論 文

大 韓 造 船 學 會 誌
第20卷 第1號 1983年 3月
Journal of the Society of
Naval Architects of Korea
Vol. 20, No. 1, March 1983

船體構造物에 관한 非線形 解析硏究
(壓縮荷重下의 平板과 補剛板의 極限強度解析)

具 鍾 道*·李 桂 成*

On the Nonlinear Analysis of Ship's Structures
(Ultimate Strength Analysis of Plates and Stiffened Plates under Compressive Load)

by

J.D. Koo*· J.S. Lee*

Abstract

In this paper elastic-plastic large deflection analysis of ship structural members, plates, stiffened plates and cylindrical shallow shell, are performed by the finite element method. And for the consideration of the yielded propagation through the depth of the member, the layered element approach is employed.

The present method is justified by comparing its results with those of experiment and others. As results, the nonlinear behavior and the ultimate strength curves are shown, which can be used in the design of the plates and the stiffened plates under compression, and the applicability to the shell structures is suggested. The analysis results are as followings.

(1) The results of the approximate equations as well as those of buckling analysis may not guarantee precisely the safety of the structures in some cases and the optimum in other cases. Therefore they may not show the design criteria for the optimal design.

(2) As the initial deflection increases, its effects on the ultimate strength of the structure generally increases, and the ultimate load, therefore, decreases.

(3) This approach can be applied to the shell type structures.

(4) The present method can be applied to the various structures composed of plate and beam members, for example, plates with hole and the stiffened plates with hole stiffened by spigot, doubler and/or stiffener, for the optimal design.

1. 緖 言

船殼은 大部分이 板과 보가 혼합된 構造物인 데, 甲板과 船底는 平板과 補剛材로 구성된 補剛板으로, 船首尾部는 굽은 板과 補剛材로 구성된 shell 型態의 構造物로 볼 수 있다. 이들은 파랑중에서 壓縮과 引張 그리고 外壓을 받는 데, 甲板이나 船底構造는 特히 壓縮에 의한 좌굴현상으로 파괴되고, 선수미부는 큰 외압으로 손상을 입게 된다.

壓縮을 받는 甲板 等의 구조에 대해서는 그 重要點이 널리 認識되어 좌굴해석에 依한 결과[1][2] 또는

接受日字：1982年 11月 25日，再接受日字：1983年 2月 15日
* 正會員，海軍士官學校 造船科

극한강도의 근사식을〔22〕〔23〕 利用하여 設計하여 왔다. 그러나 그렇게 建造된 造船構造物 뿐만 아니라 土木構造物 등이 예기치않은 荷重下에서 파괴되거나 예상 最大荷重 以上의 荷重狀態에서도 충분한 강도를 유지할 수 있었다. 最近 構造의 最適設計의 추세에 있는 바, 彈塑性〔7〕〔8〕 또는 大變形理論 等의 非線形理論을 導入한 解析이 많은 학자들에 依해 수행되어 왔고 계속 진행 중에 있다〔3〕〔9〕~〔21〕. 最適設計를 위해 초기결함을 고려한 非線形解析方法을 通해 決定된 極限强度에 기초를 두어야 할 것이 要求되고 있다〔10〕〔16〕〔17〕〔18〕〔19〕.

本 論文에서는 초기처짐을 갖는 板과 補剛板을 有限要素法으로써 彈塑性 大變形 解析을 수행하여 板과 補剛板의 最適設計를 위한 기초적인 자료를 제시하고자 하였다. 또한 shell 형태의 구조물에 適用可能性을 확인하기 위해 실린더구조물에 대해서도 수행하였다. 彈塑性 解析에 있어서 荷重增加에 따른 部材의 깊이 方向으로 塑性化되는 것을 고려하기 위하여 층요소접근법을 導入하였고〔9〕〔11〕〔12〕, 여러 하중상태에서 구조물의 소성상태를 살펴보았다.

2. 增分型 假想方程式

비선형해석에서는 전체하중 및 경계값을 여러 段階로 나누고 各 段階 마다 線形理論을 적용하는 증분이론이 많이 채택된다〔9〕〔10〕〔11〕〔12〕.

前 增分段階 까지의 物理量을 안다고 할 때 現 增分段階에서의 假想일의 原理는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\int_v (\sigma_{ij}^0+\Delta\sigma_{ij})\delta\Delta e_{ij}dv-\int_s (q_i^0+\Delta q_i)\delta u_i ds=0 \qquad (1)$$

σ_{ij}, e_{ij}, q_i, u_i는 各各 應力, 變形度, 表面力 및 變位 tensor이며, Δ과 δ은 增分과 變分記號이고, 상첨자 0는 前 增分段階 까지의 물리량임을 意味한다.

Green Strain Tensor의 定義에 따라 變形度 tensor는

$$2e_{ij}=u_{i,j}+u_{j,i}+u_{k,i}\ u_{k,j} \qquad (2)$$

이며, 前 增分과 現 增分段階에서의 變形度 tensor로부터 現 增分段階에서의 假想 變形度增分을 求하면

$$2\delta\Delta e_{ij}=2\delta\Delta e_{ij}^*+\delta(\Delta u_{k,i}\Delta u_{k,j}) \qquad (3)$$

여기에서

$$2\delta\Delta e_{ij}^*=\delta\Delta u_{i,j}+\delta\Delta u_{j,i}+u_{k,i}^0\delta\Delta u_{k,j}+\delta\Delta u_{k,i}\Delta u_{k,j} \qquad (4)$$

應力—變形度 tensor를 a_{ijkl}이라 하면, 應力增分은

$$\Delta e_{ij}=a_{ijkl}\ \Delta e_{kl} \qquad (5)$$

(3)과 (4)式을 假想일의 原理, (1)式에 代入하고 高次의 微小項을 無視하여 정리하면, 增分型 假想方程式은 다음과 같이 유도된다.

$$\delta u_i R_i=\int_v \{a_{ijkl}\Delta e_{kl}^*\ \Delta e_{ij}^*+\sigma_{ij}\frac{1}{2}\delta(\Delta u_{k,i}\Delta u_{k,j})\}dv -\int_s \Delta q_i\delta u_i ds \qquad (6)$$

(6)式의 좌변은 잔류합에 依한 가상일로써

$$\delta u_i R_i=\int_s q_i^0\delta u_i ds-\int_v \sigma_{ij}^0\delta\Delta e_{ij}^* dv \qquad (7)$$

로 주어지며 구조물이 平衡狀態에 있다면 零이 된다.

