

<論 文>

熱平衡積分法에 의한 有限 Strip에서의 2次元  
過渡熱傳導 問題의 解析†

徐 廷 一\* · 趙 珍 鎬\* · 曹 鐘 徹\*\*

(1983年 7月 8日 接受)

**Analysis of Two-Dimensional Transient Heat Conduction Problems  
in a Finite Strip by the Heat Balance Integral Method**

J. I. Seoh, J. H. Cho and J. C. Jo

**Abstract**

This paper presents two methods of obtaining approximate analytic solutions for the temperature distributions and heat flow to two-dimensional transient heat conduction problems in a finite strip with constant thermal properties using the Heat Balance Integral. The methods introduced in this study are as follows; one using the Heat Balance Integral only, and the other successively using the Heat Balance Integral and an exact analytic method. Both methods are applicable to a large number of the two-dimensional unsteady conduction problems in finite regions such as extended surfaces with uniform thickness, but in this paper only solutions for the unsteady problems in a finite strip with boundary condition at the base expressed in terms of step function are provided as an illustration.

Results obtained by both methods are compared with those by the exact two-dimensional transient analysis. It is found that both approximate methods generate small time solutions, which can not be obtained easily by any exact analytic method for small values of Fourier numbers. In the case of applying the successive use of the Heat Balance Integral and Laplace transforms, the analysis shows good agreement with the exact solutions for any Fourier number in the range of Biot numbers less than 0.5.

記 號 說 明

$A, B, C$  :  $X$ 와  $\tau$ 의 函數

$a$  : 無次元 strip 半두께 ( $=b/L$ )

$B_i$  : Biot數 ( $=hL/k$ )

$b$  : Strip 半두께

$C_p$  : 定壓比熱

$F(T_0, t)$  : 임의의 함수

$f(\tau) = \{F(T_0, t) - T_\infty\} / (T_0 - T_\infty)$

$h$  : 對流熱傳達係數

$k$  : 熱傳導率

$L$  : Strip의 길이

$m = 3B_i/a(3+B_i a)$

$O$  : 좌표의 원점

$p = 3(2+B_i a)/2(3+B_i a)$

$Q$  : Strip 베이스에서의 放熱量

† 1983년도 熱 및 流體力學部門 學術講演會 및 論文發表會에서 發表

\* 正會員, 漢陽大學校 工科學 機械工學科

\*\* 正會員, 漢陽大學校 大學院 機械工學科

$Q^*$  : 無次元放熱量(= $Q/2kW(T_0-T_\infty)$ )

$T$  : 온도(= $T(x, y, t)$ )

$T_b$  : Strip 베이스에서의 온도

$T_0$  : 일정 온도

$T_\infty$  : 周圍流體의 溫度

$t$  : 時間

$$u = \int_0^\alpha \theta dY$$

$W$  : 巾幅

$X, Y$  : 無次元直交座標(= $x/L, =y/L$ )

$x, y$  : 直交座標

$\alpha$  : 熱擴散係數(= $k/\rho C_p$ )

$\delta$  : 熱浸透깊이(熱層)

$\theta$  : 無次元溫度(= $(T-T_\infty)/(T_0-T_\infty)$ )

$\lambda_n$  : 固有值

$\mu_n, \mu_n$  : 固有值

$\rho$  : 밀도

$\tau$  : 無次元時間(Fourier 數, = $at/L^2$ )

$\phi$  :  $X$ 와  $\tau$ 의 函數(= $A(X, \tau)\exp(m\tau)$ )

$\bar{\phi}$  :  $\phi$ 의 Laplace 變換形態(= $\int_0^\infty \phi \exp(-s\tau) d\tau$ )

## 1. 序 論

熱傳導 問題에 있어서 正確解析 解를 구하기 어렵거나 구할 수 없는 경우 또는 數值解析을 적용할 수 없는 경우에는 近似 解析의 解法이 매우 有用하다. 비록 數值解가 精當화 될 수 있는 경우라도 解析의 解는 數值解보다 주어진 問題에 관련된 각종 媒介變數들의 物理的 意義를 더 훌륭하게 나타내므로 熱傳導 問題를 풀기 위한 많은 近似 解析의 方法들이 開發되어 오고 있으며, 그 중에서도 熱平衡積分法(the Heat Balance Integral Method; 以後로는 HBIM으로 命名)은 대체로 간단하고 쉽게 適用할 수 있고 이 方法에 의한 解의 結果式은 계산시간이 짧을 뿐만 아니라 廣範圍한 問題들에 適用할 수 있기 때문에 매우 강력한 近似解法들중의 하나로 알려져 있다. 이러한 熱平衡積分法의 概念은 Von Kármán과 Pohlhausen<sup>1)</sup>이 粘性境界層 問題를 近似解析하기 위하여 처음으로 導入하였으며 Landahl은 生物物理學分野에서 擴散方程式을 푸는데 使用하였다<sup>2)</sup>. 또한 Merk는 이러한 接近法을 2次元定常狀態融解問題의 解析에 적용하였고<sup>3)</sup> Goodman<sup>3-5)</sup>은 1次元過渡熱擴散問題에 대한 解를 얻기 위하여 사용하였다. 그 후 많은 學者들에 의하여 廣範圍한 문제의 해석에 적용되어 왔으며<sup>6-8)</sup>, Sfeir<sup>9)</sup>가 그 理論을 擴張시켜서 몇가지 巾에서의 2次元 定常狀態 熱傳導問題의 解

