

< 論 文 >

複合組織鋼의 破斷延性に 미치는 塑性拘束에
의한 內部應力の 영향†

金 楨 圭*

(1982년 7월 19일 접수)

Effect of Internal Stress due to Plastic Costraint on Fracture
Ductility of Dual Phase Steel

Jung Kyu Kim

Abstract

The effect of the micro-internal stress which is induced in the ferrite grain by plastic constraint, on fracture behavior was investigated. The specimen used has combined microstructure with matrix of ferrite encapsulated by second phase of martensite.

The micro-internal stress in the ferrite grain was estimated using a simple mechanical model, and its effect on micro and macro fracture behaviors was discussed. The results obtained are summarized as follows;

The micro-internal stress promotes the formation of cleavage cracks in the ferrite during deformation. Consequently, it was concluded that the internal stress is one of the significant factors which cause the fracture ductility to decrease.

기 호 설 명

P : 荷重
 σ_a : 負荷應力
 ϵ_z : 圓柱 및 圓筒의 全變形量
 ${}^a\sigma_y, {}^b\sigma_y$: 圓柱 및 圓筒의 降伏應力
 R, R_2 : 圓柱 및 圓筒의 半徑
 ${}^a\epsilon_{z,z}, {}^a\epsilon_{z,p}$: 圓柱의 軸方向의 彈性 및 塑性變形量
 ${}^a\epsilon_{\theta,p}, {}^a\epsilon_{r,p}$: 圓柱의 圓周 및 半徑의 塑性變形量
 ${}^a\Delta_p$: 塑性變形에 의한 圓柱의 直徑增加量

${}^a\Delta_e, {}^b\Delta_e$: 彈性變形에 의한 圓柱의 直徑增加量 및 圓筒의 內徑增加量
 ${}^a\sigma_z, {}^b\sigma_z$: ($r=R_1$)에 있어서 圓柱, 圓筒의 軸方向應力
 ${}^a\sigma_\theta, {}^b\sigma_\theta$: ($r=R_1$)에 있어서 圓柱, 圓筒의 圓筒方向應力
 ${}^a\sigma_r, {}^b\sigma_r$: ($r=R_1$)에 있어서 圓柱, 圓筒의 半徑方向應力
 E_α, E_β : ($r=R_1$)圓柱, 圓筒의 彈性係數
 ν_α, ν_β : 圓柱, 圓筒의 포와송比
 p_1 : 圓筒의 彈性領域內에서의 界面應力
 p_2 : 圓筒에서 降伏이 시작하려고 할 때의 界面應力

† 1981년도 대한기계학회 추계학술대회 (81.11.20)에서 발표

* 正會員, 漢陽大學校 工科大學

1. 緒 論

공업적으로 중요한 合金中에는 그의 微視組織의 성질이 각각 다른 2개의 相으로 구성된 二相混合組織을 가진 것이 많다^{1)~4)}. 그러나 이들 鋼의 變形 및 破壞特性에 대해서는 單相組織鋼의 것에 비하여 조직상간의 力學的拘束效果 때문에 명확히 파악되어 있다고 할 수 없으며, 재료의 破壞舉動을 지배하는 微視的要因을 밝히는 파괴현상의 본질 규명에 중요한 사항이라고 생각된다.

근년, 硬·軟質 二相으로 구성된 페라이트-마르텐사이트 複合組織鋼에 있어서 이 강의 破壞特性에 대하여 微視組織學的 및 破壞力學的手法에 의하여 많은 검토를 행하여 오고 있다^{5)~8)}. 그 一例로서, 複合組織鋼의 破壞舉動은 第二相으로서의 마르텐사이트 組織의 형태가 母相페라이트에 의해 둘러싸인 孤立形態에서 第二相이 母相을 둘러싸고 있는 連結形態로 변화함에 따라, 그리고 連結形態에 있어서는 第二相組織의 두께가 두꺼울수록, 母相페라이트의 結晶粒은 쉽게 劈開크랙을 형성하고, 이것이 원인이 되어 破壞強度 및 破斷延性, 靱性등에 현저한 변화를 가져옴이 밝혀졌다^{5), 8), 9)}. 또한 劈開크랙의 형성난이점은 열처리과정에서 第二相의 체적 팽창에 의해 발생하는 母相粒內의 微視的 殘留應力¹⁰⁾이 보고되었고, 그리고 降伏強度가 낮은 母相의 塑性變形에 대한 降伏強度가 높은 第二相組織의 拘束效果도 중요한 요인이 됨을 母相粒內의 슬립특성으로부터 定性的으로 설명될 수 있음을 나타내었다⁹⁾.

