韓國林學會誌 59 : 46－50. 1983
Jour. Korean For. Soc. 59 : 46－50. 1983

Weibull分布를 應用한 林學硏究(I)[1]

－直徑分布의 推定－

尹　鍾　和[2]

Studies on the Application of Weibull Distribution in Forestry (I)[1]

- Estimation of Diameter Distribution -

Jong Wha Yun[2]

要　約

Weibull 分布에 依하여 林分의 直徑分布를 推定하여 그 適合性을 Kolomogorov - Smirnov 法에 의하여 檢定한 結果 매우 잘 適合함을 나타내었다.

ABSTRACT

Estimation of stand diameter distribution by using Weibull distribution, and then the result is tested by Kolomogorov-Smirnov method expresses very fine fitted.

Key words: stand diameter distribution; weibull distribution.

緖　言

Weibull 分布는 工學에서 壽命의 分布에 使用한 指數分布를 一般化한 것으로 最近 여러나라에서 林學硏究에 많이 應用하고 있다. 1973년 Canada에서 열린 IUFRO에서 Growth Model 硏究에 Weibull分布를 應用하였으며 요즈음 日本에서는 九州大學 西澤正九 教授를 중심으로 林分의 Simulation에 대한 Growth Model 硏究에서 Weibull 分布를 應用한 硏究가 進行되고 있다.

本硏究는 林分構成의 解析과 森林施業에서 가장 基礎資料가 되는 林分의 直徑分布를 Weibull 分布에 의하여 推定하였다.

資料 및 方法

1. 資　料

本硏究에 使用한 資料는 日本數理統計硏究所에서 調査한 森林生態系調査 基本資料인 秩父삼나무林의 資料를 使用하였다. 이 삼나무林의 直徑分布는 表 1과 같다.

2. 方　法

1) Weibull 分布

Weibull 分布의 確率密度函數는

$$f(x) = \left(\frac{c}{b}\right)\left(\frac{x}{b}\right)^{c-1} \exp\left\{-\left(\frac{x}{b}\right)^{c}\right\} \quad \cdots\cdots(1)$$

---

[1] 接授 12月 27日 Received December 27, 1983.
[2] 江原大學校 林科大學 College of Forestry, Kangweon National University, Chuncheon, Korea.

Table 1. Diameter distribution of stands (CHICHIBU).

D.B.H.	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32	Σ
f_i	30	38	100	201	324	456	478	365	361	199	104	37	26	2719

x: 變量 (D. B. H.)

b: 尺度의 母數

c: 形의 母數

(1)式에서 $y=x+a$ 로 하는 一般型으로 나타내면

$$g(y)=\left(\frac{c}{b}\right)\left(\frac{y_i-a}{b}\right)^{c-1}\exp\left\{-\left(\frac{y_i-a}{b}\right)^c\right\}\cdots(2)$$

a : 位置의 母數

$y \geqq a,\ b>0,\ c>0$

여기서 $a>0$ 이며 a 보다 작은 直徑의 나무는 存在하지 않는 것으로 나타내다.

2) 母數의 推定

a 인 位置의 母數는 最小直徑으로 定하고 c 인 尺度의 母數와 b 인 形의 母數는 다음 方法에 의하여 推定한다.

(1) 變動係數에 의한 推定

$\overline{x}=\Sigma f_i x_i / \Sigma f_i$

$S=\sqrt{\Sigma f_i (x_i-\overline{x})^2 / \Sigma f_i}$

$CV=S/\overline{x}$　　※ $x_i=(y_i-a)$　y_i : D.B.H.

CV의 값으로 日本規格會에 作成한 統計數値表에서 C의 값을 推定한다. 이 數値表는 表 2와 같다.

이 表는 다음 式을 逆으로 計算하여 整理한 것이다. (但 m은 C를 말함).

$$CV=\frac{\sqrt{\Gamma\left(\frac{2}{m}+1\right)-\Gamma^2\left(\frac{1}{m}+1\right)}}{\Gamma\left(\frac{1}{m}+1\right)}$$

그리고 $\hat{b}$는 다음과 같이 하여 推定한다.

$\overline{X}_i=\Sigma f_i X_i / \Sigma f_i$

$S_M=\sqrt{f_i (X_i-\overline{X})^2 / \Sigma f_i}$　　※ $X_i=l_n x_i$

$\hat{X}_{(0.63)}=\overline{X}+0.44556\,S_M$

$\therefore \hat{b}=\hat{x}_{(0.63)}=e^{\hat{X}(0.63)}$

여기서 常數 0.44556은 다음과 같이 求한다.

