韓國數學敎育學會誌<數學敎育>
1983. 12. Vol. XXII, No. 1.

Journal of the Korea Society of Mathematical Education
Dec. 1983. Vol. XXII, No. 1.

Logistic 曲線의 係數를 推定하는 한 方法

胡 文 龍

1. 序 論

Logistic曲線은 特히 發展이 人口의 增加에 依存하는 產業(例컨대 自動車生產)과 衰退過程에 있는 產業에 잘 適應한다.

Model式을

$$Y_t=\frac{1}{a\cdot b^t+C}+d \qquad (1.1)$$

으로 表示하여 母數 a, b, c를 推定하는 方法으로는 H. Hotelling의 方法, 三分割法, 最小自乘法等이 알려져 있으나 computer를 利用하여 最小自乘法으로 母數를 推定할 경우, 初期値를 무엇으로 設定하느냐에 따라 數値解法上의 여러가지 問題點이 發生한다.

(1.1)式에서

$$Y_t-d=\frac{1}{a\cdot b^t+c}\ (d\text{는 input data로 준다})$$

을 變形하여

$$\frac{1}{Y_t-d}=a\cdot b^t+c$$

여기서 $\frac{1}{Y_t-d}=y_t$

로 두면 (1.1)式은

$$y_t=a\cdot b^t+c \qquad (1.2)$$

이 된다.

本論文에서는 母數의 推定을 最小自乘法의 생각을 導入하여 非線型連立方程式의 解를 Newton-Raphson의 反復法으로 구하되 (1.2)式의 母數 a, b, c를 3分割法으로 推定한 값을 初期値로 設定함으로써 보다 精密하고 수렴속도가 빠르게 解를 구하고자 한다.

2. 初期値의 設定

三分割法에 依하여 系列 $\{X_t\}$의 項數를 3의 倍數 $N=3n$(餘分項은 가장 오래된 것을 버린다)로 整理하고, 系列을 3等分해서 各部分系列의 合을 s_1, s_2, s_3라 하고 다음과 같이 母數 a, b, c의 推定値 a_0, b_0, c_0를 計算한다. 系列의 全項數를 N_1이라 할 때

$$b^n=\frac{s_3-s_2}{s_2-s_1}$$

여기서 $b^n=B$라 두면 $b=B^{\frac{1}{n}}$,

$$\hat{B}_1=\log b=\frac{1}{n}\log B\text{라 할 때}$$

$$b_0=e^{\hat{B}_1} \qquad (2.1)$$

$$a_0=(s_2-s_1)\frac{b_0-1}{(b^n-1)\cdot b^{N_1-N+1}} \qquad (2.2)$$

$$c_0=\frac{1}{n}\left(s_1-a_0\cdot b^{N_1-N+1}\cdot\frac{b^n-1}{b_0-1}\right) \qquad (2.3)$$

3. Newton-Raphson의 反復法에 의한 係數推定

model式 (1.2)式을

$$y_t=f(a, b, c, t)$$

라 두자. 이 曲線이 回歸曲線이 되게 最小自乘法을 適用하여

$$\varphi(a, b, c)=\sum_t\{X_t-f(a, b, c, t)\}^2$$

에서 $\varphi(a, b, c)$가 最小가 되는 a, b, c의 값 $\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}$을 推定하자.

$\varphi(\hat{a}, \hat{b}, \hat{c})$를 $\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}$에 관해서 各各 偏微分해서 0이라 두면

$$
(3.1)\begin{cases}
\dfrac{\partial\varphi(\hat{a},\hat{b},\hat{c})}{\partial\hat{a}}=\varphi_a(\hat{a},\hat{b},\hat{c})=0\\[2mm]
\dfrac{\partial\varphi(\hat{a},\hat{b},\hat{c})}{\partial\hat{b}}=\varphi_b(\hat{a},\hat{b},\hat{c})=0\\[2mm]
\dfrac{\partial\varphi(\hat{a},\hat{b},\hat{c})}{\partial\hat{c}}=\varphi_c(\hat{a},\hat{b},\hat{c})=0
\end{cases}
$$

이 連立方程式을 풀어서 $\hat{a}$, $\hat{b}$, $\hat{c}$를 구하는데 Newton-Raphson의 反復法을 利用하자.

$\varphi_a(\hat{a},\hat{b},\hat{c})$를 (2.1), (2.2), (2.3)의 初期値 (a_0, b_0, c_0)의 近傍에서 Taylor의 展開를 하면

$$
\begin{aligned}
\varphi_a(\hat{a},\hat{b},\hat{c})=&\varphi_{\hat{a}}(a_0,b_0,c_0)+(\hat{a}-a_0)\varphi_{\hat{a}\hat{a}}(a_0,b_0,c_0)\\
&+(\hat{b}-b_0)\varphi_{\hat{a}\hat{b}}(a_0,b_0,c_0)\\
&+(\hat{c}-c_0)\varphi_{\hat{a}\hat{c}}(a_0,b_0,c_0)+\cdots
\end{aligned}
$$

여기서 $(\hat{a}-a_0)^2$, $(\hat{b}-b_0)^2$, $(\hat{c}-c_0)^2$ 以後의 項을 버리면

$$
\begin{aligned}
\varphi_{\hat{a}}(\hat{a},\hat{b},\hat{c})\approx&\varphi_{\hat{a}}(a_0b_0,c_0)+(\hat{a}-a_0)\varphi_{\hat{a}\hat{a}}(a_0,b_0,c_0)\\
&+(\hat{b}-b_0)\varphi_{\hat{a}\hat{b}}(a_0,b_0,c_0)\\
&+(\hat{c}-c_0)\varphi_{\hat{a}\hat{c}}(a_0,b_0,c_0)
\end{aligned}
$$

