

□ 技術 解説 □

새로운 신호변환 (CFT 및 DCFT)의 유도 및 각종 신호변환의 비교

崔 太 永*

■ 차

레 ■

- | | |
|-------------------------------------|------|
| 1. 서 론 | 부록-1 |
| 2. Composite Fourier Transform(CFT) | 부록-2 |
| 3. DCFT와 Sinusoidal transform의 비교 | 참고문헌 |
| 4. 결 론 | |

1. 서 론

일반적인 신호원 (speech, image 등) 은 인접한 sample data 간에 correlation (Similarity 또는 redundancy) 이 크다. 신호원의 redundancy를 줄이는 방법으로 대체로 predictive coding 법과 transform coding 법의 2가지를 사용한다. 전자의 경우는 신호원의 유사성을 이용하여 지나간 data 들로부터 현재의 data를 추측하여 이들의 차 (redundancy 감소)를 coding 하는 반면에 후자의 경우는 신호원의 energy가 분산되어 있는 것을 (variance가 크다) 신호변환에 의해 변환영역에서 energy가 소수의 data에 집중 (variance가 작다) 되어 data compression을 얻을 수 있다. 이 transform coding법은 FFT algorithm¹⁾ 이후 real time transform 가능성으로 관심을 끌게 되었고 이로 인하여 시간이 많이 걸리는 이론적인 최상의 KLT에 가까우면서도 FFT를 이용할 수 있는 sinusoidal transforms (DCT²⁾, SCT³⁾, DST⁴⁾ 등을 낳게 되었다.

본 연구에서는 새로운 unitary transform, CFT 및 DCFT를 유도했고(2) DCFT와 이미 알려진 sinusoidal transforms과 3가지 척도(1·

2)에 의해 비교했다.

1.1 Unitary transform의 성질

(A) 1차원 신호변환: data vector $X\{x(n)\}$ 은 $x(t)$ 를 일정한 주기로 Sampling 한 값 $n=0, 1, 2, \dots, N-1$ }를 변환 matrix $T(N \times N)$ 로 변환된 vector Y 는 (1)로 정의되고 unitary transform인 경우에는 (2)를 만족해야만 한다.

(*t는 conjugated transpose)

$$Y = TX \quad \left. \begin{aligned} y(m) &= \sum_n t(m, n) x(n) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

$$T^{-1} = T^{*t} \quad (2)$$

(B) 2차원 신호변환: 2차원 신호 matrix X 의 column 성분을 T 로 row 성분을 T_1 으로 변환했을 경우 (3)으로 정의되고 일반적으로 $T_1 = T^t$ 이다.

$$Y = TX T_1 \quad (3)$$

$$y(l, k) = \sum_m \sum_n t(l, m) x(m, n) t_1(n, k)$$

(C) Unitary transform의 성질: (2)를 이용하여 1차원 변환의 경우 다음 성질을 알 수 있다.

a) Energy 보존

$$Y^{*t} Y = X^{*t} X \quad \left. \begin{aligned} \sum_m |y(m)|^2 &= \sum_n |x(n)|^2 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

b) Covariance: data vector X 의 Covariance matrix C_x 는 (5)로 정의된다.

* 正會員: 亞洲大 工大 電子工學科 助教授 · 工博

$$C_x = E \{ [X - E(X)] [X - E(X)]^{*t} \} \quad (5)$$

여기서 $E(X)$ 는 X 의 평균값을 말한다.

위와 마찬가지로 방법으로 (1)과 (2)를 이용하여 Y 의 covariance matrix C_y 는 (6)으로 나타낼 수 있다.

$$C_y = T C_x T^{*t} \quad (6)$$

여기서 T 가 실수라면 (orthogonal matrix), C_y 는 C_x 를 T 로 2차원 변환한 것과 같다.(3)

만약 C_x 의 eigen vector로 구성된 unitary matrix P 가 존재한다면 (7)이 성립된다.

$$C_x P = P Q \quad \text{또는} \quad C_x^{-1} P = P Q^{-1} \quad (7)$$

여기서 Q 는 C_x 의 eigen value로 된 diagonal matrix이다. P^{*t} 에다 (7)를 곱하면 (8)이 됨을 알 수 있다.

$$P^{*t} C_x P = Q \quad (8)$$

(6)과 (8)에서 $P^{*t} = T$ 라면 C_y 는 대각선 matrix가 되어 변환영역에서 완전히 decorrelation된 data $y(m)$ 을 얻을 수 있다.