3. 增分型 有限要素方程式

Kirchhoff의 板 理論〔5〕과 Euler의 보 理論으로부터 不適合 三角型 平板要素와 보要素를 利用하여 有限要素方程式을 유도하였다〔6〕.

3.1. 座標係

三次元 解析을 위해서 그림 1과 같이 오른손 법칙에 따라 구조물의 전체좌표계(Global Coordinate)와 要素의 국부좌표계(Local Coordinate)를 택하였다.

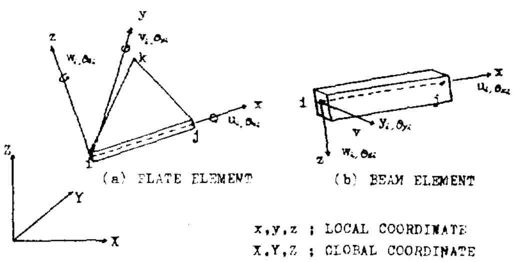


Fig. 1. Coordinate System and Nodal Displacements

3.2. 假 定

彈塑性 大變形 解析에 있어서 다음과 같이 假定한다.

(a) 變形은 有限變形이다.

(b) 構成材料는 均質, 等方이다.

(c) Baushinger 效果를 無視한다.

(d) 등방변형도경화를 假定한다.

(e) Prandtle-Reuss의 假說을 適用한다.

3.3. 有限要素方程式

面內變位와 面外變位의 形狀函數를 $[N_p]$와 $[N_b]$라 하면 요소의 형상함수는

$$[N]=\begin{bmatrix}[N_p] & 0\\ 0 & [N_b]\end{bmatrix} \qquad (8)$$

이를 利用하여 變形度 增分, $\{\Delta e\}$과 節點變位 增分, $\{\Delta d\}$ 사이에는 (2)式으로 부터 다음과 같이 된다.

$$\{\Delta e\}=[B_p]\{\Delta d_p\}+([B_n]-z[B_b])\{\Delta d_b\} =[B]\{\Delta d\} \qquad (9)$$

(9)式의 $[B_p]$, $[B_b]$, $[B_n]$은 각각 面內變形, 面外

變形, 및 大變形에 對應되는 變形度—節點變位 行列이다. 하첨자 p와 b는 面內와 面外變形에 관련됨을 의미한다.

Prandtle-Reuss의 假說을 適用하여 흐름理論으로 부터 應力과 變形度 增分 사이에

$$\{\Delta\sigma\}=\left([D_e]-\frac{[D_e]\{a\}\{a\}^T[D_e]}{\{a\}^T[D_e]\{a\}}\right)\{\Delta e\}$$

$$=[D_{ep}]\{\Delta e\} \tag{10}$$

의 관계가 있는 데, $[D_{ep}]$는 彈塑性 應力—變形度 行列이고, $[D_e]$는 彈性行列, $\{a\}$는 흐름벡터(Flow Vector)이다.

(8), (9), (10)式을 이용해서 增分型 假想方程式, (6)式에서 平衡方程式은

$$\{R\}=\int_v([B]^T[D_{ep}][B]+[G]^T[S^0][G])\{\Delta d\}\,dv$$

$$-\int_s[N]^T\{\Delta q\}\,ds \tag{11}$$

이고, 잔류힘 벡터, $\{R\}$는

$$\{R\}=\int_s[N]^T\{q^0\}\,ds-\int_v[B]^T\{\sigma^0\}\,dv \tag{12}$$

(10), (11)式에서 平板要素에 對해서는

$$[G]=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial}{\partial x}[N_b]\\[2mm] \dfrac{\partial}{\partial y}[N_b]\end{pmatrix},\quad [S^0]=\begin{pmatrix}\sigma_x^0 & \tau_{xy}^0\\ \tau_{yx}^0 & \sigma_y^0\end{pmatrix}$$

$$\{\sigma^0\}=[\sigma_x^0\ \sigma_y^0\ \tau_{xy}^0]^T$$

이고, 보 要素에서는

$$[G]=\left[\frac{\partial}{\partial x}[N_b]\right],\ [S^0]=[\sigma_x^0],\ \{\sigma^0\}=\{\sigma_x^0\}$$

(11)式에 (9)式을 代入하면 有限要素方程式이

$$\{R\}=([K_{pp}]+[K_{pb}]+[K_{bp}]+[K_{bb}])\{\Delta d\}-\{\Delta F\}$$

$$=[K_T]\{\Delta d\}-\{\Delta F\} \tag{13}$$

의 형태로 구해진다. 剛性行列, $[K_T]$의 各 項과 節點力 增分, $\{\Delta F\}$는 다음과 같이 주어진다.

$$\{\Delta F\}=\int_s[N]^T\{\Delta q\}\,ds \tag{14.a}$$

$$[K_{pp}]=\int_v[B_p]^T[D_{ep}][B_p]\,dv \tag{14.b}$$

$$[K_{pb}]=[K_{bp}]^T=\int([B_p]^T[D_{ep}][B_n]$$

$$-z[B_p]^T[D_{ep}][B_b])\,dv \tag{14.c}$$

$$[K_{bb}]=\int_v\{[B_n]^T[D_{ep}][B_n]-z([B_n]^T[D_{ep}][B_b]$$

$$+[B_b]^T[D_{ep}][B_n])+z^2[B_b]^T[D_{ep}][B_b]$$

$$+[G]^T[S^0][G])\,dv \tag{14.d}$$

이는 극부좌표계에 對한 것이므로 전환행렬을 이용하여 전체좌표계에 대한 것으로 전환하고 중첩하이 전체 구조물의 유한요소방정식이 구성된다[6].