析에 적용하였다. 그는 1次元 解析媒介變數를 簡單히 修正하므로써 얻어지는 微分方程式들이 1次元 解析에 의한 形態와 同一하기 때문에 橫斷溫度變化의 效果에 대한 補正을 할 수 있었으나 두께가 均一하지 않은 사다리꼴斷面直線巾에 대해서만은 만족할 만한 結果式을 얻지 못하고 數值解析으로 溫度分布를 구하였다. Burmeister<sup>10)</sup>는 이러한 理論을 3角形 巾에서의 2次元 定常狀態 熱傳導 問題에 적용하여 간단히 解析하였으나 1次元化된 常微分方程式의 解에 나타나는 未定常數決定에 있어서 假定한 溫度分布多項式을 滿足하는 새로운 形態의 修正境界條件<sup>11)</sup>을 사용하지 않았기 때문에 그 結果는 2次元 數值解와의 相對誤差가 크게 나타났다. Cho와 Jo<sup>12)</sup>는 사다리꼴斷面의 直線巾에서의 熱平衡積分法의 適用을 再考察하여 修正境界條件을 使用하므로써 溫度分布에 대한 完全한 近似 解析解를 구하였다. 또한 최근에는 溫度分布場의 境界一部分에서 條件이 주어지지 않는 半無限體와 같은 熱傳導媒體에서의 2次元 過渡熱傳導 問題를 解析하기 위하여 Yuen과 Wessel<sup>13)</sup>은 座標를 conformal transformation하므로써 1次元 問題에서와 같은 方法으로 熱層(thermal layer)의 概念을 導入하였다(여기서 熱層은 現象學的 거리로서 어떤 時間에 傳導媒體에서 熱이 浸透한 깊이를 말한다). 그러나 이러한 方法은 Yuen 등이 解析한 問題와 같이 境界條件이 단순한 直角 corner 같은 극소수의 한정된 溫度分布場 外에 幾何學的 形象이나 境界條件이 다른 경우에는 座標의 conformal transformation이나 그 逆變換이 어렵거나 불가능하여 적용할 수 없고 특히, 有限媒體에서는 適用方法의 再考察이 필요하다. 따라서 本 研究는 지금까지 研究된 熱平衡積分法의 理論을 基礎로 하여 均一두께를 갖는 有限體에서의 2次元 過渡熱傳導 問題解析을 위한 有用한 近似解法으로서 熱平衡積分法의 適用方法을 提示하고 그 적용방법들의 一般性和 有用성을 보이는데 目的을 둔다. 간단한 方法으로 理論을 提示하기 위하여 有限 strip에서 베이스溫度가 임의 時間에 베이스全表面에서 均一하게 주어지는 경우를 例로서 택하였으며, 특히 strip 베이스에서의 境界條件이 階段函數일 때에 대하여 過渡熱傳導解를 구하였다. 그리고 이렇게 구한 近似解析解들의 正確도와 有用성을 調查하기 위한 比較基準으로서 本 研究에서 2次元 正確解析 解도 구하였다.

## 2. 2次元 過渡熱傳導 問題의 設定

有限體에서의 2次元 過渡熱傳導 問題에 대한 熱平衡

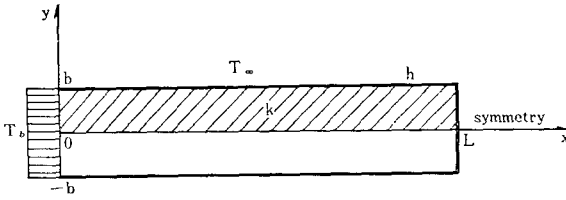


Fig. 1 Physical configuration of finite strip and related coordinate system

積分法の 適用方法에 關하여 一般性を 유지하면서도 가장 簡單한 方式으로 記述하기 爲하여 熱傳導媒體인 有限 strip의 物理的 形象과 關聯座標系 및 境界條件을 Fig. 1에 나타낸 바와 같이 選定하였으며 理論解析을 爲하여 다음과 같은 假定을 하였다.

- (1) Strip의 材質은 均質, 等方性이며 熱傳導率이 一定하고 內部熱源은 없다.
- (2) 對流熱傳達係數는 strip 全表面에 걸쳐 均一하며 一定하다.
- (3) 周圍流體의 定壓比熱과 溫度는 均一, 一定하다.
- (4) Strip 全體의 初期溫度는 周圍溫度와 같다.
- (5) Strip에서의 熱流動은 2次元的이며 輻射熱傳達은 無視한다.

Fig. 1에 나타낸 strip은 x軸에 關하여 대칭이므로 x軸 위의 上半部만 고려하기로 한다. 以上에서 設定된 2次元 過渡熱傳導 問題는 아래와 같이 溫度  $T(x, y, t)$ 에 대한 微分方程式과 初期 및 境界條件으로 表示될 수 있다.

微分方程式

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (1a)$$

$t > 0; 0 < x < L; 0 \leq y < b$

初期 및 境界條件

$$T = T_\infty, t = 0; 0 \leq x \leq L; 0 \leq y \leq b \quad (1b)$$

$$T = F(T_0, t), t > 0; x = 0; 0 \leq y \leq b \quad (1c)$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = -\frac{h}{k}(T - T_\infty), t > 0; x = L; 0 \leq y \leq b \quad (1d)$$

$$\frac{\partial T}{\partial y} = 0, t > 0; y = 0; 0 \leq x \leq L \quad (1e)$$

$$\frac{\partial T}{\partial y} = -\frac{h}{k}(T - T_\infty), t > 0; y = b; 0 \leq x \leq L \quad (1f)$$

여기서  $\alpha \equiv k/\rho C_p$ 는 熱擴散係數이며  $F(T_0, t)$ 는 入口의 基準溫度  $T_0$ 와 時間  $t$ 의 函數로서 strip 베이스에서의 境界條件으로 주어지는 溫度이다.