이러한 변환을 KLT라 하며 이 KLT는 C_x 로부터 P^{*t} 의 계산시간과 P^{*t} 의 non-harmonicity로 인한 변환하는데 장시간 계산 소요로 실제로 사용되는 경우에는 드무나 제한된 변환된 data를 취함에 있어서 MSE와 decorrelation 정도가 다른 Unitary transform에 비해 최상의 것으로 알려져 있다.⁵⁾

(c) Covariance matrix의 norm : covariance matrix C_x 의 norm, $\|C_x\|^2$ 은 (9)로 정의된다.

$$\|C_x\|^2 = \frac{1}{N} \sum_m \sum_n |C_x(m, n)|^2 \quad (9)$$

즉 모든 $C_x(m, n)$ 의 power의 평균치를 뜻한다. 위와 마찬가지로 1차원 신호변환된 covariance matrix C_y 의 norm, $\|C_y\|^2$ 은 (10)으로 된다. (부록 - 1 참조)

$$\|C_y\|^2 = \|C_x\|^2 \quad (10)$$

1.2 Energy집중의 정도 비교

Energy가 분산되어 있는 산호원을 unitary transform에 의한 energy 집중의 정도를 앞에서 언급한 변환영역에서의 covariance matrix C_y 에 의해 다음 3가지의 척도로 나타낼 수 있다.

(A) C_y 의 norm에 의한 비교

C_y 의 대각선부의 elements의 power로 Correlation 정도를 나타낼 수 있겠다. 그리고 digital signal의 coding할 때와 filter의 error

bound가 $\|C_y(l, k)\|^2 (l \neq k)$ 에 비례한다는 것이 밝혀지고 있다.⁶⁾ 여기서는 $\|C_y(l, k)\|^2 (l \neq k)$ 와 신호원의 $\|C_x(m, n)\|^2 (m \neq n)$ 의 상대적 비를 decorrelation 정도를 나타내는 척도로 (11)과 같이 사용하겠다. (10)을 이용하여)

$$E = \frac{\|C_y(l, k)\|^2 (l \neq k)}{\|C_x(m, n)\|^2 (m \neq n)} = \frac{N \|C_x(m, n)\|^2 - \sum_l |C_y(l, l)|^2}{N \|C_x(m, n)\|^2 - \sum_l |C_x(m, m)|^2} \quad (11)$$

(B) 최소의 bits rate (rate distortion criterion)

Coding할 때 허용왜곡한도내에서의 필요한 최소의 bits rate로 여러가지 transform을 비교할 수 있다. (12)는 B transform에 대한 A transform의 상대적 total bits rate를 나타낸 것이다.⁷⁾

$$\Delta B = \frac{1}{2} \sum_l \log_2 \left(\frac{C_{yA}(l, l)}{C_{yB}(l, l)} \right) \quad (12)$$

여기서 $C_{yA}(l, l)$ 및 $C_{yB}(l, l)$ 은 각각 A 와 B transform에 의한 변환 영역에서의 variance를 뜻한다. (covariance matrix $C_y(l, k) l = k$) 만약 ΔB 가 양이면 B 가 A 보다 coding할 때 동일한 왜곡한도내에서 bits 수를 ΔB 만큼 적게 해도됨을 뜻한다.

(C) Mean square correlation coefficient

변환 영역에서의 두 data $y(l)$ 과 $y(k)$ 의 결합계수 $r(l, k)$ 는 (13)으로 정의된다.

$$r(l, k) = \frac{C_y(l, k)}{C_y(l, l) C_y(k, k)} \quad (13)$$

이들 결합계수의 mean square(14)로 decorrelation 정도를 나타내는 척도로 사용할 수 있다.⁸⁾

$$R = \frac{1}{N(N-1)} \sum_l \sum_k |r(l, k)|^2, (l \neq k) \quad (14)$$

2. Composite Fourier Transform(CFT)

2.1 FT와 DFT

(A) 정의

FT와 DFT pair는 각각 (15), (16)으로 정의된다.

$$\left. \begin{aligned} X(f) &= \int x(t) \text{EXP}(j 2 \pi f t) dt \\ x(t) &= \int X(f) \text{EXP}(j 2 \pi f t) df \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

$$\left. \begin{aligned} y(m) &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_n x(n) \text{EXP}(-j 2 \pi \frac{m n}{N}) \\ x(n) &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_m y(m) \text{EXP}(j 2 \pi \frac{m n}{N}) \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

(B) 우함수와 기함수

다음의 첨자 e 와 o 는 각각 우함수와 기함수를 뜻한다.

Analog Signal의 경우 :

$$x(t) = x_e(t) + x_o(t) \quad (17)$$

여기서 $x_e(t)$ 와 $x_o(t)$ 는 각각 $x(t)$ 와 $x(-t)$ 의 합과 차를 2로 나눈 것이다.

Discrete signal의 경우 (한 sequence가 N 개의 sample data로 구성되고 이것이 주기함수라고 가정, 즉 $x(n) = x(n + KN)$, K 는 정수):

$$x(n) = x_e(n) + x_o(n) \quad (18)$$

여기서 $x_e(n)$ 과 $x_o(n)$ 은 (19), (20)으로 정의된다.

$$x_e(n) = \begin{cases} x(0), & n = 0 \\ \frac{x(n) + x(N-n)}{2}, & 1 \leq n \leq N-1 \end{cases} \quad (19)$$

$$x_o(n) = \begin{cases} 0; & n = 0 \\ \frac{x(n) - x(N-n)}{2}, & 1 \leq n \leq N-1 \end{cases} \quad (20)$$

따라서 discrete한 경우에는 우함수와 기함수는 $x(0)$ 를 제외하고 $n = \frac{N}{2}$ 을 기준으로 Analog Signal의 우함수와 기함수를 sampling한 것과 같다.

