韓國數學敎育學會誌<數學敎育>
1983. 6. Vol. XXI, No. 3.

Journal of the Korea Society of Mathematical Education
Jun. 1983. Vol. XXI, No. 3

L^p 空間의 可分性에 關한 研究

金 萬 鎬

1. 序 論

全體的인 理解를 돕기 위하여 本論文에서 基本이 되는 定義와 定理를 2절에서 簡略히 敍述하였다.

그리고 3절에서 吟味된 모든 函數들은 複素數値들이고 實數 $\boldsymbol{R}$의 固定된 可測인 部分集合 A 위에서 定義된다.. 또한 數 p는 1보다 크거나 같은 實數를 나타내고, $L^p(A)$空間에서의 距離의 定義, 完備性에 關하여 論했고, 마지막으로 $L^p(A)$空間의 可分性에 關해서 研究했다.

2. $L^p(A)$空間의 基本槪念

Euclid 空間에서의 距離의 槪念을 一般化하여 보자.

定義 2-1 M을 空이 아닌 集合, 函數 $\rho: M\times M\to R$가 M의 任意의 元素 f,g,h에 대하여

i) $\rho(f,g)=\rho(g,f)$

ii) $f\neq g\Leftrightarrow\rho(f,g)>0,\ f=g\Leftrightarrow\rho(f,g)=0$

iii) $\rho(f,h)\leq\rho(f,g)+\rho(g,h)$

를 만족할 때 ρ를 M위의 **距離函數**(distance function)라고 한다. 또한 이 때 M와 ρ의 쌍 (M,ρ)를 **距離空間**(metric space)라고 한다.

$L^p(A)$空間의 性質中 基本이 되는 것은 다음과 같다. 아래에서 A는 實數의 集合 $\boldsymbol{R}$의 可測인 部分集合을 나타낸다.

定義 2-2 函數 f가 A위에서 可測이고 $|f|^p$이 A위에서 積分可能 하면 f는 A위에서 **p乘積分可能**이라고 한다.

定義 2-3 모든 p乘 積分可能한 函數들의 集合을 $L^p(A)$라고 쓴다. 集合 A가 固定되면 보통 A를 생략하고 L^p라고 쓴다. 또 L^p의 임의의 元素 f에 대하여

$$\|f\|_p=(\textstyle\int_A|f|^p)^{\frac{1}{p}}$$

로 定義한다.

$f\in L^p$이면 $|f|^p$가 積分可能하므로 $\|f\|_p$는 負이 아닌 實數이다.

定理 2-1 i) α가 임의의 複素數이고 $f\in L^p$이면 $\alpha\cdot f\in L^p$이고 $\|\alpha f\|_p=|\alpha|\cdot\|f\|_p$이다.

ii) $\|f\|_p=0\Leftrightarrow f(x)=0$ *a.e.*

定義 2-4 p가 1보다 큰 實數일 때 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$을 만족시키는 實數 q를 p의 **共軛數**라고 한다. 또 $p=1$과 $q=\infty$는 서로 共軛인 것으로 간주한다.

定理 2-2 Hölder 不等式

$f\in L^p$, $g\in L^q$이면 $f\cdot g\in L^1$이고 不等式

$$\|fg\|_1\leq\|f\|_p\cdot\|g\|_q$$

이 成立한다.

定理 2-3 Minkowski 不等式

$f\in L^p$, $g\in L^p$이면 $f+g\in L^p$이고 不等式

$$\|f+g\|_p\leq\|f\|_p+\|g\|_p$$

이 成立한다.

註 위 定理 2-3에 의하여

$f_1,f_2,\cdots,f_n\in L^p$이면

$\alpha_1f_1+\alpha_2f_2+\cdots+\alpha_nf_n\in L^p$이다. (線形結合)

L^p空間에 속하는 임의의 두 函數 f,g에 대하여

$$\rho(f,g)=\|f-g\|_p$$

라고 定義하자.

그러면 定理 2-3에 의하여 $\|f-g\|_p$는 實數이다. 또 分明히

$$\rho(f,g)=\|f-g\|_p=\|(-1)(g-f)\|_p=\|g-f\|_p=\rho(g,f)$$

Minkowski不等式에 의하여

$$\rho(f,h)=\|f-h\|_p=\|(f-g)+(g-h\|_p\leq\|f-g\|_p+\|g-h\|_p$$

$$=\rho(f,g)+\rho(g,h)$$

따라서 距離空間의 定義 2-1의 세가지 條件中 두 가지가 만족됨을 알 수 있다. 그러나 나머지 한개의 條件, 즉 $\rho(f,g)=0$에 대하여 $f=g$라는 것이 보증되지 않는다.