4. 층요소 접근법

荷重 增加에 따른 깊이 방향으로의 塑性化를 고려하기 위해 그림 2와 같이 部材의 깊이 방향으로 여러층으로 나누었다. 각 층에서 應力이 線形的으로 분포한다고 假定하면, 彈塑性 應力—變形度 行列, $[D_{ep}(z)]$와 應力, $\{\sigma(z)\}$는 k번째 층에 대해

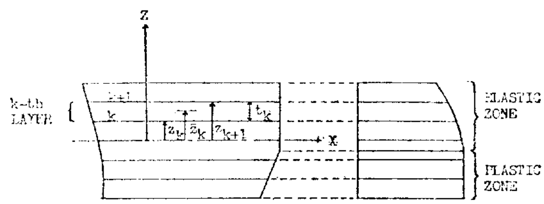
$$[D_{ep}(z)]=\frac{[D_{ep}]_{k+1}-[D_{ep}]_k}{t_k}(z-\bar{z}_k)$$

$$+\frac{[D_{ep}]_{k+1}+[D_{ep}]_k}{2} \tag{15}$$

$$\{\sigma(z)\}=\frac{\{\sigma\}_{k+1}-\{\sigma\}_k}{t_k}(z-\bar{z}_k)$$

$$+\frac{\{\sigma\}_{k+1}+\{\sigma\}_k}{2} \tag{16}$$

하첨자 k와 $k+1$은 k층의 경계면에서의 값임을 意味한다. k층에 대해 필요한 적분결과를 부록에 수록하였다.



z_k, z_{k+1} : z-COOR. OF BOUNDARY OF K-TH LAYER

$\bar{z}_k$: z-COOR. OF CENTER OF K-TH LAYER

t_k : THICKNESS OF K-TH LAYER

Fig. 2. Layered Element Approach

5. 數値解析 및 考察

5.1. 프로그램 개요

本 硏究의 프로그램은 삼각형평판요소와 보요소로 구성된 3차원 구조물의 탄소성대변형 해석을 하도록 구성되었다. 非線形 方程式의 解法過程은 증분법과 반복법 그리고 혼합법을 모두 이용하였고 또한 수렴도를 높히기 위해 수정된 방법을 이용하였다[그림 3]. 증분법으로는 변위증분법과 하중증분법을 모두 이용하도록 하였다.

極限狀態는 DAWSON등[16]이 題案한 기준으로 하중을 받지 않는 평판의 중앙에서의 막응력이 항복응력에 도달하거나 補剛材의 최외곽단에서의 應力이 항복응력에 도달할때로 하였다. 항복응력은 $\sigma_y=28\text{kg/mm}^2$이고 변형도경화계수, $H'=0$으로 하였다. 변형도경화를 고려하려면 H'에 적절한 수치를 주면된다.

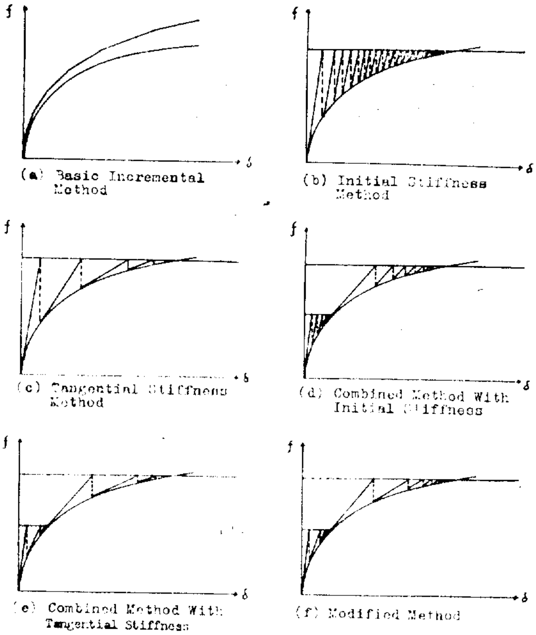


Fig. 3. Solving Procedures of Nonlinear Equation

5.2. 解析精度의 比較

길이, 폭이 $L=B=1,000$mm, 두께, $t=10$mm인 단순지지된 平板이 초기처짐량 $w_0/B=0.001$ 일 때 壓縮荷重 下에서 彈塑性 大變形 解析을 수행하여 실험〔20〕, COAN〔21〕 및 유한대판법에 의한 탄성대변형 해석결과〔10〕와 함께 비선형거동을 그림 4에 나타내었다. 그림 4는 처짐비(최대처짐/두께;$(w_0+w)/t$)와 하중비(평균압축응력/좌굴응력; σ_{av}/σ_{cr})의 관계곡선인 데, ●와 ▲는 초기항복과 극한상태를 나타낸다. 본 연구의 결과는 처짐비가 약 1.8까지는 참고문헌〔10, 20, 21〕의 결과와 좋은 一到를 보이고 있고, 그 以上의 상태에서는 실험과 COAN의 것과 많은 차이를 보이며, 초기항복 이후에서는 탄성대변형해석〔10〕의 결과와는 뚜렷이 다른 경향을 보여서, 처짐비가 약 2.0 이상에서는 하중의 적은 증가 또는 오히려 감소해도 變位가 급격히 增加한다. 이는 그런 상태에서 구조물의 거의 大部分이 소성상태에 있기 때문이다〔그림 7과 8 참조〕. 이후의 모든 구조물의 폭은 $B=1,000$mm로 하였다.

5.3. 數值解析結果 및 考察

(a) 平板

$L/B=1.0$, $t=10$mm이고 초기처짐량이 다른 平板의 비선형거동을 그림 5에 圖示하여 초기 처짐의 효과를 나타내었다. 예상대로 초기처짐량 w_0/B가 증가하면 초기항복과 극한상태의 하중이 낮아진다. 그림 6의 表記法을 사용하여, $L/B=1.0$이고 $t=10$, 16mm인 平板의 소성상태를 1/4만 그림 7과 8에 圖示하였다. 괄호 안은 하중비, σ_{av}/σ_y를 의미한다. 두께가 비교적 작은 平板인 $t=10$mm인 평판은 초기 항복이 모서리에서 발생하는 반면, 두께가 비교적 큰, $t=16$mm平板은 板의 中央에서 발생한다. 또한 極限狀態에서의 조성상태도 차이를 보인다.