그러나 이러한 母相과 第二相과의 불균일 塑性變形에 의한 塑性拘束의 발생에 관한 체계적인 평가에는 아직도 검토할 여지가 많다. 특히, 이 塑性拘束에 의한 內部應力은 微視組織因자의 변화와 밀접한 관련성이 있다고 생각되어 組織因자의 변화에 따른 破壞舉動의 차이를 微視的內部應力에 의해 定量的으로 평가할 수 있는 방법의 체계화는 재료의 強度, 延性 및 靱성의 향상에 있어서 중요한 사항이라고 할 수 있다.

그래서 本 研究에서는 上述의 塑性變形의 不均一에 의해 생기는 微視的 內部應力을 第二相 마르텐사이트 組織이 母相페라이트를 둘러싼 第二相 連結形態의 複合組織鋼을 준비하여, 간단한 연속체역학 모델을 이용하여 해석하고, 더욱 이것을 지배하는 微視組織因자의 검토 및 內部應力과 破壞舉動과의 상관관계에 대하여 定量的으로 검토를 행하였다.

2. 微視的內部應力の 考察 및 力學的 모델

일반적으로 어떤 영역에서 微視크랙이 형성되기 위해서는 그 영역에서 垂直引張應力이 크랙形成應力の 임계치까지 상승하는 것이 필요하다.

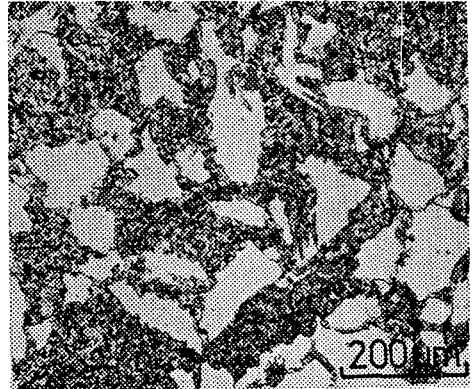
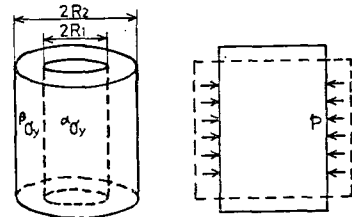


Fig. 1 Martensite encapsulated islands of ferrite (MEF microstructure, light etching phase-ferrite; dark-martensite).

여기에서는 Fig. 1 과 같이 第二相인 마르텐사이트 組織이 母相 페라이트粒을 둘러싼 複合組織(이하 MEF 組織이라고 함)에 대하여 변형과정중, 페라이트의 塑性變形拘束에 의한 微視的內部應力의 生成을 고찰의 대상으로 한다.

지금 MEF 組織에 外力이 가하여지면 소성영역에 들어 있는 페라이트의 變形은 탄성영역상태에 있는 마르텐사이트 組織의 구속으로 母相의 塑性變形은 억제되고, 이 결과 組織內에 微視的內部應力이 발생하게 되어 이것이 페라이트粒內의 應力을 상승시키는 역할을 한다고 생각된다. 그래서, 이러한 의미에서의 內部應力을 먼저 이론적으로 검토하기 위하여 Fig. 2 와 같이 連續體力學 모델化 하였다. 이 그림에서 마르텐사이트 組織이 페라이트粒을 완전히 둘러싼 형태에 대응하여 剛體인 圓筒의 內側에 軟質體의 圓柱(완전 소성체)를 가



(a) Compound cylinder. (b) Deformation of column. Fig. 2 Deformation model of compound cylinder.