가 된다.

$$\hat{a}-a_0=\Delta a,\quad \hat{b}-b_0=\Delta b,\quad \hat{c}-c_0=\Delta c$$

라 두면

$$
\begin{aligned}
\varphi_{\hat{a}}(\hat{a},\hat{b},\hat{c})\approx&\varphi_{\hat{a}}(a_0,b_0,c_0)+\Delta a\varphi_{\hat{a}\hat{a}}(a_0,b_0,c_0)\\
&+\Delta b\varphi_{\hat{a}\hat{b}}(a_0,b_0,c_0)+\Delta c\varphi_{\hat{a}\hat{c}}(a_0,b_0,c_0)
\end{aligned}
$$

같은 方法으로

$$
\begin{aligned}
\varphi_{\hat{b}}(\hat{a},\hat{b},\hat{c})\approx&\varphi_{\hat{b}}(a_0,b_0,c_0)+\Delta a\varphi_{\hat{b}\hat{a}}(a_0,b_0,c_0)\\
&+\Delta b\varphi_{\hat{b}\hat{b}}(a_0,b_0,c_0)+\Delta c\varphi_{\hat{b}\hat{c}}(a_0,b_0,c_0)\\
\varphi_{\hat{c}}(\hat{a},\hat{b},\hat{c})\approx&\varphi_{\hat{c}}(a_0,b_0,c_0)+\Delta a\varphi_{\hat{c}\hat{a}}(a_0,b_0,c_0)\\
&+\Delta b\varphi_{\hat{c}\hat{b}}(a_0,b_0,c_0)+\Delta c\varphi_{\hat{c}\hat{c}}(a_0,b_0,c_0)
\end{aligned}
$$

이다. 이를 行列方程式으로 表示하면

$$
\begin{pmatrix}\varphi_{\hat{a}}(\hat{a},\hat{b},\hat{c})\\ \varphi_{\hat{b}}(\hat{a},\hat{b},\hat{c})\\ \varphi_{\hat{c}}(\hat{a},\hat{b},\hat{c})\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}\varphi_{\hat{a}}(a_0,b_0,c_0)\\ \varphi_{\hat{b}}(a_0,b_0,c_0)\\ \varphi_{\hat{c}}(a_0,b_0,c_0)\end{pmatrix}
+\begin{bmatrix}\varphi_{\hat{a}\hat{a}} & \varphi_{\hat{a}\hat{b}} & \varphi_{\hat{a}\hat{c}}\\ \varphi_{\hat{b}\hat{a}} & \varphi_{\hat{b}\hat{b}} & \varphi_{\hat{b}\hat{c}}\\ \varphi_{\hat{c}\hat{a}} & \varphi_{\hat{c}\hat{b}} & \varphi_{\hat{c}\hat{c}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta a\\ \Delta b\\ \Delta c\end{bmatrix}
$$

이다.

$$
\begin{bmatrix}\varphi_{\hat{a}\hat{a}} & \varphi_{\hat{a}\hat{b}} & \varphi_{\hat{a}\hat{c}}\\ \varphi_{\hat{b}\hat{a}} & \varphi_{\hat{b}\hat{b}} & \varphi_{\hat{b}\hat{c}}\\ \varphi_{\hat{c}\hat{a}} & \varphi_{\hat{c}\hat{b}} & \varphi_{\hat{c}\hat{c}}\end{bmatrix}=M
$$

이라 두면 (3.1)式에 의하여 (3.2)式은

$$
\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\approx\begin{bmatrix}\varphi_{\hat{a}}(a_0,b_0,c_0)\\ \varphi_{\hat{b}}(a_0,b_0,c_0)\\ \varphi_{\hat{c}}(a_0,b_0,c_0)\end{bmatrix}+M\begin{bmatrix}\Delta a\\ \Delta b\\ \Delta c\end{bmatrix}
$$

가 된다. 따라서

$$
\begin{bmatrix}\Delta a\\ \Delta b\\ \Delta c\end{bmatrix}\approx-M^{-1}\begin{bmatrix}\varphi_{\hat{a}}(a_0,b_0,c_0)\\ \varphi_{\hat{b}}(a_0,b_0,c_0)\\ \varphi_{\hat{c}}(a_0,b_0,c_0)\end{bmatrix}
$$

곧, $(\hat{a},\hat{b},\hat{c})$에 충분히 가까운 값$(a_k, b_k, c_k)$를 알때

$$
\begin{bmatrix}a_{k+1}\\ b_{k+1}\\ c_{k+1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_k\\ b_k\\ c_k\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\Delta a\\ \Delta b\\ \Delta c\end{bmatrix}
$$

로 부터 精密한 $(\hat{a},\hat{b},\hat{c})$의 近似値가 구해진다.

4. 結 論

computer를 利用하여 Newton-Raphson의 反復法으로 Logistic曲線의 係數 a, b, c를 推定할 때 初期値로서 三分割法으로 구한 값을 設定하는 경우

1) 10回程度反復조작하여도 수렴하지 않으면 三分割法으로 구한 값을 推定値로 한다.

2) 同一한 Routine을 계속 사용함으로써 computer의 기억장치의 공간을 절약할 수 있다.

3) 끝수처리에 의한 誤差를 最小로 할 수 있다.

4) 他方法에 比하여 수렴속도가 빠르다.

참 고 문 헌

1) C. Radhakrishna Rao "*Linear Statistical Inference and Its Applications*" Wiley, (1973).

2) Richard L. Mills "*Statistics for Applied Economics and Business*" McGRAW-HILL (1977)

3) George E.P. Box *Time Series Analysis* Holden-Day (1970).

4) FACOM "TIMS解說書" 富士通

5) 文炳洙 "數値解析" 二友出版社 (1980).