이때 無次元變數들,  $X = x/L, Y = y/L, a = b/L, \theta = (T - T_\infty)/(T_0 - T_\infty), \tau = \alpha t/L^2, B_1 = hL/k, f(\tau) =$

$\{F(T_0, t) - T_\infty\}/(T_0 - T_\infty)$ 을 導入하므로써 式 (1)을 無次元化하여 다시 쓰면 다음과 같다.

微分方程式

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} = \frac{\partial \theta}{\partial \tau}, \tau > 0; 0 < X < 1; 0 \leq Y < a \quad (2a)$$

初期 및 境界條件

$$\theta = 0, \tau = 0; 0 \leq X \leq 1; 0 \leq Y \leq a \quad (2b)$$

$$\theta = f(\tau), \tau > 0; X = 0; 0 \leq Y \leq a \quad (2c)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial X} = -B_1 \theta, \tau > 0; X = 1; 0 \leq Y \leq a \quad (2d)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial Y} = 0, \tau > 0; Y = 0; 0 \leq X \leq 1 \quad (2e)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial Y} = -B_1 \theta, \tau > 0; Y = a; 0 \leq X \leq 1 \quad (2f)$$

### 3. 熱平衡積分법에 의한 解析

入口의 時間에 strip 內部에서 熱이 베이스로부터 傳導되는 X軸方向의 깊이 즉, 熱層  $\delta$ 는 均一한 베이스 溫度로 인하여 無次元座標 Y에 대해서는 獨立의이고 無次元時間(Fourier 數)에만 從屬인 函數  $\delta \equiv \delta(\tau)$ 로 假定할 수 있으며, 對流熱傳達이 일어나는 境界條件들에 의하여 熱層 內部의 어떤 고정된 X座標에 대한 溫度分布는 Y座標에 따르는 勾配를 가질 것이다. 따라서 strip에서의 橫斷溫度變化를 쉽게 계산하기 爲하여 無次元 空間座標 Y에 關한 偏微分項을 Y에 대한 적분으로 제거하기로 한다. 이러한 目的에 따라 strip에서의 近似溫度分布를 Y에 關한 多項式으로 나타내면

$$\theta(X, Y, \tau) = A(X, \tau) + B(X, \tau)Y + C(X, \tau)Y^2 \quad (3)$$

式 (3)에 境界條件(2e)와 (2f)를 적용하여 계수  $B(X, \tau)$ 와  $C(X, \tau)$ 를  $A(X, \tau)$ 의 項으로 표시하면 가정된 온도분포  $\theta(X, Y, \tau)$ 는

$$\theta(X, Y, \tau) = A(X, \tau) \{1 - B_1 Y^2/a(2 + B_1 a)\} \quad (4)$$

微分方程式(1)을  $Y=0$ 에서  $Y=a$ 까지 적분한 다음 경계조건(2e)와 (2f)를 적용하고  $u = \int_0^a \theta dY$ 를 定義하면

$$\frac{\partial^2 A(X, \tau)}{\partial X^2} - mA(X, \tau) = \frac{\partial A(X, \tau)}{\partial \tau} \quad (5)$$

여기서  $u = aA(X, \tau)/p, p = 3(2 + B_1 a)/2(3 + B_1 a), m = 3B_1/a(3 + B_1 a)$

다시 式 (5)를 간단한 형태로 만들기 爲하여  $A(X, \tau) = \exp(-m\tau)\phi(X, \tau)$ 를 대입하면 다음과 같은 가장 간단한 형태의 1次元 過渡熱流動 方程式으로 變換된다.

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial X^2} = \frac{\partial \phi}{\partial \tau}, \tau > 0; 0 < X < 1 \quad (6a)$$

이 微分方程式을 풀기 爲해서는 초기조건과  $X=0$  및

$X=1$ 에서의 경계조건을 사용하여야 한다. 그러나 그러한 조건들은 實際의 解에 의해서만 滿足되므로 式(6a)를 풀기 위해서는 多項近似式(3)에 矛盾이 없는 새로운 형태의 조건들이 필요하다. 따라서 修正된 조건들을 구하여 앞에서와 같이  $A(X, \tau) = \exp(-m\tau)\phi(X, \tau)$ 에 의한 變換을 하면 다음과 같다.

$$\phi=0, \tau=0; 0 \leq X \leq 1 \quad (6b)$$

$$\phi = pf(\tau)\exp(m\tau), \tau > 0; X=0 \quad (6c)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial X} = -B_i \phi, \tau > 0; X=1 \quad (6d)$$

式(6)은 有限領域에서의 1次元 過渡熱傳導 問題와 同一하므로 여러가지 方法으로 解析할 수 있으며 쉽게 解를 구할 수 있다. 正確解析法들 중에서 過渡熱傳導 問題에 有用한 方法으로 Laplace 變換을 사용하는 것이 편리하므로 현재 고려중인 문제는 Laplace 變換을 사용하여 바로 解析하면 된다. 그러나 3각형 핀과 사다리꼴 핀등과 같은 不均一두께를 갖는 有限體에 대한 경우 또는, 非線型 問題의 경우에는 正確解를 구하기가 어려우므로 近似解析을 하여야 한다. 따라서 本 研究에서는 熱平衡積分과 Laplace 變換을 사용하는 두 方法으로 式(6)을 解析하였다.