(C) 특 성

우함수와 기함수의 특성을 이용하여 다음 (21), (22)를 얻을 수 있다.

$$\int x_e(t) \cos(2\pi ft) dt = \int x_o(t) \sin(2\pi ft) dt = 0 \quad (21)$$

$$\sum_n x_e(n) \cos(\frac{2\pi mn}{N}) = \sum_n x_o(n) \sin(\frac{2\pi mn}{N}) = 0 \quad (22)$$

$X_e(f)$ 와 $X_o(f)$ 의 경우에는 (21), $y_e(m)$ 과 $y_o(m)$ 의 경우에는 (22)의 관계식을 만족한다.

2.2 CFT 및 DCFT 유도

(15), (17), (21)에서 (23)과 (24)를 얻을 수 있다.

$$\left. \begin{aligned} X_e(f) &= \int x(t) \cos(2\pi ft) dt \\ X_o(f) &= \int -j x(t) \sin(2\pi ft) dt \\ x_e(t) &= \int X(f) \cos(2\pi ft) df = \int \{ X_e(f) \pm j X_o(f) \} \cos(2\pi ft) df \\ x_o(t) &= \int j X(f) \sin(2\pi ft) df = \int \{ \pm X_e(f) + \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

$$j X_o(f) \} \sin(2\pi ft) df \quad (24)$$

(23)과 (24)에서 (25)를 얻을 수 있다.

$$\left. \begin{aligned} X_e(f) \pm j X_o(f) &= \int x(t) \{ \cos(2\pi ft) \pm \sin(2\pi ft) \} dt \\ x(t) &= \int \{ X_e(f) \pm j X_o(f) \} \{ \cos(2\pi ft) \pm \sin(2\pi ft) \} df \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

따라서 새로운 transform(CFT) pair를 얻을 수 있다.(26)

$$G(f) = \sqrt{2} \int x(t) \cos(2\pi ft \pm \frac{\pi}{4}) dt \quad (26)$$

$$x(t) = \sqrt{2} \int G(f) \cos(2\pi ft \pm \frac{\pi}{4}) df$$

여기서 $G(f)$ 는 $X_e(f) \mp j X_o(f)$ 이다.

Discrete한 경우도 위와 같은 방법으로 DCFT를 유도해보자. (16), (18), (22)에서 (27)과 (28)를 얻을 수 있다.

$$y_e(m) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_n x(n) \cos(\frac{2\pi mn}{N}) \quad (27)$$

$$y_o(m) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_n -j x(n) \sin(\frac{2\pi mn}{N})$$

$$x_e(n) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_m \{ y_e(m) \pm j y_o(m) \} \cos(\frac{2\pi mn}{N}) \quad (28)$$

$$x_o(n) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_m \{ \pm y_e(m) + j y_o(m) \} \sin(\frac{2\pi mn}{N})$$

(27)과 (28)에서 (29)를 유도할 수 있다.

$$y_e(m) \pm j y_o(m) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_n x(n) \{ \cos(\frac{2\pi mn}{N}) \pm \sin(\frac{2\pi mn}{N}) \}$$

$$x(n) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_m \{ y_e(m) \pm j y_o(m) \} \{ \cos(\frac{2\pi mn}{N}) \pm \sin(\frac{2\pi mn}{N}) \} \quad (29)$$

따라서 DCFT를 얻을 수 있다.(30)

$$G(m) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{N}} \sum_n x(n) \cos(\frac{2\pi mn}{N} \pm \frac{\pi}{4}) \quad (30)$$

$$x(n) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{N}} \sum_m G(m) \cos(\frac{2\pi mn}{N} \pm \frac{\pi}{4})$$

여기서 $G(m) = y_e(m) \mp j y_o(m)$ 이다. 한편 $x(t)$ 와 $x(n)$ 이 실수인 경우에는 CFT(DCFT)로 변환한 것은 FT(DFT)로 변환한 것의 실수와 허수부분을 합 또는 차의 것과 같음을 알 수 있다.

3. DCFT와 Sinusoidal transform의 비교

이미 알려진 각종 sinusoidal transform(표1)은 OCT (2N-1이 소수인 경우)를 제외하고는 FFT 방법을 사용할 수 있다. 여기서는 계산시간을 제외하고 1.2절에서 언급한 3가지 척도로 비교하기로 하겠다.