진 형으로 모델화한 것으로 軸方向으로 압축되어 圓柱 부분만이 降伏이 일어나고 있는 상태를 나타내고 있다. 이러한 모델을 이용하면 變形과정중, 페라이트의 塑性變形이 第二相의 구속에 의해 생기는 微視的内部應力을 평가할 수 있다고 생각된다.

그럼, 이 경우, 圓柱에 자유로운 塑性變形이 일어난다고 하면 이 원주는 Fig. 2(b)의 점선과 같이 변형하여야 한다. 즉

$$\begin{aligned} \epsilon_{z\beta} &= \epsilon_z - \alpha\epsilon_{ze} \text{ (軸方向)} \\ \epsilon_{\theta\beta} &= -1/2\alpha\epsilon_{z\beta} \text{ (圓周方向)} \\ \epsilon_{r\beta} &= -1/2\alpha\epsilon_{z\beta} \text{ (半徑方向)} \end{aligned} \quad (1)$$

그러나 실제의 변형은 외측圓筒의 彈性變形과 함께 적합하여야 함으로 실선과 같이 되고, 이때 圓筒이 降伏을 막 시작하려고 할 경우 界面에서는 次式과 같은 應力이 발생하게 된다.

$$p = \frac{(2\nu-1)}{6(\nu-1)} \{1 - (R_1/R_2)^2\} \alpha\sigma_y \{(\sigma_y/\alpha\sigma_s) - 1\} \quad (2)$$

이 식은 圓筒이 압축하중을 받는 경우의 界面應力 (p_2)이나 引張荷重을 받는 경우에는 (2)식의 각변을 $\sigma_y \rightarrow -\sigma_y$, $\sigma_s \rightarrow -\sigma_s$ 로 두면 되고, 결과는 (-)로 되어 결국, 界面應力은 引張應力으로 되고, 外部應力 σ_s 와 함께 3軸應力상태를 형성하여 圓柱의 降伏應力을 界面應力만큼 상승시키는 결과를 가져오게 된다. 그래서

$$\kappa = 1 + \frac{p}{\alpha\sigma_s} \quad (3)$$

를 塑性拘束係數로 정의하여 (2)식의 값을 이용하면 次式을 얻는다.

$$\kappa = 1 + \frac{(2\nu-1)}{6(\nu-1)} \{1 - (R_1/R_2)^2\} \{(\sigma_y/\alpha\sigma_s) - 1\} \quad (4)$$

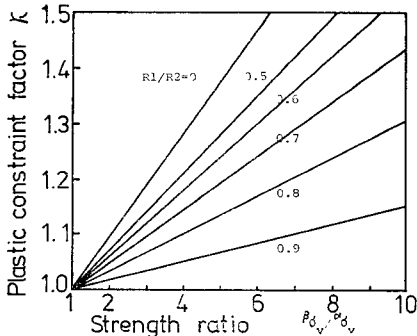


Fig. 3 Plastic constraint factor as a function of strength ratio.

Fig. 3은 上式의 塑性拘束係數 κ 와 $\sigma_y/\alpha\sigma_s$ 의 관계를 R_1/R_2 을 變數로서 계산한 결과 나타낸 것으로 上式中の ν 값은 0.3(이하 $\nu=0.3$)으로 하였다.

이상의 결과를 MEF組織에 대응하여 고찰하여 보면 페라이트粒의 塑性變形이 마르텐사이트組織에 의해 구속되어 相의 界面에서 引張應力의 内部應力이 발생하고, 이것이 페라이트粒의 降伏應力을 높이는 효과를 갖고 있다고 생각될 수 있다. 이를테면 圓筒모델에 대하여 이 κ 를 계산하여 보면 $R_2/R_1=0.5$, $\sigma_y/\alpha\sigma_s=20$ 의 경우, $\kappa=2.4$ 를 얻는다. 즉 MEF組織에 있어서는 변형의 비교적 초기단계에서 降伏應力의 數倍의 應力상승이 페라이트粒內에서 일어남을 의미한다. 따라서 변형과정중 마르텐사이트組織의 구속에 의해 생기는 페라이트粒內의 微視的内部應力은 마르텐사이트의 두께 및 強度의 大小에 의해 지배되고, 이를 微視組織의 값이 클수록 應力상승이 현저하여 페라이트粒內의 劈開크랙의 형성이 용이하리라 생각된다.