本 研究의 目的은 熱平衡積分法의 適用方法에 關한 것이므로 더 간단히 解析하기 위하여 한가지 例로서, strip 베이스온도가 階段函數일 때를 택하였다. 이 경우에 베이스온도  $T = F(T_0, \tau)$ 를  $T_0$ 라고 하면  $f(\tau) = 1$ 이 되므로 베이스에서의 境界條件(6c)는 다음과 같이 된다.

$$\phi = p \exp(m\tau), \tau > 0; X=0 \quad (7)$$

### 3.1. 熱平衡積分法에 의한 解析

有限領域에서의 1次元 過渡熱傳導 問題는 熱層  $\delta(\tau)$ 가 무차원 strip 길이보다 작을 때(즉,  $0 \leq \delta < 1$ 인 경우)와 클 때(즉,  $1 \leq \delta$ 인 경우)인 두 단계로 나누어 해석하여야 한다<sup>2)</sup>.

(1) 제 1 단계 ( $0 \leq \delta < 1$  일 때)

Strip의 tip( $X=1$ )의 境界條件이 斷熱狀態일 때는 半無限領域에 대한 解析方法과 同一하지만 현재의 문제에서는 對流熱傳達境界로 주어져 있으므로 多項近似式의 常數決定에서 고려에 넣어야 한다. 따라서  $\phi(X, \tau)$ 에 대하여 다음과 같이 4次 多項近似式으로 나타내었다.

$$\phi(X, \tau) = C_1(\tau) + C_2(\tau)X + C_3(\tau)X^2 + C_4(\tau)X^3 + C_5(\tau)X^4, \tau > 0; 0 \leq X \leq \delta(\tau) \quad (8)$$

式(8)에서 5개의 상수를 결정하기 위하여 다음과 같

은 5개의 조건을 導出하였다.

$$\left. \begin{aligned} \phi \Big|_{x=0} &= p \exp(m\tau), \phi \Big|_{x=\delta} = 0, \frac{\partial \phi}{\partial X} \Big|_{x=\delta} = 0 \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial X^2} \Big|_{x=0} &= \frac{\partial \phi}{\partial \tau} \Big|_{x=0} \quad (\tau > 0) \\ \frac{\partial \phi}{\partial X} \Big|_{x=\delta-1} &= -B_i \phi \Big|_{x=\delta-1} \end{aligned} \right\} (9)$$

式(9)에 의하여 결정되는 式(8)의 상수들은  $\delta(\tau)$ 의 函數로 표시되므로  $\delta(\tau)$ 를 구하기 위한 식을 誘導하여야 한다. 따라서 式(6a)를  $X=0$ 에서  $X=\delta(\tau)$ 까지  $X$ 에 관하여 적분하고 조건(9)의 두번째와 세번째 식인 熱層의 定義에 의한 관계를 대입하므로써 얻어지는 다음 式(10)으로부터 구한다.

$$-\frac{\partial \phi}{\partial X} \Big|_{x=0} = \frac{d}{d\tau} \int_{x=0}^{\delta(\tau)} \phi dX \quad (10)$$

(2) 제 2 단계 ( $1 \leq \delta$  일 때)

$\delta=1$ 이 될 때의  $\tau$ 를  $\tau_1$ 이라고 하면  $\tau > \tau_1$ 인 時間領域에 대해서는 熱層의 概念이 物理的 意味를 갖지 못하므로 이 경우의 해석을 위하여  $\phi(X, \tau)$ 를 다시 3次 多項近似式으로 가정하여 다음과 같이 표시하기로 한다.

$$\phi(X, \tau) = C_1'(\tau) + C_2'(\tau)X + C_3'(\tau)X^2 + C_4'(\tau)X^3, \tau \geq \tau_1; 0 \leq X \leq 1 \quad (11)$$

式(11)에서 4개의 상수결정을 위하여는 다음과 같은 4개의 독립관계를 갖는 條件이 필요하다.

$$\left. \begin{aligned} \phi \Big|_{x=0} &= p \exp(m\tau), \frac{\partial \phi}{\partial X} \Big|_{x=1} = -B_i \phi \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial X^2} \Big|_{x=0} &= p m \exp(m\tau) \\ -\frac{\partial \phi}{\partial X} \Big|_{x=0} &= \frac{d}{d\tau} \int_{x=0}^1 \phi dX \end{aligned} \right\} (12)$$

式(11)과 (12)로부터 쉽게 解를 구할 수 있다.

### 3.2. Laplace 變換에 의한 解析

微分方程式(6a)와 初期 및 境界條件式(6b), (6d) 및 (7)을 Laplace 變換하면 다음과 같다.

微分方程式

$$\frac{\partial^2 \bar{\phi}(X, s)}{\partial X^2} = s \bar{\phi}(X, s) - \phi(X, 0) \quad (13)$$

初期 및 境界條件

$$\left. \begin{aligned} \bar{\phi}(X, s) \Big|_{\tau=0} &= 0 \\ \bar{\phi}(X, s) \Big|_{x=0} &= \frac{p}{s-m} \\ \frac{\partial \bar{\phi}(X, s)}{\partial X} \Big|_{x=1} &= -B_i \bar{\phi}(X, s) \Big|_{x=1} \end{aligned} \right\} (14)$$

조건(14)에 의하여 式(13)의 解는 바로 얻어지며 그

解는 Laplace 變換된 形態이므로 다시 Cauchy's residue theorem 을 적용하면 쉽게 逆變換되어  $\phi(X, \tau)$ 를 구할 수 있게 된다.