이제

$$\rho(f,g)=0 \Leftrightarrow \|f-g\|_p=0 \Leftrightarrow \int_A |f-g|^p=0$$
$$\Leftrightarrow f-g=0 \ a.e. \Leftrightarrow f=g \ a.e.$$

이므로

$f=g$ $a.e.$일때 $f\sim g$로 定義하면 $\sim$는 A 위에 定義된 函數의 集合에서의 同値關係가 된다.

따라서, 이 同値關係가 定하는 同値類

$$[f]=\{g : A\to C \mid g=f \ a.e.\}$$

에 속하는 函數들은 모두 같은 函數로 보아서 이 同値類를 하나의 函數로 생각하면 L^p空間은 距離空間이 된다. 즉

$$\rho(f,g)=0 \Leftrightarrow [f]=[g]$$

이 되어 距離函數의 條件이 모두 만족된다.

L^p空間이 完備라는 것을 다음 定理에서 알아보자.

定理 2-4 (Riesz-Fischer의 定理)

$\langle f_n\rangle$이 L^p空間에서의 Cauchy數列이면 $\|f-f_n\|_p\to 0$를 만족시키는 L^p空間의 函數 f가 存在한다.

證明 L^p空間에서의 모든 Cauchy數列이 수렴함을 證明하면 된다.

한편, 수렴하는 部分數列을 갖는 Cauchy數列은 수렴하므로, L^p空間의 임의의 Cauchy數列 $\langle f_n\rangle$은 수렴하는 部分數列 $\langle \tilde{f}_n\rangle$을 가짐을 보이자. 즉, $\|f-\tilde{f}_n\|\to 0$인 L^p空間에서의 函數 f가 存在함을 보이자.

$\langle f_n\rangle$이 Cauchy 數列이므로 $m,n>N_1$일때 $\|f_n-f_m\|<\frac{1}{2}$이 되는 自然數 N_1을 취할수 있다. 마찬가지로 생각하여 $m,n>N_2$일 때 $\|f_n-f_m\|<\left(\frac{1}{2}\right)^2$, $N_2>N_1$인 자연수 N_2를 취할 수 있다. ($\|\ \|$는 $\|\ \|_p$를 의미)

이와 같은 생각을 계속하면

$\|\tilde{f}_1-\tilde{f}_2\|<\frac{1}{2}$, $\|\tilde{f}_2-\tilde{f}_3\|<\left(\frac{1}{2}\right)^2$, $\|\tilde{f}_3-\tilde{f}_4\|<\left(\frac{1}{2}\right)^3$, …되는 部分數列 $\tilde{f}_1, \tilde{f}_2, \tilde{f}_3, \cdots$을 취할 수 있다. (예를 들면 $\tilde{f}_1=f_{N_1+1}$, $\tilde{f}_2=f_{N_2+1}$, …)

$g_1=|\tilde{f}_1-\tilde{f}_2|$, $g_2=|\tilde{f}_2-\tilde{f}_3|$, …라고 하면

$$\|g_k\|=\|\tilde{f}_k-\tilde{f}_{k+1}\|<\left(\frac{1}{2}\right)^k \text{이므로}$$
$$\|g_1+g_2+\cdots+g_k\|\le\|g_1\|+\|g_2\|+\cdots+\|g_k\|$$
$$<\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^k<1$$

$S_n=\sum_{k=1}^{n} g_k$라고 놓으면 $S_n\ge 0$이고, $\{S_n\}$은 有界인 單調增加數列이다. S_n이 單調增加하므로 S_n의 極限이 存在한다.

이 極限函數를 $T(x)$라 놓으면, 즉 $S_n(x)\to T(x)$라고 놓으면 單調收斂定理에 의하여

$$\lim_{n\to\infty}\int S_n^p=\int T^p$$

또 $\int S_n^p=\int(g_1+g_2+\cdots+g_n)^p\le\|g_1+\cdots+g_n\|^p<1$ ($n=1,2,\cdots$)이므로

$$\int T^p\le 1$$

이 사실로 부터 T는 거의 모든 곳에서 有限인 函數임을 알 수 있다.