$Z_{(p)}=[r+\ln\{-\ln_{(1-p)}\}]/\varepsilon$

r : 0.577216 (Euler 定數)

ε : $\pi/\sqrt{6}=1.28254983$

$Z_{(0.63)}=[0.577216+\ln\{-\ln_{(1-0.63)}\}]/$

Table 2. Estimates of the shape parameter from the sample coefficient of variation.

CV	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
.0	∞	127.5391	63.3789	42.0410	31.3599	24.9512	20.6787	17.6331	15.3473	13.5742
.1	12.1536	10.9924	10.0281	9.2110	8.5114	7.9071	7.3784	6.9122	6.4987	6.1295
.2	5.7976	5.4977	5.2254	4.9774	4.7504	4.5422	4.3503	4.1729	4.0085	3.8559
.3	3.7138	3.5810	3.4569	3.3407	3.2314	3.1288	3.0321	2.9408	2.8545	2.7729
.4	2.6957	2.6222	2.5526	2.4864	2.4234	2.3633	2.3061	2.2513	2.1992	2.1492
.5	2.1013	2.0555	2.0117	1.9695	1.9291	1.8903	1.8529	1.8170	1.7824	1.7491
.6	1.7171	1.6861	1.6563	1.6275	1.5997	1.5729	1.5469	1.5218	1.4976	1.4740
.7	1.4513	1.4292	1.4079	1.3871	1.3670	1.3475	1.3286	1.3103	1.2924	1.2751
.8	1.2583	1.2419	1.2259	1.2105	1.1954	1.1807	1.1664	1.1525	1.1389	1.1257
.9	1.1128	1.1003	1.0880	1.0761	1.0644	1.0530	1.0419	1.0311	1.0205	1.0101

CV	.0	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.9	*CV*	*m*
1.	1.0000	0.9103	0.8376	0.7776	0.7274	0.6848	0.6482	0.6165	0.5888	0.5644	11	0.2254
2.	0.5427	0.5233	0.5059	0.4901	0.4758	0.4627	0.4507	0.4397	0.4295	0.4201	12	0.2188
3.	0.4113	0.4032	0.3956	0.3884	0.3817	0.3754	0.3694	0.3638	0.3585	0.3535	13	0.2130
4.	0.3487	0.3441	0.3398	0.3357	0.3317	0.3280	0.3244	0.3209	0.3176	0.3144	14	0.2079
5.	0.3113	0.3084	0.3056	0.3028	0.3002	0.2977	0.2952	0.2928	0.2905	0.2833	15	0.2034
6.	0.2862	0.2841	0.2820	0.2801	0.2782	0.2763	0.2745	0.2728	0.2711	0.2694	16	0.1994
7.	0.2678	0.2662	0.2647	0.2632	0.2618	0.2603	0.2589	0.2576	0.2563	0.2550	17	0.1957
8.	0.2537	0.2525	0.2513	0.2501	0.2489	0.2478	0.2467	0.2456	0.2445	0.2435	18	0.1924
9.	0.2425	0.2414	0.2405	0.2395	0.2385	0.2376	0.2367	0.2358	0.2349	0.2341	19	0.1894
10.	0.2332	0.2324	0.2315	0.2307	0.2299	0.2292	0.2284	0.2276	0.2269	0.2262	20	0.1866

$$1.28254983$$
$$= [0.577216 + \ln\{-(-0.99425227)\}] /$$
$$1.28254983$$
$$= 0.445559056$$

(2) $r = 0.17$, $t = 0.97$ 을 利用한 推定

$$\hat{X}_{(0.17)} = \bar{X} - 0.86002\, S_M$$
$$\hat{x}_r = e^{\hat{x}(0.17)}$$
$$\hat{X}_{(0.97)} = \bar{X} + 1.42829\, S_M$$
$$\hat{x}_t = e^{\hat{x}(0.97)}$$

c 및 $\hat{b}$ 의 값을 다음 式에 의하여 推定한다.

$$\hat{c} = \frac{\ln\left\{\frac{\ln(1-r)}{\ln(1-t)}\right\}}{\ln\left(\frac{x_t}{x_r}\right)} \cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

$$\hat{b} = \exp\left[\frac{\ln(x_r) - \ln(x_t)\frac{\ln\{-\ln(1-r)\}}{\ln\{-\ln(1-t)\}}}{1 - \frac{\ln\{-\ln(1-r)\}}{\ln\{-\ln(1-t)\}}}\right] \cdots (4)$$