以上과 같은 方法들로 얻어진  $\phi(X, \tau)$ 를  $A(X, \tau)$ 의 項으로 逆變換하여 式 (4)에 대입하면 近似溫度分布  $\theta(X, Y, \tau)$ 가 구하여진다. 또한 이 近似溫度分布로부터 strip 폭  $W$ 에 대한 strip 베이스에서의 無次元 放熱量  $Q^*$ 를 다음과 같이 定義하여 구하였다.

$$Q^* = \frac{Q}{2kW(T_0 - T_\infty)} = - \int_0^a \frac{\partial \theta}{\partial X} \Big|_{x=0} dY \quad (15)$$

#### 4. 解析例의 結果 및 討論

均一두께를 갖는 有限 strip에서 strip의 베이스溫度가 階段函數( $t > 0$  일 때,  $T_b = T_0$ )로 주어지는 경우에 앞의 3절에서 제시한 두가지 方法 즉, 熱平衡 積分法의 연속사용에 의한 方法 및 熱平衡 積分法과 Laplace 變換의 연속사용에 의한 方法(以後로는 各各 “HBIM-HBIM 方法”과 “HBIM-LAPLACE 方法”으로 命名함)을 적용하여 구한 無次元의 溫度分布와 放熱量은 다음과 같다.

##### 4.1. HBIM-HBIM 方法에 의한 解析結果

(1)  $0 \leq \delta < 1$  일 때 (즉,  $\tau < \tau_1$  인 경우)

$$\theta(X, Y, \tau) = p \left( 1 - \frac{D_1(\delta)}{E(\delta)} X + \frac{m}{2} X^2 + \frac{D_2(\delta)}{E(\delta)} X^3 - \frac{D_3(\delta)}{E(\delta)} X^4 \right) \left\{ 1 - \frac{B_i}{a(2+B_i a)} Y^2 \right\}, \quad 0 \leq X < \delta(\tau) \quad (16)$$

$$Q^* = \frac{aD_1(\delta)}{E(\delta)}, \quad 0 \leq \delta(\tau) < 1 \quad (17)$$

여기서

$$\begin{aligned} D_1(\delta) &= \frac{3(B_i+4)}{2\delta} - 2(B_i+3) + \frac{m}{4}(B_i+4)\delta \\ &\quad - \frac{m}{2}(B_i+3)\delta^2 + \frac{1}{2} \left\{ B_i + \frac{m}{2}(B_i+2) \right\} \delta^3 \\ D_2(\delta) &= \frac{B_i+4}{2\delta^3} - \frac{m(B_i+4)}{4\delta} - 2(B_i+1) + \frac{3}{2} \\ &\quad \left\{ B_i + \frac{m}{2}(B_i+2) \right\} \delta - \frac{m}{2}(B_i+1)\delta^2 \\ D_3(\delta) &= \frac{B_i+3}{2\delta^3} - \frac{6(B_i+1)+m(B_i+3)}{4\delta} \\ &\quad + \left\{ B_i + \frac{m}{2}(B_i+2) \right\} - \frac{m}{4}(B_i+1)\delta \\ E(\delta) &= (B_i+4) - \frac{3}{2}(B_i+3)\delta + \frac{1}{2}(B_i+1)\delta^3 \end{aligned} \quad (18)$$

또한  $\delta(\tau)$ 는 式 (10)으로부터 誘導되는 다음에 나타낸

관계에 의하여 구하여 진다.

$$\tau = p \int_0^{\delta} \frac{F(\delta)}{\delta D_1(\delta)} d\delta \quad (19)$$

여기서

$$\begin{aligned} F(\delta) &= \frac{15}{2}(B_i+4)\delta - 24(B_i+3)\delta^2 - \frac{5}{4}m(B_i+4)\delta^3 \\ &\quad + 4 \left\{ 6(B_i+1) + m(B_i+3) \right\} \delta^4 - \frac{15}{2} B_i \\ &\quad + \frac{m}{2}(B_i+2) \delta^5 + m(B_i+1)\delta^6 \end{aligned} \quad (20)$$

그리고  $\tau_1$ 은 열층  $\delta$ 가 strip의 先端에 도달하는데 걸리는 無次元時間을 表記하므로 위 式에서  $\delta=1$ 일 때의  $\tau$ 값이다.

(2)  $\delta \geq 1$  일 때 (즉,  $\tau \geq \tau_1$  인 경우)

$$\begin{aligned} \theta(X, Y, \tau) &= \left[ p + G(\tau)X + \frac{1}{2}mpX^2 - \frac{1}{3+B_i} \cdot \right. \\ &\quad \cdot \left. \left\{ (1+B_i)G(\tau) + p \left\{ B_i + \frac{m(2+B_i)}{2} \right\} \right\} X^3 \right] \cdot \\ &\quad \cdot \left[ 1 - \frac{B_i}{a(2+B_i a)} Y^2 \right], \quad 0 \leq X \leq 1; \tau \geq \tau_1 \end{aligned} \quad (21)$$

$$Q^* = -\frac{a}{p} G(\tau), \quad \tau \geq \tau_1 \quad (22)$$

여기서

$$\begin{aligned} G(\tau) &= M - (M+N) \exp \left\{ \left\{ m + \frac{4(3+B_i)}{5+B_i} \right\} (\tau_1 - \tau) \right\} \\ M &= \frac{-mp(5+B_i)^2(72+18B_i+6m+mB_i)}{24(3+B_i)\{m(5+B_i)+4(3+B_i)\}} \\ N &= \frac{p}{4}(6+4B_i+5m+2mB_i) \end{aligned} \quad (23)$$

통상적인 數值解法에 의하여 式 (19)을 쉽게 계산할 수 있으므로 작은 시간범위의 解에 해당하는 式 (16)과 (17)은 매우 간단한 형태를 가지고 있으며 계산시간이 상당히 작은 장점을 갖는다. 또한 큰 시간범위의 解로 看做할 수 있는 式 (21)과 (22)도 역시 매우 간단한 형태로서 작은 시간해를 나타내고 있으며 특히 Fourier 數  $\tau$ 가 무한대로 접근함에 따라서  $G(\tau)$ 는  $M$ 으로 접근되므로 無次元 溫度分布  $\theta$ 와 無次元 放熱量  $Q^*$ 는 定常狀態解의 형태를 가지게 될을 쉽게 알 수 있다.