그림 9에서 L/B가 0.7, 1.0, 1.4인 수치해석에 의한 여러 초기처짐량을 가질 때 평판의 극한강도곡선을 좌굴곡선과 유효폭개념을 이용한 Von Kármán등〔22〕이 題案한 근사식 그리고 이를 초기 결함을 고려해 주

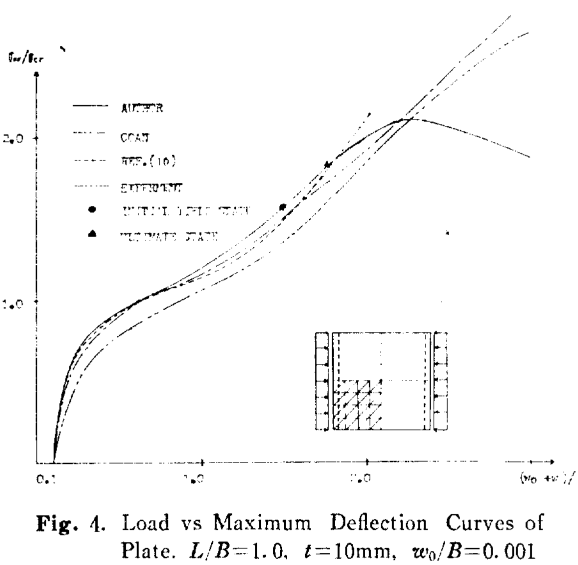


Fig. 4. Load vs Maximum Deflection Curves of Plate. $L/B=1.0$, $t=10$mm, $w_0/B=0.001$

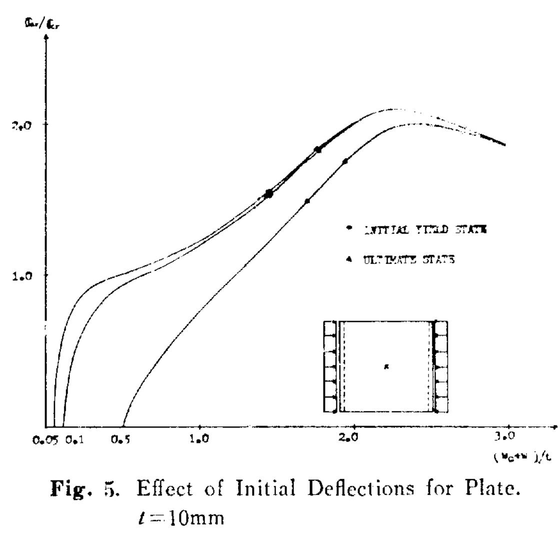


Fig. 5. Effect of Initial Deflections for Plate. $t=10$mm

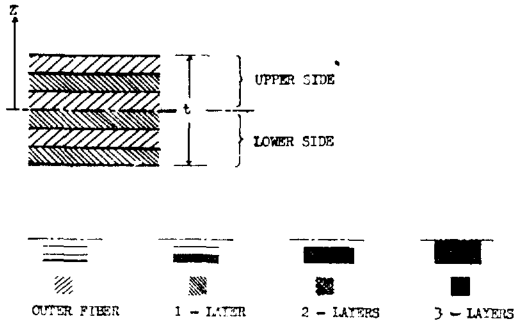


Fig. 6. Yielded State Through Thickness of Plate

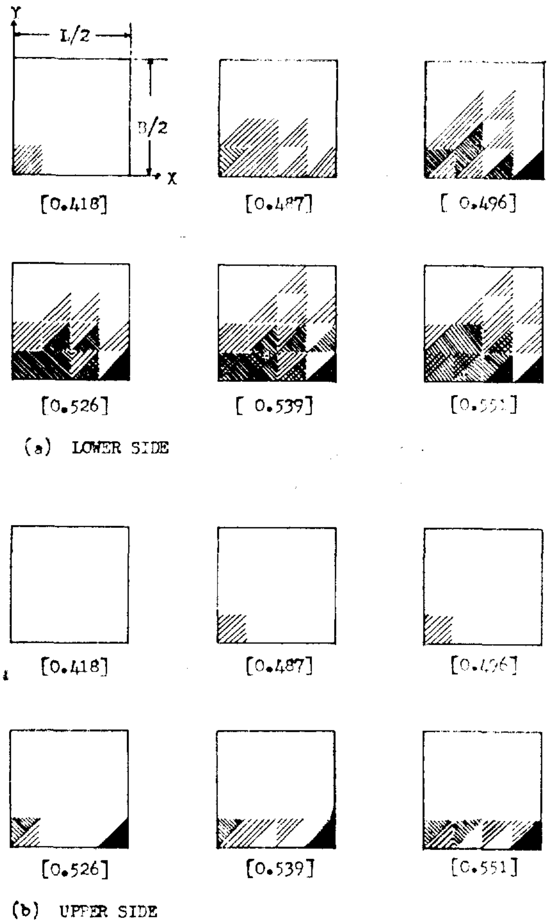


Fig. 7. Yielded State of Relatively Thin Plate.
$L/B=1.0$, $t=10$mm, $w_0/B=0.001$