表 1. Sinusoidal transforms

명 칭	$t(m, n)$
DCT (2)	$\sqrt{\frac{2}{N}} A(m) \cos\left(\frac{2\pi}{N} m\left(n+\frac{1}{2}\right)\right)$
OCT (11)	$\sqrt{\frac{4}{2N-1}} A(m)A(n) \cos\left(\frac{2\pi mn}{2N-1}\right)$
SCT (3)	$\sqrt{\frac{2}{N-1}} B(m)B(n) \cos\left(\frac{\pi mn}{N-1}\right)$
DST (4)	$\sqrt{\frac{2}{N+1}} \sin\left(\frac{(m+1)(n+1)\pi}{N+1}\right)$

여기서, $A(m) = \begin{cases} 1, & m \neq 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}, & m = 0 \end{cases}$

$B(m) = \begin{cases} 1, & 1 \leq m \leq N-2 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}, & m = 0, m = N-1 \end{cases}$

변환영역에서의 covariance matrix C_y 는 신호원의 C_x 에 의존하기 때문에 (6) C_x 의 산출이 우선적으로 필요하겠다. 그러나 신호원마다 statistic이 달라 모든 신호원을 어느 한종류로 정의할 수는 없다. 모든 unitary transform 그 자체가 서로 다른 covariance matrix C_x 의 KLT이기 때문에 어느 한 종류의 신호원으로 비교한다는 것은 무리이다. 그러나 TV 신호의 경우, 화소들간에 어느정도 MP 특성을 갖는다는 것이 알려지고 있는 반면에⁹⁾ 음성신호의 경우에는 이와는 다른 C_x 를 갖는다.¹⁰⁾ 본 연구에서는 화상신호의 transform coding에 역점을 두었기에 MP특성의 신호원에 한하여 각종 transform을 비교하기로 하겠다. 이 경우 1차원 신호원 (TV의 한 줄의 화상신호)의 C_x 는 (31)로 주어진다.

$$C_x(m, n) = P^{|m-n|}, |P| < 1 \quad (31)$$

여기서 P 는 인접 화소간의 결합계수이다. (6), (11), (12), (14), (31)로부터 $E, \Delta B, R$ 를 계산할 수 있다.

C_y 를 계산하려면 3개의 matrix를 곱해야 한다. 이 계산 시간을 줄이기 위해 C_x (31)를 (6)에 대입하여 직접 손으로 계산하는 것이 편리하다. (부록 2 참조)

그림 1~3은 N (32, 64, 128)과 P (0.01, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.75, 0.8, 0.85, 0.9, 0.95, 0.99)의 함수로 $E, \Delta B, R$ 를 DFT, DCFT, DCT, OCT, SCT, DST의 6개의 transform에 대한 것으로 그림내의 수직으로 나타낸 6개의 transform의 첫글자가 시작 곳의 P 에 해당하는 순으로 나타낸 것이다.

그림 1에서 DST의 경우 P 가 클수록 coding이나 filter 제작시 error bound가 커진다는 것을 알 수 있고 (a)도에서 사각형 밖의 숫자는 $P = 0.95$ 및

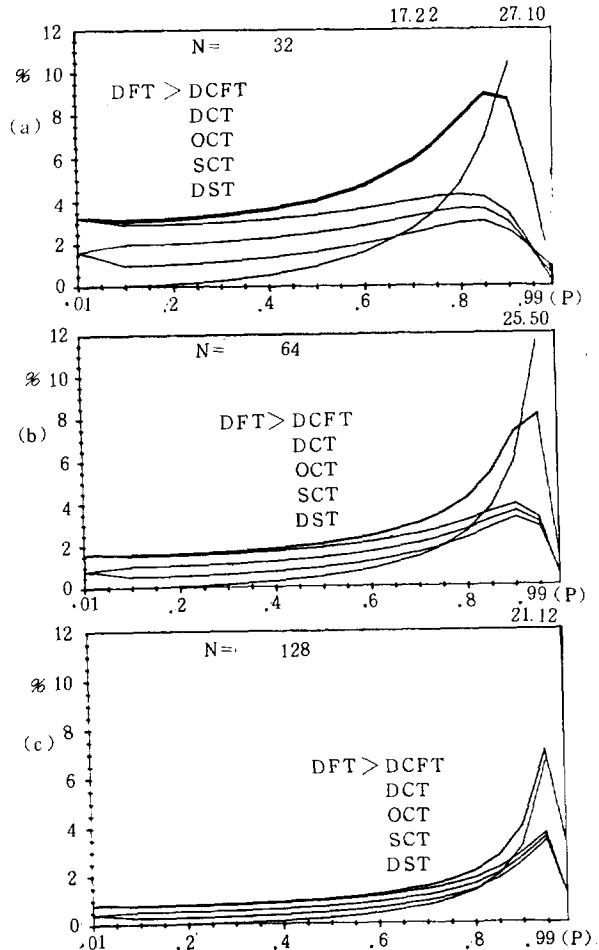


그림 1. E(11); (a)N=32, (b)N=64, (c)N=128

0.99일때의 DST 특성을 나타낸 것이고, (b)와 (c)에서는 $P = 0.99$ 일때의 DST 특성을 나타낸 것이다.

나머지 5개의 transform의 경우 P 가 1에 가까울수록 error bound가 작아짐을 알 수 있다. 전반적인 P 의 값에서 SCT가 가장 작은 error bound의 값을 갖는다는 것을 알 수 있다.