(3), (4)式에 r 및 t 의 값을 代入해서 整理하여, 다음 式에 의하여 $\hat{c}$ 및 $\hat{b}$ 의 값을 推定한다.

$$\therefore\ \hat{c} = \frac{-2.9349}{\ln(x_r / x_t)} \cdots\cdots\cdots\cdots (5)$$

$$\hat{b} = \exp\left\{\frac{\ln(x_r) + 1.3392\ \ln(x_t)}{2.3392}\right\} \cdots\cdots (6)$$

(3) $r = 0.40$, $t = 0.82$ 을 利用한 推定

$$\hat{X}_{(0.40)} = \bar{X} - 0.07369\, S_M$$
$$\hat{X}_r = e^{\hat{x}(0.82)}$$
$$\hat{X}_{(0.82)} = \bar{X} + 0.87054\, S_M$$
$$\hat{x}_t = e^{\hat{x}(0.82)}$$

(3), (4) 式에 $r = 0.40$, $t = 0.82$ 을 代入해서 整理하여 다음 式에 의하여 $\hat{c}$ 및 $\hat{b}$ 의 값을 推定한다.

$$\hat{c} = \frac{-1.2110}{\ln(x_r / x_t)} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (7)$$

$$\hat{b} = \exp\left\{\frac{\ln(x_r) + 1.2456\ \ln(x_t)}{2.2456}\right\} \cdots\cdots (8)$$

(4) c 를 알고 있을 때의 推定

c 를 이미 알고 있을 때 (9)式을 다시 整理한 (10)式에 의하여 $\hat{b}$ 의 값을 推定한다.

$$\hat{b} = \exp\left[\ln\{e^{\hat{x}(0.80)}\} - \frac{\ln\{-\ln(1-0.80)\}}{c}\right] \cdots (9)$$

$$\therefore\ \hat{b} = \exp\left[\ln\{e^{\hat{x}(0.80)}\} - \frac{0.4579}{c}\right] \cdots\cdots (10)$$

(5) 最尤法에 의한 推定

變動係數에 의하여 推定한 $\hat{c}$ 값을 中心으로 直徑分布로부터 다음 因數를 計算하여 D와 $\bar{X}$ 가 거이 일치할 때까지 되풀이하여 $\hat{c}$ 값을 推定한다.

$$A = \Sigma f_i\, x_i^{\hat{c}} \ln(x_i)$$
$$B = \Sigma f_i\, x_i^{\hat{c}}$$
$$\bar{X} = \Sigma f_i\, X_i / \Sigma f_i \qquad ※\ X_i = \ln x_i$$
$$D = (A/B) - 1/\hat{c}$$

以上과 같이 $\hat{c}$ 값을 推定한 다음 (11)式에 의하여 $\hat{b}$ 의 값을 推定한다.

$$\hat{b} = \left(\frac{\Sigma f_i\, x_i^{\hat{c}}}{\Sigma f_i}\right)^{1/\hat{c}} \cdots\cdots\cdots\cdots (11)$$

3) 母數의 計算

秩父삼나무林 2,719本 중에서 任意로 140本의 標本木을 抽出하여 直徑階別로 本數를 分類한 結果는 表 3과 같다.

다음에 $X_i = \ln x_i$ 에 對應하는 分布表를 作成하면 表 4와 같다.

(1) 變動係數에 의한 計算

表 1에서

$$\bar{X} = (1 \times 1 + 3 \times 2 + \cdots 25 \times 1) / 140 = 12.1943$$
$$S = \sqrt{(1^2 \times 1 + 3^2 \times 2 + \cdots 25^2 \times 1) /}$$
$$\sqrt{140 - 12.1943^2} = 4.3285$$
$$CV = 4.3285 / 12.1943 = 0.33517$$

數値表에서 C = 0.34 에 對應하는 C 값을 찾으면 3.2414 를 얻는다.

Table 3. Diameter distribution of sample tree.