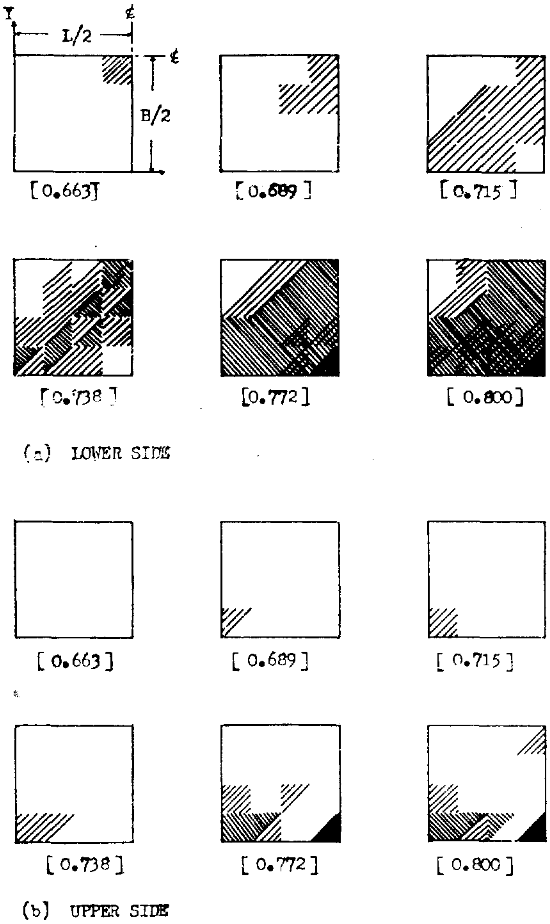
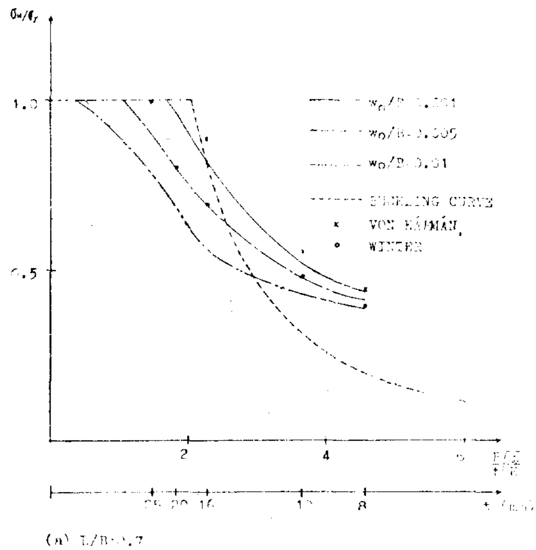


Fig. 8. Yielded State of Relatively Thick Plate.
$L/B=1.0$, $t=16$mm, $w_0/B=0.001$



기 위해 수정한 Winter[23]의 근사식의 결과와 比較 하였다.

근사식에 의한 것은 비슷한 경향을 보이지만, 정확한 값을 제시한다고 볼 수 없다. 기대한 대로 얇은 판

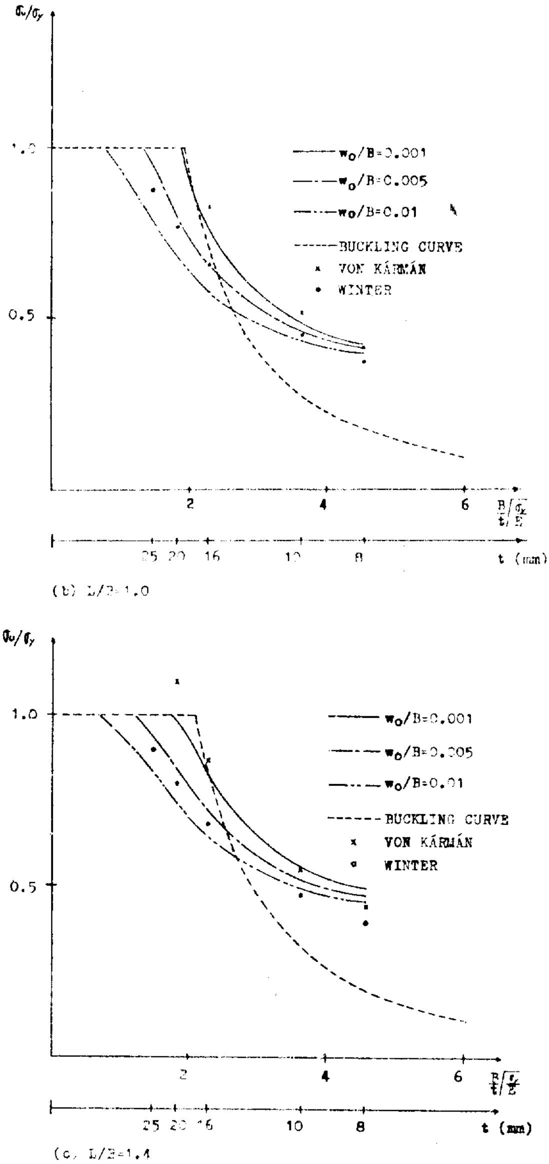


Fig. 9. Ultimate Strength Curves of Plates

에서 보다 큰 후좌굴강도를 나타내며 두꺼운 판일 수록 초기처짐의 영향이 증가함을 나타낸다.

(b) 補剛板

$L/B=1.0$, $B=1,000$mm이고 판의 두께, $t=10$mm인 板에, 폭이 板의 두께와 같은 보강재가 荷重方向으로 하나 또는 둘이 있는 단순지지된 補剛板(이후 *sp*-1 또는 *sp*-2라 칭함)에 대해 壓縮荷重下에서 탄소성대변형해석을 수행하였다. 보강재의 量이 h가 $h/B=0.08$

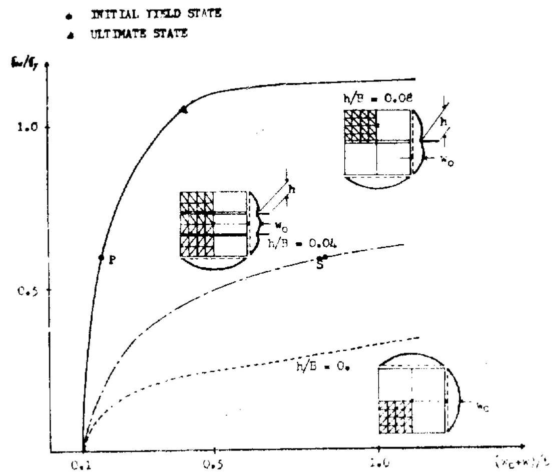


Fig. 10. Load vs Maximum Deflection Curves of Plate & Stiffened Plates. $L/B=1.0$, $w_0/B=0.001$