그림 2에서, SCT를 기준으로 한 상대적 최소 total bits rate (ΔB)를 나타낸 것으로 P 가 0.8 이하일 경우에는 거의 같고 P 가 1에 가까울수록 DCT가 가장 좋은 특성을 갖는다는 것을 알 수 있다.

그림 3에서 mean square correlation계수를 나타낸 것으로 P 가 0.5인 점을 기준으로 대칭인 모

양으로 나타내며 DCT가 최상의 것임을 알 수 있다.

그림 4에서는 $P = 0.95$ (TV의 한줄의 화상신호의 실측치⁹⁾)이고 N (32, 64, 128, 192, 256, 384, 512)의 함수로 E , ΔB , R 을 나타낸 것으로, (a)도 (E)를 제외하고는 DCT가 최적임을 알 수 있다.

위 4가지의 그림에서, DCFT는 DFT에서 유도했으나 MP 신호원의 경우 DFT보다 약간 우세하다는 것을 알 수 있다. 한편 H. Andrews¹²⁾는 MP 신호원인 경우 binary transform (HT 및 WT)과 Harr T의 ΔB 는 DFT에 비해 못하다는 것을 보였다. ($N = 256, P = 0.95$)

MP 신호원인 경우에, 위 9개의 transform에 대

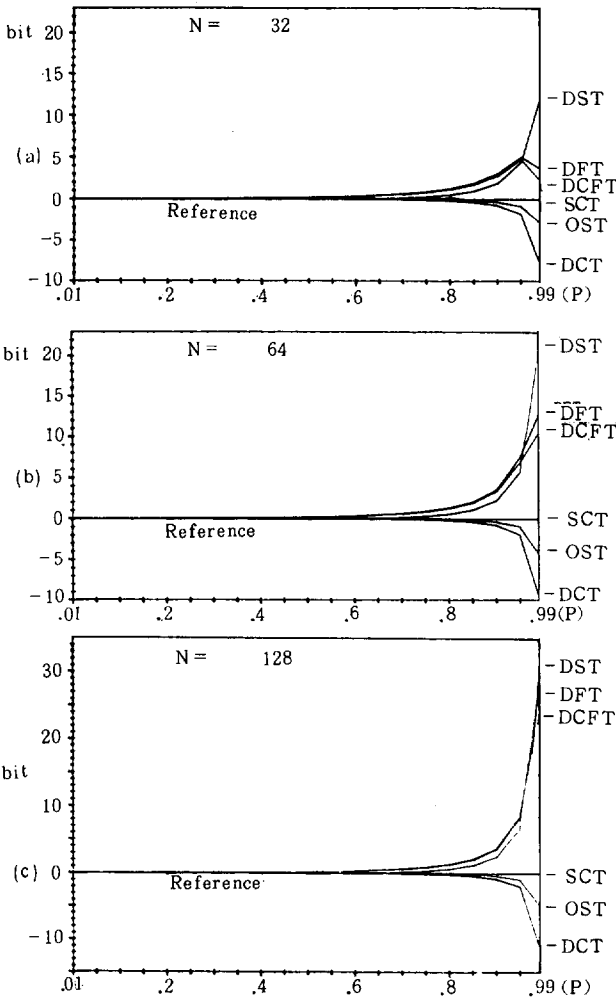


그림 2. ΔB (12); (a) $N=32$, (b) $N=64$, (c) $N=128$

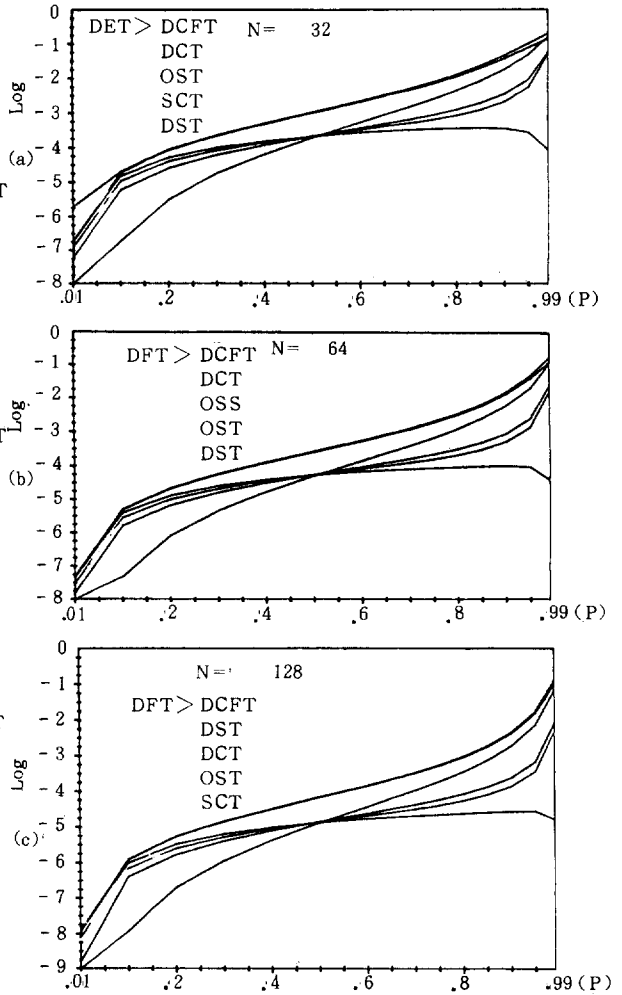


그림 3. R (14); (a) $N=32$, (b) $N=64$, (c) $N=128$

부록—1

Covariance matrix C_x 의 Norm, $\|C_x\|^2$ 은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \|C_x\|^2 &= \frac{1}{N} \sum_m \sum_n |C_x(m,n)|^2 \\ &= \frac{1}{N} \sum \text{diag} \{ C_x^{*t} C_x \} \end{aligned} \quad (A-1)$$

여기서 $\sum \text{diag} \{ \cdot \}$ 은 대각선 성분의 합을 뜻한다. 여기서 $C_x^{*t} = Q$ 라 하면,

$$\|C_x\|^2 = \frac{1}{N} \sum_m \sum_n Q(m,n) C_x(n,m) \quad (A-2)$$

