\bar{F}_{wh}(i, j)$ 를 각각의 변환에서 얻은 수신신호라 하면 다음과 같은 관계를 얻는다.

$$[\bar{F}_h] = [F] + [H]^{-1}[N][H]^{-t} \quad (13)$$

$$[\bar{F}_{wh}] = [F] + [WH]^{-1}[N][WH]^{-t} \quad (14)$$

(b) Hadamard 변환

$P_{\bar{F}_h}(i, j)$ ,  $P_{nrh}(i, j)$ 을 각각 수신 신호 전력과 Noise power로 놓으면

$$P_{\bar{F}_h} = M^2/12 \quad (15)$$

$$P_{nrh} = N^6 M^2 / 3N_i^2 \quad (16)$$

을 얻으며 따라서

$$(S/N)_{rh} = N_i^2 / 4N^6 \quad (17)$$

(c) WH 변환

$P_{\bar{F}_{wh}}(i, j)$ ,  $P_{nrwh}(i, j)$ 을 수신신호와 Noise power로 놓으면,

$$P_{\bar{F}_{wh}}(i, j) = M^2/12 \quad (18)$$

$$P_{nrwh}(i, j) = 625 n^4 M^2 / 48N_i^2 \left[ \sum_{k=1}^N W^{-1}(i, k)^2 \right] \left[ \sum_{t=1}^N W^{-t}(1, j)^2 \right] \quad (19)$$

따라서,

$$(S/N) = 4N_i^2 / 625N^4 \left[ \sum_{K=1}^N W^{-t}(i, j)^2 \right] \quad (20)$$

where

$N_1$ : Quantization level

$N$ : Transform matrix의 크기

$N'$ : Positive integer.

(d) 수신단의 SNR 비교

앞절에서 구한 (17), (20)식을 이용하여  $N=8$ ,  $N=16$ 일 경우에 대한 비교를 Fig. 3과 4에 나타내 보았으며 여기서 Hadamard 변환의 SNR을 0 dB로 Normalize시켰을 때의 WH의 SNR을 dB로 표시하였다. 그림에서 보는 바와 같이  $8 \times 8$  block일 경우 20-29(dB)로 SNR이 증가되었으며  $16 \times 16$ 의 block에서는 32-38(dB)로 증가되어, 화면 중심에서 화질이 좋아진 것을 확인하였다.

## 4. Simulation

$64 \times 64$ 의 pixel을 32 gray levels로 양자화한

링컨사진을 Hadamard와 WH의 matrix로 바꿔가면서 똑같은 조건으로 Simulation 하였으며 이에 대한 flowchart는 Fig. 5와 같다.

Table 2. SNR improvement in 8x8 block of WH

S/N	HADAMARD	W-H	Improvement in dB
1,1	$N_1^2 / (8 \times 128)^2$	$62.5 N_1^2 / 800^2$	20.4
2,2	"	$333 N_1^2 / 800^2$	27.36
3,3	"	$333 N_1^2 / 800^2$	27.36
4,4	"	$500 N_1^2 / 800^2$	29.1
5,5	"	$333 N_1^2 / 800^2$	27.36
6,6	"	$333 N_1^2 / 800^2$	27.36
7,7	"	$333 N_1^2 / 800^2$	27.36
8,8	"	$62.5 N_1^2 / 800^2$	20.4

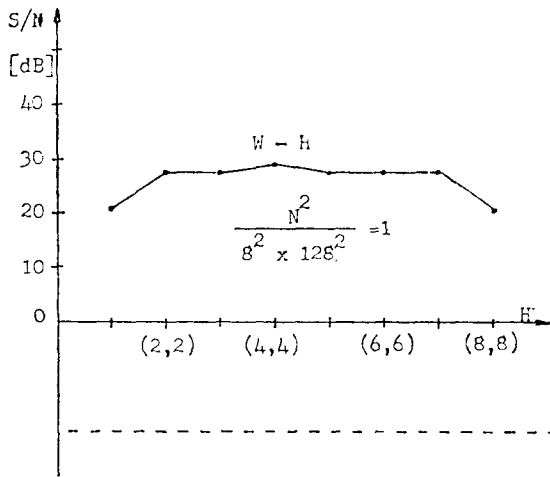


Fig. 3 SNR comparison between Hadamard and WH in 8x8 block

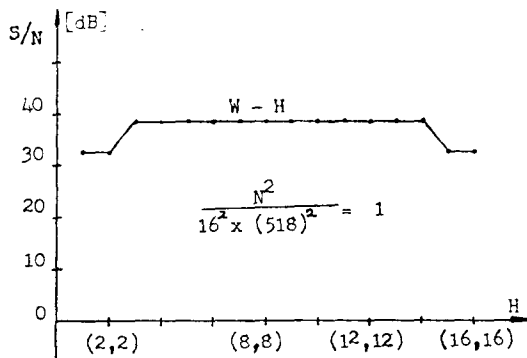


Fig. 4 SNR comparison between Hadamard and WH in 16x16 block.