3. 破壞特性에 미치는 微視的 内部應力の 영향

3.1. 實驗方法

지금까지 평가된 内部應力和 MEF組織鋼의 微視, 巨視破壞學動과의 관련성을 검토하기 위하여 各相의 強度만이 다른 混合組織을 준비하였다. Table 1은 MEF組織을 얻기 위한 供試材(SM25C : 0.25%C, 0.24%Si, 0.43%Mn, 0.035%S, 0.03%P)의 熱處理과정 및 이에 따른 組織의 定量的評價 및 硬도평가에 의한 各相의 強度(硬도) 변화를 정리한 것이다. Fig. 1은 微視組織의 형태를 나타낸 것이다. 이들 조직을 가진 각 시험편(平行部の 길이 10 mm, 직경 8 mm)에 대하여 常溫에서 引張試驗을 행하였다. 微視破壞 및 破面의 관찰은 光學현미경 및 走査電子顯微鏡에 의하여 행하고, 劈開크랙의 측정은 前報⁷⁾의 實驗方法과 같다.

3.2. 塑性拘束係數 κ 의 구체적인 계산방법

Table 1의 強度비가 다른 供試材의 塑性拘束係數 κ 를 (4)식에 의해 구하기 위해서는 이 κ 를 지배하는 인자인 R_1/R_2 및 $\sigma_y/\alpha\sigma_s$ 의 값을 알아야 한다. Fig. 2에 있어서 圓柱의 半徑 R_1 은 平均 페라이트 結晶粒徑의 1/2과 같고, 또한 外側부분의 容積率 $\{1 - (R_1/R_2)^2\}$ 은 마르텐사이트組織의 體積率 V_M 과 같다고 생각될 수 있으므로, 먼저 R_1/R_2 는 第二相의 體積率 $V_M = \{1 - (R_1/R_2)^2\}$ 의 관계로부터 구하여 진다. 다음에 強度比 $\sigma_y/\alpha\sigma_s$ 는 第二相의 降伏強度 σ_y 에 대한 페라이트의 降伏強度 $\alpha\sigma_s$ 에 상당하는 것으로 다음과 같이 하여 구하였다. 먼저 σ_y 는 炭素含有量과 밀접한 관련이 있음을 고려하여, 第二相 마르텐사이트組織에 함유되어

Table 1 Heat treatments and metallurgical properties.

Heat treatments and metallurgical proper.	Series	Tempering temp. °C	Micro-Vickers hardness		Hardness ratio
			Martensite	Ferrite	
1200°Cx4h Annealing	A ₁	As quench.	709	197	3.6
780°Cx40min Air cool.	A ₂	200	715	202	3.5
800°Cx50min Quenching	A ₃	300	585	186	3.1
(second phase volume fraction: 70, ferrite grain size: 50um)	A ₄	400	484	160	3.0

있는 炭素含有量を 추정하고, 이 炭素량을 갖고 있는 單相 마르텐사이트 組織鋼을 얻을 수 있으면 이 鋼을 사용하여 $\mu\sigma$ 를 구할 수 있다고 생각된다. 本 研究의 경우, 第二相에 함유되어 있는 炭素량은 母材의 炭素량과 燒入溫度가 주어져 있음으로 상태도로 부터 추정하여 보면 거의 0.3%C에 가까운 量임을 알 수 있다. 그리하여 SM 30 C 鋼을 준비하여, 이 鋼에 대하여 燒入 (1200°C×4h, Annealing→900°C×30min, Quenching)을 행하고, 다시 強度의 변화를 주기 위하여 200°C, 300°C 및 400°C에서 1時間씩 유지하여 空冷한 시험편을 준비한 후, 이들 鋼의 降伏強度의 값을 A₁材~A₄材의 $\mu\sigma$ 로 취하였다. 그리고 σ_s 는 Hutchison¹⁰⁾의 실험결과를 이용하였다.