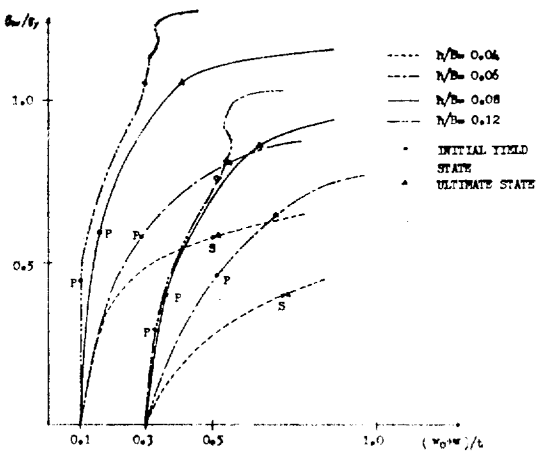
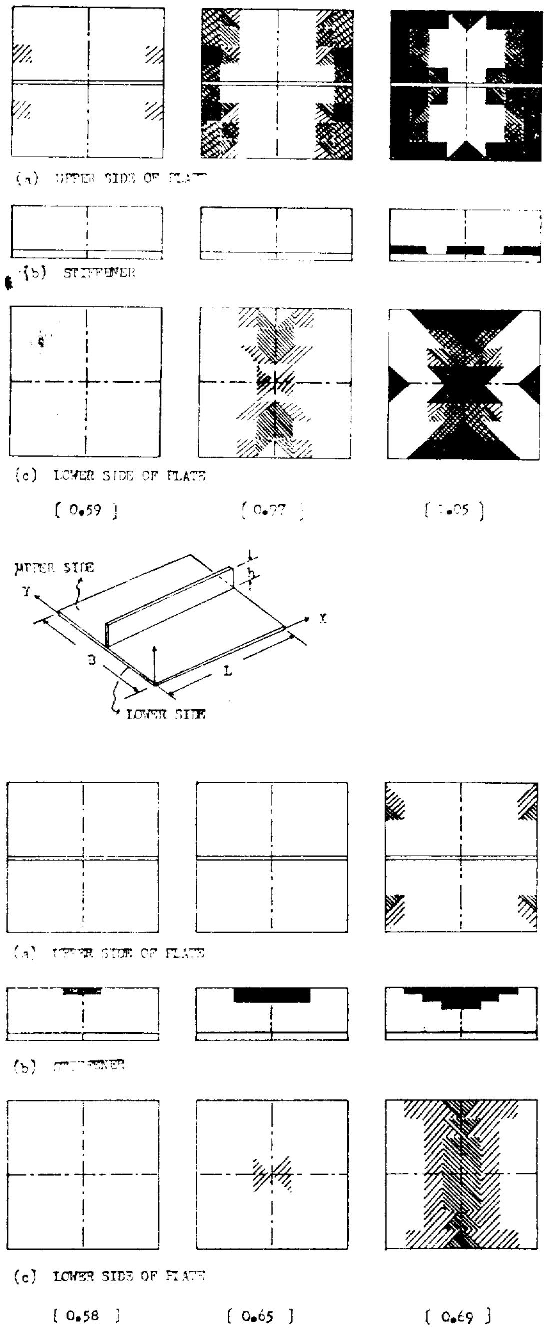


Fig. 11. Effect of Initial Deflection for Stiffened Plate or the Nonlinear Behavior of Stiffened Plates with One Stiffener.

인 *sp*-1, $h/B=0.04$인 *sp*-2의 비선형거동을 平板의 것과 비교하여 그림 10에 圖示하였다. p와 s는 板 또는 補剛材에서 초기항복이 발생함을 意味한다. *sp*-2 보다 *sp*-1의 초기항복과 극한상태의 하중이 높은 데, 단면적이 보강재의 효율면에서 *sp*-1이 더 효과적임을 의미한다.

그림 11은 초기처짐이 *sp*-1의 거동에 미치는 영향을 나타낸다. 대체로 h/B가 증가하고 w_0/B가 작을 수록 초기항복과 극한상태의 하중은 증가하는 데 h/B가 약 0.08 이상에서는 오히려 초기항복하중이 낮고 극한하중은 거의 同一하다.



(a) $L/B=1.0$, $h/B=0.04$, $w_0/B=0.001$
(b) $L/B=1.0$, $h/B=0.08$, $w_0/B=0.001$

Fig. 12. Yielded State of Stiffened Plate with One Stiffener. $h/B=0.08$, $w_0/B=0.001$

h/B가 0.04, 0.08인 sp-1의 소성상태를 그림 12에 보여 주었다. 괄호 안은 하중비, σ_{av}/σ_y이다. 보강재가 비교적 작은, $h/B=0.04$인 sp-1은 초기항복이 보강재 中央의 최외곽단에서 발생하는 반면, 보강재가 비교적 큰, $h/B=0.08$인 sp-1은 平板의 하중변, $Y/B=0.25$, 0.75에서 발생한다. 전자는 보강재 파괴형식이고 후자는 판 파괴형식인데, 보강재가 비교적 작은 경우엔 보강재에서 항복이 일어나지만, 다음 부분은 여전히 彈性범위에 있으므로, 이 경우엔 상당한 여유가 있다.

그림 13은 sp-1의 극한강도곡선을 좌굴곡선과 함께 나타낸 것이다. h/B가 약 0.08 이상이면 극한강도가 同一한 것으로 보아 그 이상의 보강재는 不必要하다고 하겠다.

그림 14는 $w_0/B=0.001$ 때 sp-2의 비선형거동이다.