##### 4.2. HBIM-LAPLACE 方法에 의한 解析結果

$$\begin{aligned} \theta(X, Y, \tau) &= p \left[ \frac{\sqrt{m} \cosh \{ \sqrt{m}(1-X) \} + B_i \sinh \{ \sqrt{m}(1-X) \}}{\sqrt{m} \cosh \sqrt{m} + B_i \sinh \sqrt{m}} \right. \\ &\quad \left. - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_n (\mu_n^2 + B_i^2) \exp \{ -\tau(m + \mu_n^2) \} \sin(\mu_n X)}{(m + \mu_n^2)(\mu_n^2 + B_i^2 + B_i)} \right] \left[ \right. \\ &\quad \left. 1 - \frac{B_i}{a(2+B_i a)} Y^2 \right], \quad 0 \leq X \leq 1; 0 \leq Y \leq a; \tau > 0 \end{aligned} \quad (24)$$

$$Q^* = \sqrt{ma} \left[ \frac{\sqrt{m} \sinh \sqrt{m} + B_i \cosh \sqrt{m}}{\sqrt{m} \cosh \sqrt{m} + B_i \sinh \sqrt{m}} \right] + 2a \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_n^2 (\mu_n^2 + B_i^2) \exp\{-\tau(m + \mu_n^2)\}}{(m + \mu_n^2)(\mu_n^2 + B_i^2 + B_i)}, \quad \tau > 0 \quad (25)$$

여기서  $\mu_n$  은 다음 transcendental equation의 陽의 根들이다.

$$\mu_n \cot \mu_n = -B_i, \quad n=1, 2, 3, \dots \quad (26)$$

溫度分布에 대한 表示式 (24)에서 strip의 길이 方向의 中心部인  $Y=0$ 에서와 表面인  $Y=a$ 에서의 溫度分布는  $B_i a$  값이 零에 가까우면 (즉, 固定된  $a$  값에 대하여 매우 작은 對流熱傳達係數  $h$  값에 의하여 Biot數가 零에 가까운 경우) 서로 같아져서 포물선 형상의 橫斷溫度勾酒가 直線으로 된다. 이때 式 (24)와 (25)에 나타나 있는 媒介變數들은

$$p = \frac{3(2+B_i a)}{2(3+B_i a)} \approx 1$$

$$m = \frac{3B_i}{a(3+B_i a)} \approx \frac{B_i}{a}$$

으로 표시될 수 있으며, 無次元 溫度分布와 無次元 放熱量의 表示式들은 1次元 問題에 대한 正確解析結果들과 同一한 形態가 된다. 그러나 Biot數가 커질 때는  $B_i a$  값이 媒介變數  $p$ 와  $m$ 에 미치는 影響이 增加하여 strip의 中心과 表面에 걸친 橫斷溫度勾配가 커지고 放熱量의 增加를 일으키게 됨을 알 수 있다. 이 경우에는 1次元 解析結果와 크게 偏倚하게 된다. 또한 式 (24)와 (25)는 定常狀態의 경우에 대한 解인 定常項( $\tau$ 에 독립인 項)과 非定常項의 線型 疊으로 이루어져 있으며 이와 같은 형태는 1次元이나 2次元의 正確解들과 同一하며, 本 研究에서 2次元의 正確解析으로 구한 結果式들은 다음과 같다.

$$\theta(X, Y, \tau) = 2B_i \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{\lambda_n \cosh\{\lambda_n(1-X)\} + B_i \sinh\{\lambda_n(1-X)\}}{[a(\lambda_n^2 + B_i^2) + B_i] \{\lambda_n \cosh \lambda_n + B_i \sinh \lambda_n\}} \cdot \frac{\cos(\lambda_n Y)}{\cos(\lambda_n a)} \right] - 4B_i \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left[ \frac{\mu_m (\mu_m^2 + B_i^2)}{[a(\lambda_n^2 + B_i^2) + B_i]} \cdot \frac{\exp\{-\tau(\lambda_n^2 + \mu_m^2)\} \sin(\mu_m X) \cos(\lambda_n Y)}{(\lambda_n^2 + \mu_m^2)(\mu_m^2 + B_i^2 + B_i) \cos(\lambda_n a)} \right], \quad 0 \leq X \leq 1; 0 \leq Y \leq a; \tau > 0 \quad (27)$$

$$Q^* = 2B_i^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n \sinh \lambda_n + B_i \cosh \lambda_n}{\lambda_n [a(\lambda_n^2 + B_i^2) + B_i] \{\lambda_n \cosh \lambda_n + B_i \sinh \lambda_n\}} + 4B_i^2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left[ \frac{\mu_m^2 (\mu_m^2 + B_i^2)}{\lambda_n^2 [a(\lambda_n^2 + B_i^2) + B_i]} \cdot \frac{\exp\{-\tau(\lambda_n^2 + \mu_m^2)\}}{[\lambda_n^2 + \mu_m^2] (\mu_m^2 + B_i^2 + B_i)} \right], \quad \tau > 0 \quad (28)$$

여기서  $\lambda_n$ 과  $\mu_m$ 은 각각 다음 transcendental equations의 陽의 根들이다.

$$\left. \begin{aligned} \lambda_n \tan \lambda_n a &= B_i, \quad n=1, 2, 3, \dots \\ \mu_m \cot \mu_m &= -B_i, \quad m=1, 2, 3, \dots \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

으로서 HBIM-LAPLACE 方法에 의한 解析結果인 式 (25)와 (26)의 형태보다 한 단계 더 많은 級數形態를 가지므로 상대적으로 큰 時間解를 나타내며 특히, 非定常項은 2重級數 展開形態이므로 작은 時間領域에서는 收斂速度가 매우 느려서 계산시간이 많이 요구된다. 式 (25), (26)은 式 (27), (28)과 마찬가지로  $\tau$ 가 무한대로 접근하는 경우에는 文獻(11)에서와 같이 定常狀態의 解로 된다.