Table 2 Plastic constraint factor of microstructure calculated from equation (4).

series	R_1/R_2	$\mu\sigma_s/\sigma_s$	κ
A ₁	$(0.3)^{1/2}$	$\frac{143}{5.6} = 25.5$	2.63
A ₂	$(0.3)^{1/2}$	$\frac{140}{5.6} = 25$	2.60
A ₃	$(0.3)^{1/2}$	$\frac{118}{5.6} = 21.1$	2.34
A ₄	$(0.3)^{1/2}$	$\frac{92}{5.6} = 16.4$	2.02

Table 2는 이렇게 하여 얻어진 각 시험편의 塑性拘束係數 κ 와 이를 지배하는 인자인 降伏強度比 및 第二相의 체적율에 관계되는 R_1/R_2 의 값을 정리한 것이다.

3.3. 실험결과 및 검토

Fig. 4는 A₁材, A₂材, A₃材 및 A₄材의 應力變形率線圖이며, Fig. 5는 이들 線圖로부터 얻어진 破斷延性の 대표적인 斷面收縮率과 그리고 각 시험편의 母相페라이트의 劈開크랙의 增加率을 템퍼링溫度에 대하여 나타낸 것이다. 이 그림에 있어서 劈開크랙의 增加率 N 은 다음에 의해 구하여진 것이다. 즉 負荷變形率의 증가에 따른 劈開크랙의 數를 引張軸을 포함한

縱斷面(單位面積 1cm²)에 대하여 조사한 결과, Fig. 6에서 보는 바와 같이 安定的으로 형성된 劈開크랙의 數 N_F 는 變形率 ϵ 의 증대와 함께 직선적으로 증가함으로, 여기에서 직선의 기울기, $\Delta N_F/\Delta \epsilon$ 으로 부터 劈

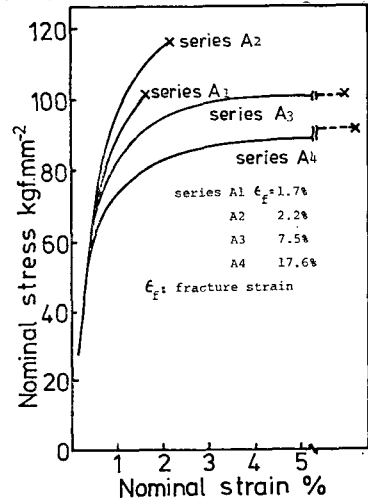


Fig. 4 Stress-strain curves.

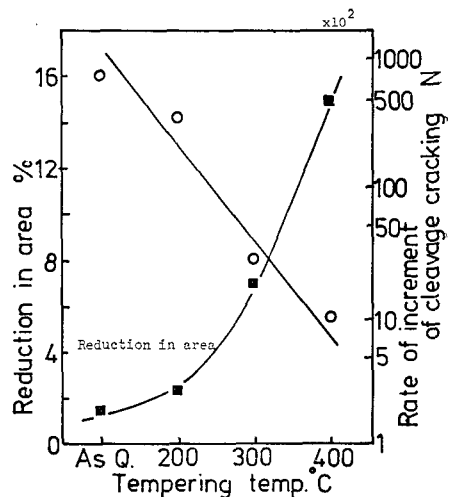


Fig. 5 Reduction in area and rate of increment of cleavage cracking vs. tempering temperature.

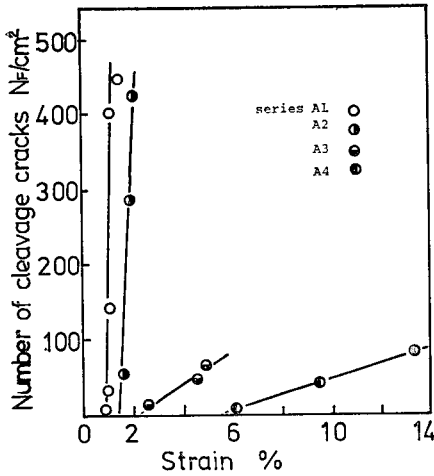


Fig. 6 Number of cleavage cracks as a function of applied strain.