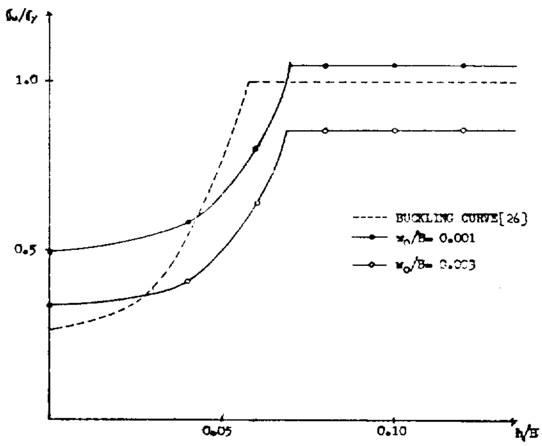


Fig. 13. Ultimate Strength Curves of Stiffened Plates with One Stiffener. $L/B=1.0$

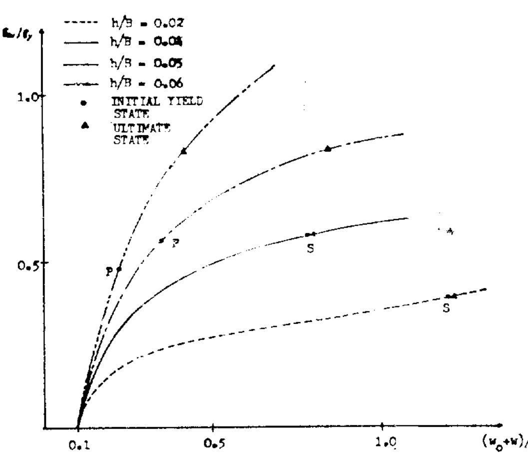


Fig. 14. Load vs Maximum Deflection Curves of Stiffened Plates with Two Stiffeners. $L/B=1.0$, $w_0/B=0.001$

h/B가 0.04까지는 초기항복이 補剛材에서, 그 以上에서는 板에서 발생하고, h/B가 0.05이상에서는 초기항복이 오히려 감소하고 극한강도는 거의 同一하다. 그림 15는 $h/B=0.04$인 sp-2의 소성상태를 나타낸 것이고, 그림 16은 극한강도곡선이다.

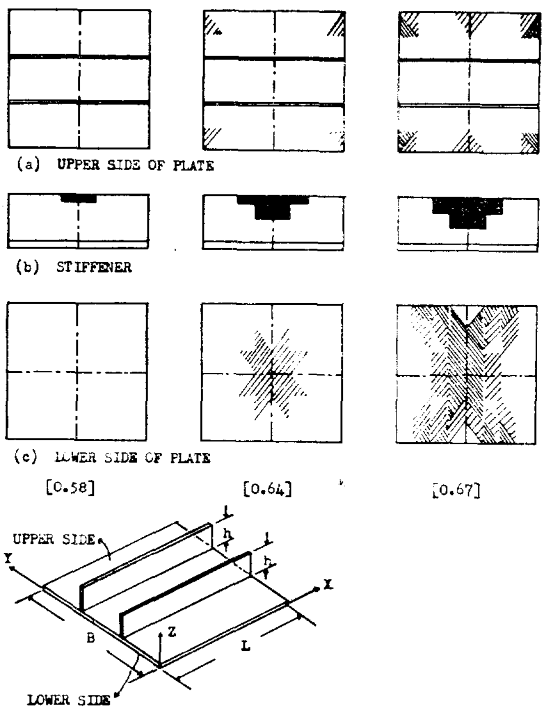


Fig. 15. Yielded State of Stiffened Plate with Two Stiffeners. $L/B=1.0$, $h/B=0.04$, $w_0/B=0.001$

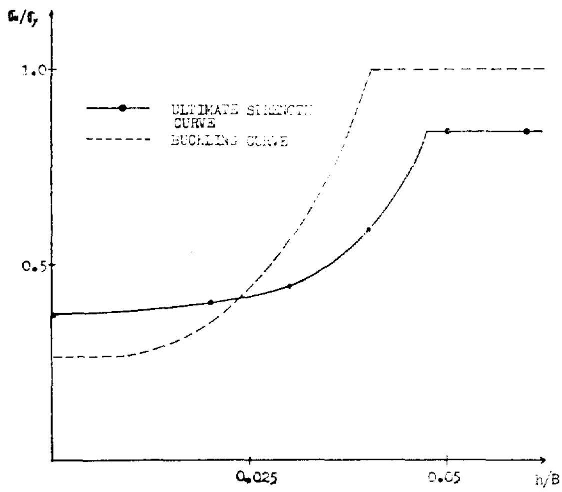


Fig. 16. Ultimate Strength Curve of Stiffened Plate with Two Stiffeners. $L/B=1.0$, $w_0/B=0.001$

(c) 실린더 型 shell

本 研究 프로그램의 3차원 구조물에의 적용가능성을 확인하기 위해 그림 17에 4변이 모두 고정지지된 실린더型 shell과 補剛된 shell의 비선형거동을 나타내었다. 실린더型 shell의 결과는 Brebbia와 Connor의 결과[15]와 좋은 일치를 보이고 있고 선형이론과 비교할 때 하중이 증가할 수록 큰 차이를 보인다.

補剛된 shell은 거의 線形的인 거동을 나타낸다.

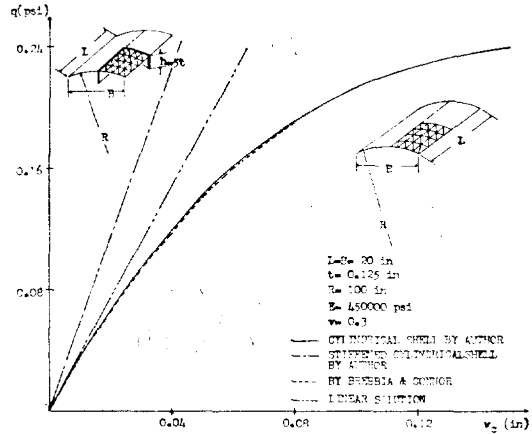


Fig. 17. Load vs Maximum Deflection Curves of Cylindrical Shell & Stiffened Cylindrical Shell Under External Pressure.

6. 結 言

壓縮荷重을 받는 平板과 補剛板 그리고 外壓을 받는 실린더型 shell의 彈塑性 大變形 解析을 수행하여 다음과 같은 結果를 얻었다.

(1) 平板의 경우, 초기처짐의 영향은 板의 두께가 증가할수록 뚜렷이 나타났으며 후좌굴강도는 얇은 판에서 보다 크게 나타났다. 대체로 좌굴해석에 의한 결과는 물론 근사식의 결과는 最適設計를 위한 만족할만한 자료를 題示하지 못할 것이다.