本 研究에서 提示된 두 解析方法에 의하여 구한 有限 strip에서의 無次元 溫度分布와 無次元 放熱量에 대한 解를 2次元 正確解와 比較해 보면 定性的으로는 모두 잘 일치하고 있음을 알 수 있다.

그러나 定量的인 性質을 살펴 보면  $a$ 와  $B_i$ 가 一定할 때, HBIM-HBIM에 의한 解의 2次元 正確解에 대한 相對誤差는 Fourier數가 增加함에 따라서  $B_i \leq 0.1$ 에서 增加하고  $B_i \geq 1.0$ 에서는 減少하였으며 HBIM-LAPLACE 方法의 경우에는 增加하였다. 또한 두 近似解法 모두 다 Biot數의 增加에 따라서 相對誤差도 커졌다.  $a$  값이 增加함에 따라서 HBIM-HBIM에 의한 解의 相對誤差는 큰 影響을 받지 않지만 HBIM-LAPLACE 方法에 의한 解의 相對誤差는 增大된다.

一般的으로 HBIM-HBIM에 의한 解는 큰 Fourier數(定常狀態時間領域)에 대해서는 誤差가 매우 커서 믿을 수 없으므로 過渡時間領域인 작은 Fourier數에 대해서만 有用할 것으로 생각된다. 그러나 거의 모든 경우에서 HBIM-LAPLACE 方法에 의한 解析結果가 HBIM-HBIM 方法에 의한 것보다 相對誤差가 훨씬 작은 값을 나타내었으며,  $a \leq 0.1$ 인 경우에 있어서 Fourier數가 큰 범위에서  $B_i \leq 10$ 일 때는 2次元의 正確解析結果와 거의 일치하였고  $a \leq 0.1$ 인 경우에  $B_i \leq 0.5$ 일 때는 이 HBIM-LAPLACE 方法에 의한 解의 相對誤差는 모든 값의 Fourier數에 대하여 工學的 許容誤差限界로 看做할 수 있는 約 5% 以內에 드는 값이었다.

計算結果의 한 例로서  $a=0.1$ 인 경우에  $B_i=0.01$ ,  $B_i=0.1$  및  $B_i=1.0$ 일 때 몇가지 Fourier數에 대하여 두 近似解法과 正確解法으로 구한 strip 表面溫度分布를 Fig. 2~Fig. 4에 나타내었다.

HBIM-HBIM 方法에 의한 解析結果가 本 研究에서는 만족스럽지 못하였으나 HBIM-LAPLACE 方法으로 解析하기 어려운 問題들에도 有效하게 適用될 수 있는 可

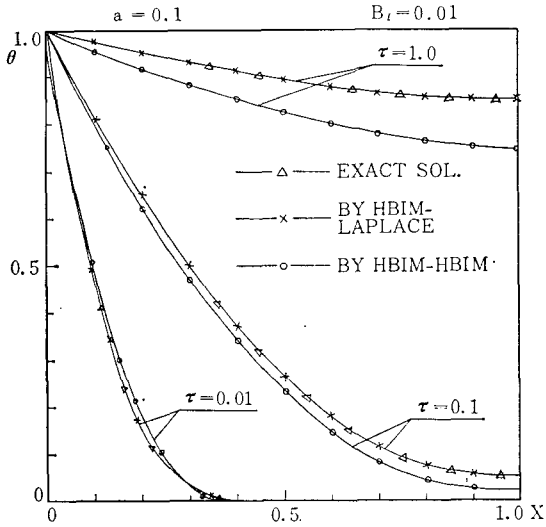


Fig. 2 Comparison of surface temperature distributions generated by the HBIM-HBIM, the HBIM-LAPLACE and the exact method for the finite strip when the Biot number is 0.01

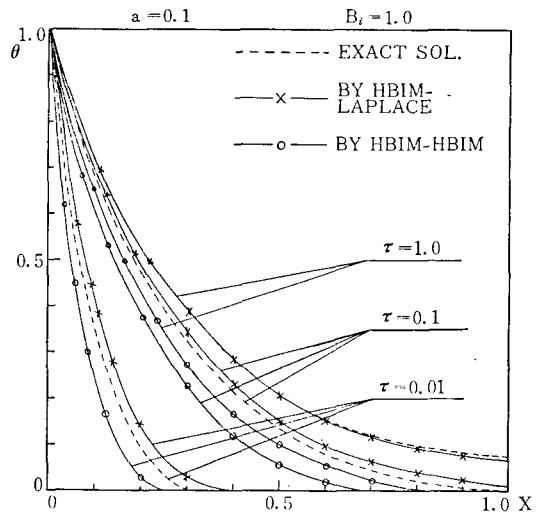


Fig. 4 Comparison of surface temperature distributions generated by the HBIM-HBIM, the HBIM-LAPLACE and the exact method for the finite strip when the Biot number is 1.0