Table 3. SNR improvement in 16x16 block of WH

S/N	HADAMARD	W-H	Improvement in dB
1,1	$N_1^2 (16 \times 518)^2$	$250 N_1^2 / 3000^2$	32.8
2,2	"	$250 N_1^2 / 3000^2$	32.8
3,3	"	$1000 N_1^2 / 3000^2$	38.8
4,4	"	"	38.8
5,5	"	"	38.8
6,6	"	"	38.8
7,7	"	"	38.8
8,8	"	"	38.8
9,9	"	"	38.8
10,10	"	"	38.8
11,11	"	"	38.8
12,12	"	"	38.8
13,13	"	"	38.8
14,14	"	"	38.8
15,15	"	$250 N_1^2 / 3000^2$	32.8
16,16	"	$250 N_1^2 / 3000$	32.8

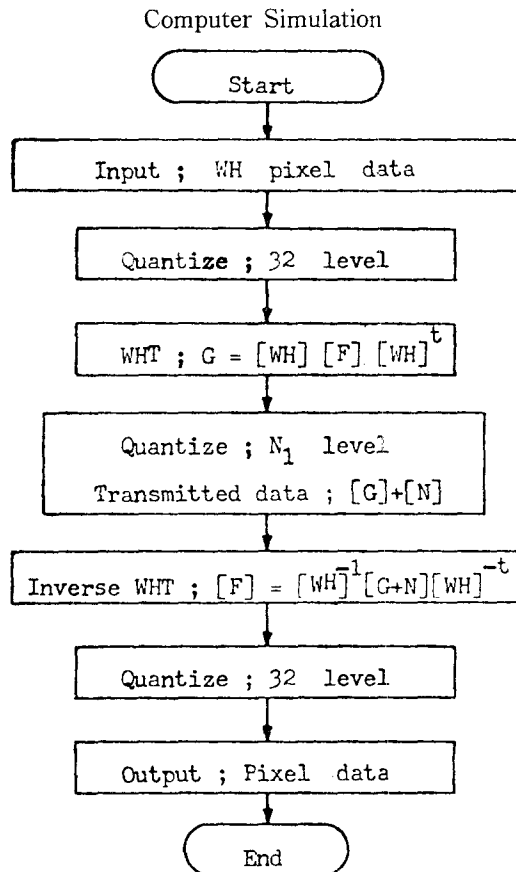


Fig. 5 Flowchart of Image Processing



Fig. 6. 32 Quantize levels original Image data (Lincoln)

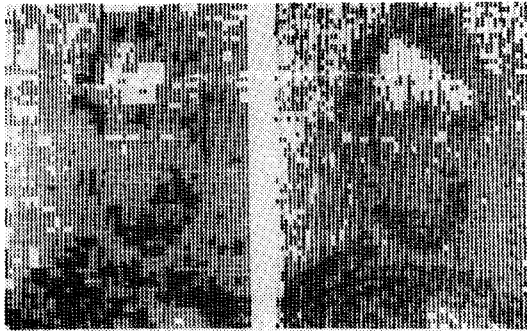


Fig. 7. 32 Quantize levels Hadamard and WH



Fig. 8. 64 Quantize levels Hadamard and WH.

## 5. 결 론

Orthogonal Transform 인 WH 가 Hadamard 의 특성을 똑같이 갖으면서 Diagonal 에 Weighted 가 주어져 KLT 에 접근하였다.

따라서  $8 \times 8$  block 전송에서는 20-29(dB),  $16 \times 16$  block 전송에서는 32-38(dB)의 SNR 이 개선되어 이 논문은 digital Image Processing 에 크게 적용될 수 있을 것이다.

## Reference

1. D. F. Elliot, K.R. Rao, "Fast Transforms Algorithms, Analysis Applications," Academic press. 1982, pp. 362-410.
2. Hideo Kitajima, A. T. S. himono, "Residual Correlation of the Hadamard Transforms of stationary Markov-1 Signals." IEEE, Trans, Com-31, No. 1 Jan 83 pp. 119-121
3. A.K. Jain, "Image Data Compression; A Review," Proc. IEEE, vol. 69, No. 3, March, 1981, pp. 349-389.
4. A. Habibi W.K. Pratt, G. Robinson, R. Means, H. Whitehouse, J. Speiser, "Real Time Image Redundancy Reduction Using Transform Coding." on Comm. Jun. 17-19, 1974, pp. 18-(1)-18A (8).
5. N. Ahmed, K.R. Rao, "Orthogonal Transforms for Digital Signal Processing," pp. 99-143, Springer-Verlag, Berline, 1975.
6. R.C. Gonzalez, P. Wintz, "Digital Image Processing," pp. 88-102. Addison-Wesley Pub. 1977.
7. W.K. Pratt, "Digital Image Processing," pp. 232-277. John Wiley sons, 1978.
8. 윤재우, 함운철, 이문호 "새로운 Weighted Hadamard 변환을 이용한 Image 전송에 관한 연구" 1983년도 KIEE, 하계 종합학술대회 논문집 vol 6, No. 1. pp. 44.
9. Douglas J. G. "The Role of Human Visual Models in Image Processing," IEEE Proc, vol 69, No. 5, May 1981. pp. 552-561.