으로 된다. 한편, $T^{*t} = Z$ 라 하고, unitary matrix의 성질(2)를 이용하면,

$$\sum_l Z(q,l) t(l,m) = \delta(q-m) \quad (A-3)$$

이 된다. 마찬가지로 방법으로 변환영역에서의 covariance matrix의 norm, $\|C_y\|^2$ 은,

$$\|C_y\|^2 = \frac{1}{N} \sum \text{diag} \{ C_y^{*t} C_y \} \quad (A-4)$$

으로 된다. (6)과 (A-4)에서,

$$\begin{aligned} \|C_y\|^2 &= \frac{1}{N} \sum \text{diag} \{ TQ C_x Z \} \\ &= \frac{1}{N} \sum_l \sum_m \sum_n \sum_q \{ t(l,m) Q(m,n) \\ &\quad C_x(n,q) Z(q,l) \} \\ &= \frac{1}{N} \sum_m \sum_n \sum_q \{ Q(m,n) C_x(n,q) \\ &\quad \sum_l Z(q,l) t(l,m) \} \end{aligned}$$

여기서 (A-3)를 이용하면,

$$\begin{aligned} \|C_y\|^2 &= \frac{1}{N} \sum_m \sum_n \sum_q Q(m,n) C_x(n,q) \delta(q-m) \\ &= \frac{1}{N} \sum_m \sum_n Q(m,n) C_x(n,m) \\ &= \|C_x\|^2 \end{aligned} \quad (A-5)$$

이 됨을 증명할 수 있다.

부록—2

$C_x(m,n)$ 이 (31)을 만족할 때 $C_y(l,k)$ 는 (6)으로부터 다음 (A-6)로 계산된다.

$$C_y(l,k) = \sum_{m=0}^{N-2} \left\{ \sum_{n=0}^m P^{m-n} f(l,m,n,k) \right.$$

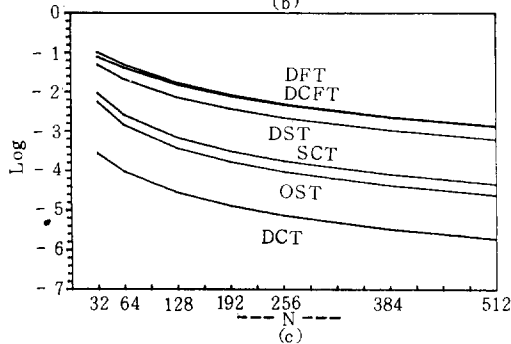
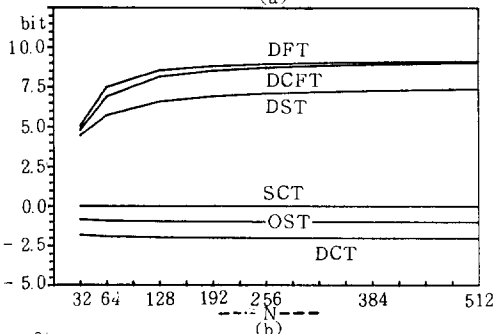
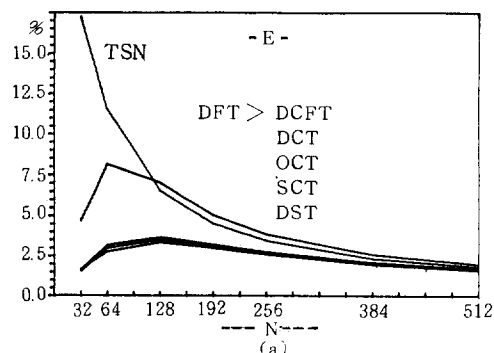


그림 4. (a) E, (b) ΔB , (c) R; P = 0.95

하여 종합적으로 결론을 내릴 수 있겠다.