(2) sp-1이 sp-2 보다, 同一 斷面積을 가질 때, 더 효과적이며, sp-1은 약 0.08이상, sp-2는 약 0.05이상에서는 極限强度가 거의 同一한 것으로 보아 그 이상의 補剛材는 不必要하다고 하겠다.

(3) 초기처짐이 sp-1 보다 sp-2에 미치는 영향이 크며, sp-1에서 초기처짐량 w_0/B가 0.003이상이면 좌굴해석의 결과는 安全性을 보장할 수 없다.

(4) shell型態의 構造物에도 本 研究方法을 適用할 수 있다.

(5) 構造物의 最適設計를 위해서는 彈塑性 大變形 解析을 通한 極限强度에 그 설계기준을 두어야 할 것이다.

後 記

本 硏究는 韓國科學財團의 硏究基金의 뒷받침으로 이루어진 것임을 밝히는 바이다.

附 錄

(15), (16)式을 이용하여 k층에 대해 깊이 방향으로의 필요한 적분 결과는 다음과 같다.

$$\int [D_{ep}(z)]dz = \frac{t_k}{2}\Big([D_{ep}]_{k+1} + [D_{ep}]_k\Big)$$

$$\int z[D_{ep}(z)]dz = \Big(\frac{\beta}{3} + \frac{t_k \bar{z}_k}{2} - \bar{z}_k^2\Big)[D_{ep}]_{k+1} + \Big(-\frac{\beta}{3} + \frac{t_k \bar{z}_k}{2} + \bar{z}_k^2\Big)[D_{ep}]_k$$

$$\int z^1[D_{ep}(z)dz = \Big(\frac{\alpha \bar{z}_k}{2} + \frac{\beta t_k}{6} - \frac{\beta \bar{z}_k}{3}\Big)[D_{ep}]_{k+1} + \Big(-\frac{\alpha \bar{z}_k}{2} + \frac{\beta t_k}{6} + \frac{\beta \bar{z}_k}{3}\Big)[D_{ep}]_k$$

$\alpha = z_{k+1} + z_k$

$\beta = z_{k+1}^2 + z_{k+1} z_k + z_k^2$

參 考 文 獻

〔1〕 S.P. Timoshenko and J.M. Gere; "Theory of Elastic Stability", *McGraw-Hill, 1961.*

〔2〕 Alexander Chajes; "Principles of Structural Stability Theory", *Prentice-Hall, 1974.*

〔3〕 K. Washizu; "Variational Methods in Elasticity and Plasticity", *Pergamon, 1975.*

〔4〕 M.S. Troitsky; "Stiffened Plate", *Elservier Sci. Pub. Co., 1976.*

〔5〕 Rudolph Szilard; "Theory and Analysis of Plates", *Prentice Hall, 1974.*

〔6〕 O.C. Zienkiewicz; "Finite Element Method", *McGraw-Hill, 1974.*

〔7〕 山田嘉昭 : "塑性力學" 日刊工業新聞社, 1965.

〔8〕 L.M. Kachnov; "Foundation of the Theory of Plasticity", *North-Holland Pub. Co., 1971.*

〔9〕 任尙鉠, 梁永淳 ; "橫荷重을 받는 船殼板의 非線形 解析", 大韓造船學會誌, Vol. 17, No.1, 1980.

〔10〕 李裕才 ; "壓縮을 받는 板및 補剛板의 有限帶板法에 依한 幾何學的 非線形 解析", 工學博士學位論文, 서울大學校, 1978.

〔11〕 A.W. Wegmuller; "Full Range Analysis of Eccentrically Stiffened Plates", *ASCE, Vol. 100, No. ST1, 1974.*

〔12〕 李柱成 : "층요소 접근법에 의한 선각판의 탄소성 해석", 海軍士官學校 硏究報告 第16輯.

〔13〕 F.A. Akyuz, J.E. Merwin; "Solution of Nonlinear Problems of Elasto-Plasticity by Finite Element Method", *AIAA, Vol. 6, No. 10, 1968.*

〔14〕 Yamada, Y., Yoshimura, N. and Sakurai, T.; "Plastic Stress-Strain Matrix and its Application for the Solution of Elastic-Plastic Problems by Finite Element Method", *Int. J. Mech. Sci., Vol. 10, 1968.*

〔15〕 C. Brebbia and J. Connor; "Geometrically Nonlinear Finite Element Analysis", *ASCE, Vol. 95, No. EH4, 1969.*

〔16〕 R.G. Dawson and A.C. Walker; "Post-Buckling of Geometrically Imperfect Plates", *ASCE, Vol. 98, No. STL, 1972.*

〔17〕 A. Ecer; "Finite Element Analysis of the Post-Buckling Behavior of Structures", *AIAA, Vol. 11, No. 11, 1973.*

〔18〕 Y. Ueda, W. Yasukawa, T. Yao, M. Jkegami and R. Ominami; "Ultimate Strength of Square plates Subjected to Compression(1st report)—effects of initial deflection and welding residual Stress", 日本造船學會誌, 1975.

〔19〕 Y. Fujita; "On the Non-Linear Response of Ship Structural Elements", *Univ. of Tokyo, 1977.*

〔20〕 Muff, H.J., Boley, B.A. and Coan, J.M.; "The Development of a Technique for Testing Stiff Panels in Edgewise Compression", *Procedings, Society for Experimental Stress Analysis, Vol. 5, No. 2, 1948.*

〔21〕 Coan, J.M.; "Large Deflection Theory for Plates with Small Initial Curvature Loaded in Edge Compression", *Journal of Applied Mechanics, Vol. 18, 1951.*

〔22〕 T. Von Kármán, E.E. Sechler and L.H. Donnel;

"The Strength of Thin Plates in Compression", *Trans. ASME, Vol. 54, 1932.*

〔23〕 G. Winter; "Strength of Thin Steel Compression Flanges", *Trans. ASCE, Vol. 112, 1974.*