D.B.H. (y_i)	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	32
x_i ($y_i - 7$)	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	25
f_i	1	2	4	10	17	26	26	19	19	7	8	1

Table 4. Diameter distribution to X_i

$X_i = \ln x_i$	0	1.099	1.069	1.946	2.197	2.398	2.565	2.708	2.833	2.944	3.045	3.219
f_i	1	2	4	10	17	26	26	19	19	7	8	1

表 2에서

$$\bar{X} = (0\times 1 + 1.099\times 2 + \cdots 3.219\times 1)/140$$
$$= 2.4853$$

$$S_M = \sqrt{(0^2\times 1 + 1.099^2\times 2 + \cdots 3.219^2\times 1)/} \sqrt{140 - 2.4853^2} = 0.42706$$

$$\hat{X}_{(0.63)} = 2.4853 + 0.44556\times 0.42706$$
$$= 2.675580853$$

$$\hat{b} = e^{2.675580853} = 14.520782$$

$$\therefore \hat{c} = 3.23, \quad \therefore \hat{b} = 14.521$$

(2) r = 0.17, t = 0.97을 利用한 計算

$$\hat{X}_{(0.17)} = 2.4853 - 0.86002\times 0.42706$$
$$= 2.118019859$$

$$\hat{x}_r = e^{2.118019859} = 8.314657$$

$$\hat{X}_{(0.97)} = 2.4853 + 1.42829\times 0.42706$$
$$= 3.095265527$$

$$\hat{X}_t = e^{3.095265527} = 22.093104$$

(5), (6) 式에 의하여

$$\hat{c} = \frac{-2.9349}{\ln(8.314657/22.093104)} = 3.0032$$

$$\hat{b} = \exp\left(\frac{\ln 8.314657 + 1.3392\ln 22.093104}{2.3392}\right)$$
$$= 14.548623$$

$$\therefore \hat{c} = 3.003 \quad \therefore \hat{b} = 14.5486$$

(3) r = 0.40, t = 0.82를 利用한 計算

$$\hat{X}_{(0.40)} = 2.4853 - 0.07369\times 0.42706$$
$$= 2.453829949$$

$$\hat{x}_r = e^{2.453829949} = 11.632815$$

$$\hat{X}_{(0.82)} = 2.4853 + 0.87054\times 0.42706$$
$$= 2.857072812$$

$$\hat{x}_t = e^{2.857072812} = 17.410488$$

(7), (8) 式에 의하여

$$\hat{c} = \frac{-1.2110}{\ln(11.632815/17.410488)} = 3.003153435$$

$$\hat{b} = \exp\left(\frac{\ln 11.632815 + 1.2456\times\ln 17.410488}{2.2456}\right)$$
$$= 14.548714$$

$$\therefore \hat{c} = 3.003 \quad \therefore \hat{b} = 14.5487$$

(4) c = 3.003이라고 할 때의 計算

$$\hat{X}_{(0.80)} = 2.4853 + 8.211\times 0.42706 = 2.835958966$$

$$e^{2.835958966} = 17.04674$$

(10) 式에 의하여

$$\hat{b} = \exp(\ln 17.04674 - 0.4579/3.003)$$
$$= 14.548445$$

$$\therefore \hat{c} = 3.003 \quad \therefore \hat{b} = 14.5484$$

(5) 最尤法에 의한 計算

D와 $\hat{X}$가 거이 일치할 때가지 反復하여 Table 5와 같이 計算하여 c를 求한다.

計算한 結果 $\hat{c}$의 값을 3.26으로 推定하고 (11)式에 의하여 다음과 같이 $\hat{b}$의 값을 計算한다.

$$\hat{b} = (831773.8167/140)^{\frac{1}{3.26}} = 14.375768$$

$$\therefore \hat{c} = 3.26 \quad \therefore \hat{b} = 14.3758$$

4) 確率密度 및 理論分布의 計算

앞서 計算한 母數의 여러 推定値 중 a = 7, $\hat{c}$ = 3.23, $\hat{b}$ = 14.521의 값을 (2)式에 代入하여 確率密度를 計算한다.

$$g(y_i) = 2\times\left(\frac{3.23}{14.521}\right)\times\left(\frac{y_i - 7}{14.521}\right)^{2.23}$$
$$\exp\left\{-\left(\frac{y_i - 7}{14.521}\right)^{3.23}\right\}$$

위 式에 y_i (D. B. H.)를 차례로 代入하여 計算하면 直徑級에 따른 確率密度를 求할 수 있다(式의 첫項 2는 直徑級 2cm를 뜻함).

Table 5. Provide calculation for C.

factor \ C	3.25	3.26	3.27
$A = \Sigma f_i x_i^{\hat{c}} \ln x_i$	2257877.386	2322297.239	2388564.814
$B = \Sigma f_i x_i^{\hat{c}}$	808874.4456	831773.8167	855326.5625
$D = A/B - 1/\hat{C}$	2.483689	2.485233	2.486766
$\bar{X}$	2.485336	2.485336	2.485336
$D - \bar{X}$	−0.001647	−0.000103	0.001430

Table 6. Probability density of Weibull and estimated number by Weibull distribution.