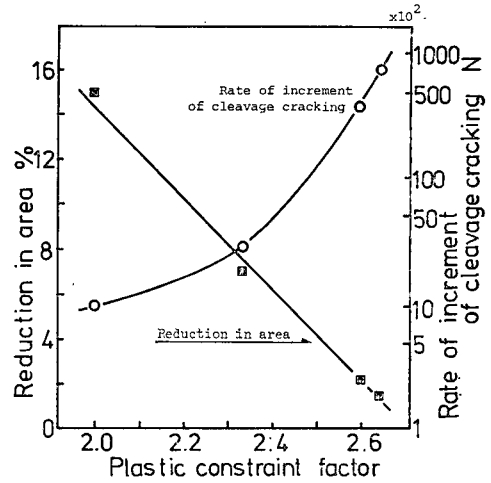


Fig. 8 Reduction in area and rate of increment of cleavage cracking vs. plastic constraint factor.

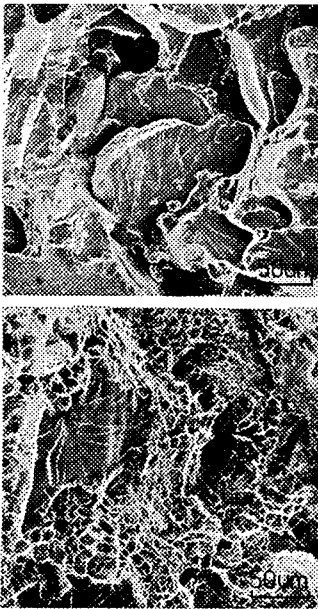


Fig. 7 Scanning electron micrographs of fracture surfaces (above: series A₁, below: series A₄).

開크랙의 增加率 N 이라고 정의하여 구한 것이다. 이 그림으로부터 템퍼링 溫度的 상승에 따른 强度比의 저하에 의해 破斷延性は 급격히 증가하며, 이것은 劈開크랙의 형성난이도와 밀접한 관련이 있음을 알 수 있다. 또한 이러한 破壞舉動의 차이는 Fig. 7의 微視破面의 변화와도 대응 관계를 보여주고 있다. 즉 强度比가 높은 A₁材의 微視破面狀의 劈開破面 (cleavage facet)의 면적보다 强度比가 낮은 A₄材의 劈開破面의 면

적이 현저히 저하하고 있다.

그럼 이상의 결과를 前章에서 설명한 塑性拘束性에 대해서 고찰하여 보자. Fig. 8은 각 시험편의 断面收縮率 및 劈開크랙의 增加率 N 과 塑性拘束係數 κ 와의 관계를 나타낸 것으로 κ 와 破斷延性 및 劈開크랙의 增加率과의 사이에는 상관성이 보여지고, κ 의 증가에 따라 破斷延性は 급격히 저하하며, 劈開크랙의 형성이 용이함을 알 수 있다. 이러한 상관관계는 各相의 降伏强度가 일정하고 R_1/R_2 , 즉 母相을 둘러싼 第二相 마르텐사이트의 두께만의 변화에 의한 MEF 組織鋼에 있어서도 보고되고 있다¹²⁾.

따라서 强度比의 大小에 따른 破斷延性的 변화는 劈開크랙의 형성난이도에 의한 것이라 할 수 있고, 이것은 변형과정 중 母相의 塑性變形에 대한 第二相 마르텐사이트의 拘束에 의한 母相粒內의 微視的 内部應力の 生成이 하나의 基本的 要因이라고 생각될 수 있다. 결국, 본래 延性を 나타내는 페라이트相이 第二相의 두께 및 强度의 증가에 의해 拘束性이 높은 경우에는 母相粒內의 内部應力이 상승하여 용이하게 劈開크랙을 형성하여 延性的인 성질을 잃어 버리지만, 拘束性이 낮은 경우에는 페라이트相의 塑性變形은 자유로와 되고, 따라서 劈開크랙의 형성은 어렵게 되어 본래의 延性的인 성질을 띠게 되는 것이다. 이렇게 해서, 變形과정중, 第二相 마르텐사이트組織의 拘束에 의해 생기는 母相粒內의 微視的 内部應力은 劈開크랙의 형성을 촉진시키고 破斷延性を 저하시키는 하나의 基本的 要因이 됨을 밝혔다.