그러므로 級數 $\sum_{k=1}^{\infty}|\tilde{f}_k-\tilde{f}_{k+1}|$는 거의 모든 곳에서 有限한 合으로 收斂한다.

$\sum_{k=1}^{\infty}(\tilde{f}_k-\tilde{f}_{k+1})$는 거의 모든 곳에서 極限函數 h에 收斂하고 $\|h\|\le\|T\|\le 1$이다.

部分合은 $\sum_{k=1}^{n}(\tilde{f}_k-\tilde{f}_{k+1})=\tilde{f}_1-\tilde{f}_{n+1}$이므로, $\lim_{n\to\infty}\tilde{f}_{n+1}$은 거의 모든 곳에서 存在하고 有限하며 또 $\tilde{f}_1-h$와 같다.

즉, L^p空間의 函數列 $\langle\tilde{f}_n\rangle$은 거의 모든 곳에서 點別로 L^p空間의 函數 $f=\tilde{f}_1-h$로 수렴함을 알 수 있다.

이제 $\|f-\tilde{f}_n\|\to 0$임을 보이자.

위에서 分明히 $|\tilde{f}_n-\tilde{f}_1|\le T$, $|f-\tilde{f}_1|\le T$이다.

따라서

$$|f-\tilde{f}_n|=|(f-\tilde{f}_1)+(\tilde{f}_1-\tilde{f}_n)|$$
$$\le|f-\tilde{f}_1|+|\tilde{f}_n-\tilde{f}_1|\le 2T$$

이므로 $|f-\tilde{f}_n|^p\le 2^pT^p$

또 T^p은 積分可能하고, $|f-\tilde{f}_n|^p\to 0$ $a.e.$이므로 函數列 $|f-\tilde{f}_1|^p$, $|f-\tilde{f}_2|^p$, …에 Lebesgue收斂定理를 適用하면 다음을 얻는다.

$$\lim_{n\to\infty}\int|f-\tilde{f}_n|^p=\int\lim_{n\to\infty}|f-\tilde{f}_n|^p=\int 0=0$$
$$\therefore \|f-\tilde{f}_n\|\to 0$$

3. L^p空間의 可分性

이 節에서는 L^p空間$(1\leq p<\infty)$이 可分(separable)임을 證明하려 한다.

定義 3-1 距離空間이 稠密한 可算部分集合을 가지면 이 距離空間을 **可分空間**이라고 부른다.

定理 3-1 可測集合 A의 測度가 有限일 때 函數 f가 $L^p(A)$空間 $(1\leq p<\infty)$의 元素이면 임의의 陽數 ε에 대하여

$$\|f-g\|_p<\varepsilon$$

을 만족시키는 連續函數 g가 存在한다.

證明 임의의 自然數 n에 대하여 函數 f_n을

$$f_n(x)=\begin{cases} f(x), & |f(x)|\leq n \text{ 일때} \\ n, & |f(x)|>n \text{ 일때} \end{cases}$$

로 定義하자. 그러면, $|f_n|\leq|f|$이므로 $f_n\in L^p$이고, $|f_n-f|^p\to 0$이다.

또 $|f_n-f|^p\leq 2^p|f|^p$

이고, $|f|^p$은 積分可能한 函數이므로 函數列$\langle f_n-f\rangle$에 Lebesgue收斂定理를 適用하면

$$\lim_{n\to\infty}\int|f_n-f|^p=0$$

즉, $\|f_n-f\|_p\to 0$

주어진 $\varepsilon>0$에 대하여

$$\|f_N-f\|_p<\frac{\varepsilon}{2}$$

로 되는 N을 택할 수 있다.

한편, $|g|\leq N$이고 $\mu(E)<\frac{\varepsilon^p}{4^{p+1}\cdot N^p}$인 可測集合 E의 餘集合 $A\sim E$에서

$$|f_N-g|<\frac{\varepsilon}{2\{4\mu(A)\}^{1/p}}$$

를 만족시키는 連續函數 g를 擇할 수 있다.