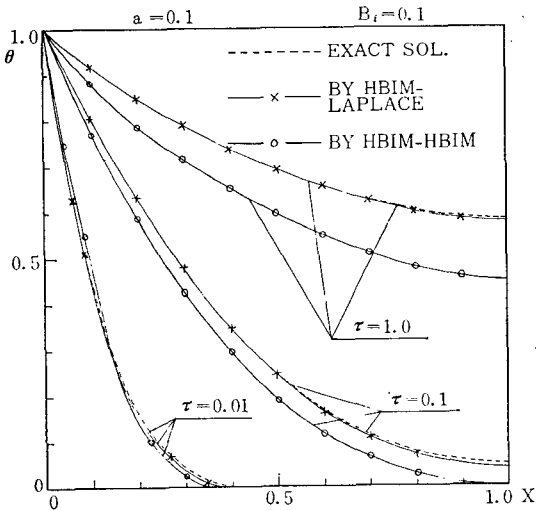


Fig. 3 Comparison of surface temperature distributions generated by the HBIM-HBIM, the HBIM-LAPLACE and the exact method for the finite strip when the Biot number is 0.1

### 5. 結 論

熱平衡積分法에 의한 有限 strip에서의 2次元 過渡熱傳導 問題의 解析方法에 關하여 研究한 結果 다음과 같은 結論을 얻었다.

(1) 有限熱傳導媒體에서의 2次元 過渡熱傳導 問題를 熱平衡 積分法에 의하여 近似解析할 수 있는 두가지 方法을 提示하였다.

(2) HBIM-HBIM 方法과 HBIM-LAPLACE 方法에 의하여 均一두께를 갖는 有限 strip에서의 2次元 過渡熱傳導 問題를 解析하므로써 溫度分布과 放熱量을 적은 時間에 計算할 수 있는 近似解析解를 구하였다.

(3) 均一두께의 有限 strip에 있어서의 HBIM-HBIM 方法은 작은 Biot 數와 Fourier 數를 제외한 경우에는 2次元 正確解析法에 대한 結果의 相對誤差가 상당히 크게 나타난 반면에 HBIM-LAPLACE 方法에 의한 結果는 Biot 數가  $a \leq 0.1$  일 때, 0.5 보다 작은 범위에서는 모든 Fourier 數에 대하여 거의 正確解析結果와 일치 하였다.

(4) 正確解를 구하기 어렵거나 不可能한 均一두께의 有限體에서의 2次元 過渡熱傳導 問題의 解析에 있어서도 本 研究에서 提示한 두 解析方法이 有用할 것으로 사료된다.

能性이 있다고 생각되므로 相對誤차를 줄이기 위하여 溫度分布에 대한 假定式인 近似多項式의 適合한 形態를 開發하는 것과 解析을 보다 더 간단하게 할 수 있게끔 어떤 假定을 導入하여 解析方向을 修正해 나가는 것에 대한 研究가 이루어져야 할 것이다.

## 後記

본 연구는 1983년도 한국과학재단의 연구비지원에 의하여 수행되고 있는 연구과제의 일부임을 밝혀 두며 동재 단축에 謝意를 표한다.

## 參 考 文 獻

- 1) H. Schlichting, Boundary Layer Theory, Chap. 13, p. 144, Sixth ed., McGraw Hill, New York, 1968.
- 2) M.N. Özışik, Heat Conduction, Chap. 9, pp. 335-358, Wiley-Interscience, 1980.
- 3) T.R. Goodman, "The Heat-Balance Integral and Its Application to Problems Involving a Change of Phase," Trans. ASME, Vol. 80, pp. 335-342, 1958.
- 4) T.R. Goodman, "The Heat Balance Integral-Further Considerations and Refinements, J. Heat Transfer 83C, pp. 83~86, 1961.
- 5) T.R. Goodman, Advances in Heat Transfer, Vol. 1, pp. 52~120, Academic Press, New York, 1964.
- 6) G. Poots, "On the Application of Integral Methods to the Solution of Problems Involving the Solidification of Liquids Initially at Fusion Temperature, Int. J. Heat Mass Transfer 5, pp. 525~531, 1962.
- 7) A.W.D. Hills, "A Generalized Integral-Profile Method for Analysis of Unidirectional Heat Flow During Solidification," Trans. Metall. Soc. A.I.M.E. 245, pp. 1471-1479, 1969.
- 8) D. Lanford, "The Heat Balance Integral Method", Int. J. Heat and Mass Transfer, Vol. 16, pp. 2424-2428, 1973.
- 9) A.A. Sfeir, "The Heat Balance Integral in Steady-State Conduction", J. Heat Transfer, Trans. ASME, Vol. 98, pp. 466~470, 1976.
- 10) L.C. Burmeister, "Triangular Fin Performance by the Heat Balance Integral Method", J. Heat Transfer, Trans. ASME, Vol. 101, pp. 562~564, 1979.
- 11) J.C. Jo, "A Study on the Heat Transfer in a Straight Fin of Rectangular Profile", M.S. Thesis, Hanyang Univ., 1980.
- 12) J.C. Jo and J.H. Cho, "Heat Transfer Analysis in a Straight Fin of Trapezoidal Profile by the Heat Balance Integral Method", Journal of the S.A.R.E.K., Vol. 11-3, pp. 1-8, 1982.
- 13) W.W. Yuen and R.A. Wessel, "Application of the Integral Method to Two-Dimensional Transient Heat Conduction Problems", J. Heat Transfer, Trans. ASME, Vol. 103, pp. 397-399, 1981.
- 14) V.S. Arpaci, Conduction Heat Transfer, Chap. 7, pp. 336-424, Addison-Welsey, 1966.
- 15) F.B. Hilderbrand, Advanced Calculus for Applications, Prentice-Hall, 1948. Prentice-Hall, 1948.
- 16) J. Crank, The Mathematics of Diffusion, Chap. 4, pp. 47-68, Second ed., Oxford Univ. Press, 1975.