4. 結 論

MEF 組織鋼에 있어서, 變形과정중 第二相 말덴사이트組織의 구속에 의해 생기는 페라이트粒內的 微視的 內部應力을 力學모델에 의해 이론적으로 평가하고, 이것과 破壞特性과의 관계에 대해서 定量的 檢討를 행하였다. 얻어진 결과를 요약하면

- 1) 內部應力은 強度比(第二相의 降伏強度에 대한 母相의 降伏強度) 및 第二相의 체적율에 의해 지배된다. 즉 強度比 및 체적율이 증가할 수록 塑性拘束效果는 현저하여 內部應力은 상승한다.
- 2) 이러한 內部應力은 外部應力과 함께 3軸應力 상태를 형성하여 母相粒內的 應力을 상승시키고, 劈開크랙의 형성을 촉진시켜 破斷延性的의 저하를 가져온다. 따라서,
- 3) 內部應力은 鋼의 微視 및 巨視破壞舉動의 차이를 가져오는 하나의 기본적 요인이 된다.

參 考 文 獻

- 1) Y. Tomita, K. Miyamoto and K. Okabayashi, The True Fracture Ductility of a 0.42%C-Ni-Cr-Mo Steel having Mixed Structure of Martensite and Bainite, J. Iron and Steel Inst of Japan, Vol. 64, No. 6, pp. 1379—1388, 1978
- 2) H. Ogiyama, H. Tsukuda and Y. Soyama, Tensile Properties and Fracture of Two Phase Iron Alloy of Austenite and Ferrite, Japan Soc. Material Sci., Vol. 27, No. 299, pp. 735—741, 1978
- 3) R.G. Davies, Influence of Martensite Composition and Content on the Properties of Dual Phase Steels, Met Trans., Vol. 9A, pp. 671—679, 1978
- 4) J.Y. Koo, M.J. Young and G. Thomas, On the Law of Mixtures in Dual-Phase Steels, Met Trans. A, Vol. 11A, pp. 852—854, 1980
- 5) T. Kunio et al, An Effect of the Second Phase Morphology on the Tensile Fracture Characteristic of Carbon, Steel, Eng. Fract. Mech. Vol. 7, pp. 411—417, 1975
- 6) H. Suzuki and A.J. McEvily, Microstructural Effects on Fatigue Crack Growth in a Low Carbon Steel, Met Trans. Vol. 10A, pp. 475—481, 1979
- 7) 金楨圭, 복합조직강의 파괴거동에 미치는 미시조직크기의 영향, 대한기계학회 논문집, Vol. 5, No. 3, pp. 223—229, 1981
- 8) T. Kunio, M. Shimizu and T. Nagasawa, Stable Crack Growth in the Two Phase Microstructure, Recent Research on Mechanical Behavior of Solid, Univ. Tokyo Press, pp. 315—325, 1979
- 9) J.K. Kim et al. The Effect of the Second Phase on Ductile-Brittle Transition Behavior of Carbon Steel with Martensitic-Ferritic Combined Microstructure, Trans Japan Soc of Mech Eng (A), Vol. 45, No. 393, pp. 415—422, 1979
- 10) J.K. Kim et al, Effect of Internal Stress on Fracture Behavior of Carbon Steel with Duplex Microstructure, Trans Japan Soc of Mech Eng (A), Vol. 46, No. 402, pp. 173—179, 1980
- 11) M.M. Hutchison, The Temperature Dependence of the Yield Stress of Polycrystalline Iron, Phil. Mag., Vol. 8, No. 121, pp. 121—127, 1963
- 12) J.K. Kim, M. Shimizu and T. Kunio, Effect of Constraint on Cleavage Crack Formation, Preprint of 57th Annual Meeting of JSME, No. 790—13, pp. 33—35, 1979
- 13) Y.C. Fung, Foundations of Solid Mechanics, Prentice-Hall, pp. 128—131, 1965
- 14) 13)의 문헌, pp. 244—245
- 15) 鶴戶口英善 外 2名, 材料力學, 裳華房, pp. 379, 1976