DCT > OCT > SCT > DST > DCFT > DFT > WT (=HT) > Harr T

4. 결 론

신호처리방법의 하나인 transform coding에 있어서, unitary transform의 기본특성을 정리했고 FT (DFT)로부터 CFT (DCFT)를 유도했다. MP 특성에 가까운 화상신호에 대한 1차원 변환에 대한 각종 transform을 비교하였다. 이것으로 DCT가 이들중 가장 KLT에 가깝다는 것과 DCFT가 DFT보다 약간 좋은 특성을 갖는다는 것을 알 수 있었다.

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{n=m+1}^{N-1} P^{n-m} f(l, m, n, k) \} \\
 & + \sum_{n=0}^{N-1} P^{N-1-n} f(l, N-1, n, k) \quad (A-6)
 \end{aligned}$$

여기서 $f(l, m, n, k) = t(l, m) Z(n, k)$ 이다.
 (A-6)를 이용하여 DFT, DCFT, DCT, OCT, SCT, DST의 경우 C_y 를 계산한 결과는 다음과 같다.

1) DFT

$$\begin{aligned}
 C_y(l, k) &= \frac{(1-P^2)}{g(k)} \delta(l-k) - \frac{2P(1-P^N)}{Ng(k)g(l)} \\
 & \left\{ (1+P^2) \cos \frac{\pi(l+k)}{N} - 2P \cos \frac{\pi(l-k)}{N} \right\} \\
 & \times \text{EXP} \left\{ \frac{j(l-k)\pi}{N} \right\} \quad (A-7)
 \end{aligned}$$

여기서, $g(k) = 1 + P^2 - 2P \cos \left(\frac{2\pi k}{N} \right)$ 이다.

2) DCFT : $t(m, n) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{N}} \cos \left(\frac{2\pi mn}{N} \pm \frac{\pi}{4} \right)$

$$\begin{aligned}
 C_y(l, k) &= \frac{(1-P^2)}{g(k)} \delta(l-k) \\
 & + \frac{2P(1-P^N)}{Ng(k)g(l)} F(l, k) \quad (A-8)
 \end{aligned}$$

여기서, $g(k) = 1 + P^2 - 2P \cos \left(\frac{2\pi k}{N} \right)$,

$$\begin{aligned}
 F(l, k) &= P + 2P C(k) C(l) - \frac{(1+P^2)}{\sqrt{2}} \\
 & \{ C(k) + C(l) \},
 \end{aligned}$$

$C(k) = \cos \left\{ \frac{2\pi k}{N} \mp \frac{\pi}{4} \right\}$ 이다.

3) DCT

$(l+k)$ 가 홀수이면 $C_y(l, k) = 0$,
 $(l+k)$ 가 짝수이면,

$$\begin{aligned}
 C_y(l, k) &= \frac{4A(l)A(k)}{Ng(k)g(l)} C(l) C(k) P(1-P)^2 \\
 & \{ (-1)^2 P^N - 1 \} + \frac{A(l)A(k)}{g(k)} \{ \delta(l+k) \\
 & + \delta(l-k) \} (1-P^2) \quad (A-9)
 \end{aligned}$$

여기서, $g(k) = 1 + P^2 - 2P \cos \left(\frac{\pi k}{N} \right)$,

$C(l) = \cos \left(\frac{\pi l}{2N} \right)$, $A(l)$ 은 표 1에서 정의한 것과 같다.

4) OCT

$$\begin{aligned}
 C_y(l, k) &= \left(\frac{4}{2N-1} \right) \frac{A(l)A(k)}{g(k)g(l)} (A+B+C+ \\
 & D+E+F) + \frac{A(l)A(k)}{g(k)} (1-P^2) \{ \delta(l+k) \\
 & + \delta(l-k) \} \quad (A-10)
 \end{aligned}$$

여기서, $g(k) = 1 + P^2 - 2P \cos \left(\frac{2\pi k}{2N-1} \right)$,

$$\begin{aligned}
 A &= (1-P)P^N \left(1 - \frac{1+P^2}{\sqrt{2}} \right) \\
 & \{ (-1)^k C(k) + (-1)^l C(l) \}
 \end{aligned}$$

$$B = P \left(\frac{1+3P^2}{\sqrt{2}} - 1 - 2P^2 \right) (C(2l) + C(2k))$$

$$\begin{aligned}
 C &= (1-P)P^{N+1}(\sqrt{2}-1) \{ (-1)^k C(k) \\
 & C(2l) + (-1)^l C(l) C(2k) \}
 \end{aligned}$$

$$D = (3-\sqrt{2})P^2 C(2k) C(2l)$$

$$E = -P(1-P)^2 (-1)^{k+l} C(k) C(l)$$

$$F = 2P^2 \left(1 + \frac{P^2}{2} - \frac{1+P^2}{\sqrt{2}} \right)$$

$C(l) = \cos \left(\frac{\pi l}{2N-1} \right)$ 이다.