이제

$$\begin{aligned}(\|f_N-g\|_p)^p&=\int_A|f_N-g|^p=\int_{A\sim E}|f_N-g|^p\\&\quad+\int_E|f_N-g|^p\\&<\frac{\varepsilon^p}{2^{p+2}}+\frac{\varepsilon^p}{2^{p+2}}=\frac{\varepsilon^p}{2\cdot 2^p}\end{aligned}$$

따라서,

$$\|f_N-g\|_p<\frac{\varepsilon}{2^{1/p}\cdot 2}<\frac{\varepsilon}{2}$$

그러므로

$$\begin{aligned}\|f-g\|_p&=\|f-f_N+f_N-g\|_p\\&\leq\|f-f_N\|_p+\|f_N-g\|_p\\&<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon\end{aligned}$$

定理 3-2 集合 A가 閉區間 $[a,b]$이면 $L^p(A)$空間$(1\leq p<\infty)$은 可分이다.

證明 有理數 全體의 集合은 可算集合이므로 有理數를 係數로 갖는 多項函數 全體의 集合 P는 可算集合이다. 따라서, 集合 P가 $L^p(A)$空間에서 稠密함을 보이면 된다.

函數 f를 $L^p(A)$空間의 임의의 한 元素라 하고 ε을 임의의 陽數라고 하자. 定理 3-1에 의하여

$$\|f-g\|_p<\frac{\varepsilon}{3}$$

을 만족시키는 區間 $[a,b]$위에 定義된 連續函數 g가 存在한다. 한편, Weierstrass의 近似定理에 의하여

$$\sup\{|g(x)-h(x)|:a\leq x\leq b\}<\frac{\varepsilon}{3}(b-a)^{-1/p}$$

을 만족시키는 多項函數 h가 存在한다. 이 多項函數 h에 대하여

$$\int_a^b|g-h|^p\leq\left(\frac{\varepsilon}{3}\right)^p(b-a)^{-1}\int_a^b=\left(\frac{\varepsilon}{3}\right)^p$$

가 성립하므로

$$\|g-h\|_p\leq\frac{\varepsilon}{3}$$

이제, $h(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0$ $(a_0,a_1,\cdots,a_n$은 실수)라 하고 각 $i(i=0,1,2,\cdots,n)$에 대하여

$$M_i=\sup\{|x^i|\,|\,a\leq x\leq b\}$$

로 놓자.

그리고, $|a_i-r_i|<\frac{\varepsilon}{3(n+1)M_i}(b-a)^{-1/p}$

이 만족되게 有理數 r_i를 擇하자. 이들 r_i를 係數로 갖는 多項函數

$$q(x)=r_nx^n+r_{n-1}x^{n-1}+\cdots+r_1x+r_0$$

는 集合 P의 元素이고

$$\begin{aligned}|h(x)-q(x)|&=|(a_n-r_n)x^n+(a_{n-1}\\&\quad-r_{n-1})x^{n-1}+\cdots+(a_0-r_0)|\\&\leq|a_n-r_n||x^n|+|a_{n-1}\\&\quad-r_{n-1}||x^{n-1}|+\cdots+|a_0-r_0|\\&<\frac{\varepsilon}{3}(b-a)^{-1/p}\end{aligned}$$

그러므로

$$\|h-q\|_p\leq\frac{\varepsilon}{3}$$

Summary

A measurable function f defined on a measurable subset A of the real line $\boldsymbol{R}$ is called pth power summable on A if $|f|^p$ is integrable on A and the set of all pth power summable functions on A is denoted by $L^p(A)$. For each member f in $L^p(A)$, we define

$$\|f\|_p=(\int_A|f|^p)^{\frac{1}{p}}.$$

For real numbers p and q where $1\leq p<\infty$ and $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, we discuss the Hölder's inequality

$$\|fg\|_1\leq\|f\|_p\|g\|_q,\ f\in L^p(A),\ g\in L^q(A)$$

and the Minkowski inequality

$$\|f+g\|_p\leq\|f\|_p+\|g\|_p,\ f,g\in L^p(A).$$

In this paper also discuss that $L_p(A)$ becomes a metric space with the metric $\rho: L^p(A)\times L^p(A)\to\boldsymbol{R}$ where $\rho(f,g)=\|f-g\|_p,\ f,g\in L^p(A)$.

Then, in this paper prove the Riesz-Fischer theorem, *i.e.*, the space $L^p(A)$ is complete and that the space $L^p(A)$ is separable.