부 록

界面應力 p 의 계산법

$${}^{\beta}A_{\beta} + {}^{\alpha}A_{\alpha} = {}^{\beta}A_e \quad (1)$$

$$-P = {}^{\alpha}\sigma_z \pi R_1^2 + \int_{R_1}^{R_2} {}^{\beta}\sigma_z 2\pi r dr \quad (2)$$

그리고 ${}^{\alpha}A_{\beta}$, ${}^{\alpha}A_{\alpha}$ 및 ${}^{\beta}A_e$ 는 本文의 (1)式과 圓柱와 圓筒의 應力 및 變形率의 關係¹³⁾로부터

$${}^{\alpha}A_{\beta} = -R_1 \left\{ \epsilon_z - \frac{1}{E_{\alpha}} ({}^{\alpha}\sigma_z + 2\nu_{\alpha} p) \right\}$$

$${}^{\alpha}A_{\alpha} = \frac{2R_1}{E_{\alpha}} \{ -p - \nu_{\alpha} ({}^{\alpha}\sigma_z - p) \} \quad (3)$$

$${}^{\beta}A_e = \frac{2R_1}{E_{\beta}} \{ {}^{\beta}\sigma_{\theta} - \nu_{\beta} ({}^{\beta}\sigma_z + {}^{\beta}\sigma_r) \}$$

이다. 또한 圓柱의 垂方向 및 圓筒內에 생기는 各方向의 應力¹⁴⁾¹⁵⁾은

$${}^{\alpha}\sigma_z = -({}^{\alpha}\sigma_r + p) \quad (4)$$

$$\left. \begin{aligned} {}^{\beta}\sigma_z &= E_{\beta} \epsilon_z + \nu_{\beta} ({}^{\beta}\sigma_r + {}^{\beta}\sigma_{\theta}) \\ {}^{\beta}\sigma_{\theta} &= (R_2^2 + R_1^2) p / (R_2^2 - R_1^2) \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

$${}^{\beta}\sigma_r = -p$$

이다. 따라서 (3)式, (4)式 및 (5)式을 (1)式, (2)式

에 대입하고, 또한 $E_{\alpha} = E_{\beta} = E$, $\nu_{\alpha} = \nu_{\beta} = \nu$ 로 하여 p 에 대해서 풀면

$$p = \frac{1-2\nu}{5-4\nu} \left(\frac{P}{\pi R_2^2} - {}^{\alpha}\sigma_r \right) (= p_1) \quad (6)$$

그리고 이 때의 變形量 ϵ_z 는

$$\epsilon_z = -\frac{1}{E} \times \frac{\{ (5-4\nu) \left(\frac{R_2}{R_1} \right)^2 - (2\nu-1)^2 \} \sigma_{\alpha} - 4(1-\nu^2) {}^{\alpha}\sigma_r}{(5-4\nu) \left\{ \left(\frac{R_2}{R_1} \right)^2 - 1 \right\}} \quad (7)$$

한편 圓筒에 降伏이 막 시작할 경우, (5)式에서 ${}^{\beta}\sigma_z < {}^{\beta}\sigma_r < {}^{\beta}\sigma_{\theta}$ 의 關係가 있음으로 Tresca 의 항을 기준으로 부터

$${}^{\beta}\sigma_{\theta} = {}^{\beta}\sigma_r + {}^{\beta}\sigma_z \quad (8)$$

(8)式에 (5)式 및 (7)式을 대입하고, 또한 $E_{\alpha} = E_{\beta} = E$, $\nu_{\alpha} = \nu_{\beta} = \nu$ 로 하여 p 에 대하여 정리하면 圓筒에서 降伏이 시작할 때의 界面應力

$$p = \frac{(2\nu-1)}{6(\nu-1)} \left\{ 1 - \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^2 \right\} {}^{\alpha}\sigma_r \left\{ \left(\frac{{}^{\beta}\sigma_r}{{}^{\alpha}\sigma_r} - 1 \right) \right\} (= p_2) \quad (9)$$

이 얻어진다.