5) SCT

$(l+k)$ 가 홀수이면 $C_y(l, k) = 0$,
 $(l+k)$ 가 짝수이면,

$$\begin{aligned}
 C_y(l, k) &= \left(\frac{2}{N-1} \right) B(l) B(k) \left\{ \frac{D_1+D_2}{g(k)g(l)} \right. \\
 & + \frac{P^2-1}{g(k)} + \left(\frac{1-P^2}{2} \right) \frac{(N-1)D_3}{g(k)} + \\
 & \left. P^{N-1} (-1)^l + 1 \right\} \quad (A-11)
 \end{aligned}$$

여기서, $g(k) = 1 + P^2 - 2P \cos \left(\frac{\pi k}{N-1} \right)$,

$$\begin{aligned}
 D_1 &= (P+P^N(-1)^k) \{ (P^2-1) + (\sqrt{2}-1) \\
 & g(k) C(l) + \sqrt{2} g(l) C(k) \}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 D_2 &= (P^2+P^{N-1}(-1)^l) \{ 1-P^2 + (1-\sqrt{2}) \\
 & g(k) - \sqrt{2} g(l) \}
 \end{aligned}$$

$$D_3 = \delta(l+k) + \delta(l-k) + \delta(l+k+2-2N)$$

$$C(l) = \cos\left(\frac{\pi l}{N-1}\right)$$

$B(l)$ 은 표 1에서 정의한 것과 같다.

6) DST

$(l+k)$ 가 홀수이면 $C_y(l, k) = 0$

$(l+k)$ 가 짝수이면,

$$C_y(l, k) = \left(\frac{4}{N+1}\right) \frac{S(k)S(l)}{g(k)g(l)} P^2 \left(1 + P^{N-1}(-1)^l + \frac{(1-P^2)}{g(k)} \delta(l-k)\right)$$

여기서, $g(k) = 1 + P^2 - 2P \cos\left(\frac{(k+1)\pi}{N+1}\right)$

$$s(k) = \sin\left(\frac{(k+1)\pi}{N+1}\right)$$

약 어

FT : Fourier transform

DFT : Discrete FT,

DCFT : Discrete DFT

DCT : Discrete cosine transform

DST : Discrete sine transform

WT : Walsh transform

Harr T : Harr transform

MP : Stationary first-order Markoff process

X : Data vector or data matrix

$|X|$: X의 절대값

FFT : Fast FT

CFT : Composite FT

KL T : Karhunen Loeve transform

SCT : Symmetric cosine transform

OCT : Odd cosine transform

HT : Hadamard transform

MSE : Mean square error

$x(n), x(m, n)$: Element of X

$\|X\|^2$: X의 norm

j : $\sqrt{-1}$

$\int x(t) dt : \int_{-\infty}^{\infty} x(t) dt$

$\delta(\ell - k) : 1, \ell = k ; 0, \ell \neq k$

$\sum_n : \sum_{n=0}^{N-1}$

参 考 文 献

1) J.W Cooley and J.W. Tukey; "An algorithme

for machine calculation of complex fourier series," Math. Comput. vol. 19. 1965, 297~301.

2) N. Ahmed, T. Natarajan, and K.R. Rao; "Discrete cosine transform," IEEE, Trans. Comput. Jan. 1974, pp.90~93.

3) Hideo Kitajima; "A symmetric cosine transform," IEEE Trans. Comput. vol. C-29, No 4, April 1980, pp. 317~323.

4) Anil K. Jain, "A fast karhunen-loeve transform for a class of random processes," IEEE, Trans. Commun., Sept. 1976, pp.1023~1029.

5) Arun N. Netravali and John O. Limb, "Picture Coding: A Review," Proc. IEEE, vol. 68, N° 3, March. 1980, pp.366~406.

6) Judea Pearl, "On coding and filtering stationary signal by Discrete Fourier Transform," IEEE Trans. Inform. Theory, March 1973, pp.229~232.

7) Judea pearl, Harry C. Andrews, and william K. Pratt, "Performance measures for Transform data coding," IEEE Trans. Commun. June 1972, pp.411~415.

8) Hideo Kitajima, Takao Saito and Teiichi Kurobe, "Comparison of the discrete cosine and fourier transforms as possible substitutes for the karhunen-Loeve transform," The Trans. of the I.E.C.E. of JAPAN, vol. E 60, N° 6, June 1977, pp. 279~283.

9) W.K. Pratt; Digital image image processing, Chapter 5, New York: Wiley, 1976, pp.209~211.

10) S.J. Campanella and Guner S. Robinson; "A Comparison of orthogonal transform for digital speech processing," IEEE Trans. Commun. Technol., vol. COM-19, Dec. 1971, pp. 1045~1049.

11) W.K. Pratt, Digital image processing. Chapter 10, New York; Wiley, 1976, pp. 380~384.

12) Harry C. Andrews, "Walsh functions in image processing, feature selection and pattern recognition," Proc. Symp. Applications of Walsh Functions, Washington, D.C. April 1971, pp. 26~32.