D. B. H. (y_i)	$g(y_i)$	$\hat{f}_i$	D. B. H. (y_i)	$g(y_i)$	$\hat{f}_i$
8	0.0011	3	22	0.1577	429
10	0.0131	34	24	0.1200	326
12	0.0401	109	26	0.0746	20
14	0.0796	216	28	0.0376	102
16	0.1239	337	30	0.0150	41
18	0.1595	434	32	0.0046	12
20	0.1729	470	Total	1.0000	2719

Table 7. Calculation for Kolmogorov-Smirnov test.

D.B.H.	Actual distribution			Weibull distribution		$D_n = S_n(p) - S_n(g_i)$
	f_i	$p = f_i / n$	$S_n(p)$	$g(v_i)$	$S_n(g_i)$	
8	30	0.0110	0.0110	0.0011	0.0011	0.0099
10	38	0.0140	0.0250	0.0131	0.0142	0.0108
12	100	0.0368	0.0618	0.0401	0.0543	0.0075
14	201	0.0739	0.1357	0.0796	0.1339	0.0018
16	324	0.1192	0.2549	0.1239	0.2578	−0.0029
18	456	0.1677	0.4226	0.1595	0.4173	0.0053
20	473	0.1758	0.5984	0.1729	0.5902	0.0082
22	365	0.1342	0.7326	0.1577	0.7479	−0.0153*
24	361	0.1328	0.8654	0.1200	0.8679	−0.0025
26	199	0.0732	0.9386	0.0749	0.9428	−0.0042
28	102	0.0382	0.9768	0.0376	0.9804	−0.0036
30	41	0.0136	0.9904	0.0150	0.9954	−0.0050
32	12	0.0096	1.0000	0.0046	1.0000	0
Total	2719	1.0000		1.0000		

다음에 確率密度에 總本數를 곱하여 理論分布 即 推定코저 하는 直徑分布를 求할 수 있다. 이들을 計算한 結果는 Table 6과 같다.

結　　果

直徑分布의 推定値와 實際로 測定된 直徑分布의 實測値에 대한 이들 두 分布의 適合性을 Kolmogorov-Smirnov 法에 의하여 檢定한 結果는 Table 7과 같다.

D_n 의 가장 큰 絶對値는 0.0153이다.

$$\therefore D_n = 0.0153 < D_{n(0.025)} = 0.026045$$

故로 두 分布間에는 有意的인 差를 認定할 수 없으므로 即 Weibull 分布에 의하여 推定된 直徑分布는 實測한 直徑分布와 適合하여 一致함을 알 수 있다.

考　　察

Weibull 分布의 理論値에 의하여 推定한 直徑分布가 實際林分의 直徑分布와 매우 잘 適合하여 一致됨을 알 수 있었으며 Weibull 分布는 c 의 값에 따라서 매우 敏感하게 作用하여 여러가지 曲線의 모양을 잘 나타내고 있었다.

지금까지 統計處理에서 大部分의 경우 調整對象인 母集團이 正規分布를 한다는 假定 하에서 取扱處理되어 왔었다. 그러나 現實的으로 調査對象의 모두가 正規分布를 한다고는 할 수 없다. 이와 같은 事實은 林木의 集團인 林分의 直徑分布에서도 例外일 수는 없다.

Weibull 分布는 母集團이 正規分布인 때는 勿論 非正規分布인 母集團에 대하여도 c값에 의하여 매우 柔軟하게 여러 曲線에 適合性을 나타내주므로 林木의 集團인 林分構造의 解析에서 推定과 豫測에 많이 活用될 것으로 期待되며 森林施業의 計劃을 세우는 데도 應用될 것으로 思料된다. 그러므로 Weibull 分布를 應用한 林學에 대한 硏究는 앞으로 더욱 많이 發展될 것으로 考慮된다.

引 用 文 獻

1. Bailey, R. L. 1973. Quantifying diameter distribution with the Weibull Function, Forest Sci. 19 : 97−104.
2. Masutani, T. H. 1981. On the Fitness of Weibull distribution by classification of Topography(I) Sci. Bull. Fac. Agr., Kyush Univ.35 : 81−87.
3. 西澤正久. 1976. シミュレーションに對する生長モデルの研究(II), 日本九硏論 29 : 47−48.
4. 奧野忠一. 1982. 應用統計學ハンドブック, 養賢堂 : 85−90.