

<論 文>

粘度가 相異한 流體境界面 근처에서 圓柱주위의
二次元 低速流動의 解析†

吳 世 勳* · 姜 信 榮**

(1983年 3月 11日 接受)

Slow Motion of a Circular Cylinder Near the Plane Interface
of Viscous Fluids

Se-Hoon Oh and Shin-Hyoung Kang

Abstract

When a circular cylinder near the plane fluid-interface of different viscosities is in parallel and normal motion, solutions of the Oseen equation are obtained. Classical image method with Faxen's integral form is used to satisfy the boundary conditions on the plane interface.

Coefficients of drag and lift increase as a cylinder approaches to the interface. But drag-coefficients of parallel motions with viscosity-ratio less than unity are decreased slightly. They show monotonic increase with Reynolds number in case of parallel motion, but minimum values of drag coefficients in normal motion are appeared. On the other hand Stokes' solution are obtained by taking limits of low Reynolds number except the case of parallel motion with viscosity-ratio not equal to infinity.

記 號 說 明

- a : 실린더 반경
- b : 실린더 중심과 벽면과의 거리
- D : 실린더에 걸리는 항력
- k : $u_0/2\nu$
- L : 실린더에 걸리는 양력
- R_0 : 레이놀즈수 $\left(\frac{u_0 a}{\mu_1}\right)$
- r_0 : 점성비 (μ_2/μ_1)

- u_0 : 실린더 중심의 속도
- u, v : 무한 유체내에서의 x, y -방향 속도성분
- u^*, v^* : 유체 1에서의 image x, y -방향 속도성분
- \hat{u}, \hat{v} : 유체 2에서의 x, y -방향 속도성분
- w : 무한 유체내에서의 공액복소 속도
- w^* : 1차 image의 공액복소 속도
- μ_1, μ_2 : 유체 1, 2에서의 점성계수
- ν : 동점성계수
- Ψ, ψ : 유선함수
- ρ : 밀도
- σ : 표면장력
- κ : 곡률
- γ : 오일러 상수(Euler's constant)

† 1982년도 대한기계학회 추계 학술대회(82. 11. 20)에서 발표

* 정회원, 서울대학교 대학원

** 정회원, 서울대학교 기계공학과

- $J_n(x)$: Bessel functions of the first kind
- $Y_n(x)$: Bessel functions of the second kind
- $I_n(x)$: Modified Bessel functions of the first kind
- $K_n(x)$: Modified Bessel functions of the second kind
- $H_n(x)$: Struve functions
- $L_n(x)$: Modified struve functions
- $Ei(x)$: Exponential-Integral functions
- $Ci(x)$: Cosine-Integral functions
- $Si(x)$: Sine-Integral functions
- $g_1(x), h_1(x)$: Auxiliary functions in terms of sine and cosine integrals

1. 諸 論

無限 粘性流體 內에서 2차원 圓型 실린더가 低速으로 움직일 때 실린더 주위의 유동상태 및 실린더가 받는 힘은 잘 알려진 오센(Oseen) 방정식으로 해석하게 된다(Lamb⁽¹⁾). 본 논문에서는 서로 다른 점성을 갖는 비압축성 유체의 무한 境界面 근처에서 2차원 원형 실린더가 경계면에 수평 또는 수직운동을 할 때 유동을 해석하고 항력(drag)과 양력(lift)을 계산하였다. 이는 理論的인 면에서나 工學的인 면에서 무척 흥미로운 문제이다. 일찌기 Takaisi⁽²⁾는 원형실린더가 고체 벽면 근처에서 평행운동을 할 경우 오센방정식을 해석하였는데 球의 경우 Faxen⁽³⁾이 사용한 이미지(image) 방법을 적용하였다. 고체벽의 경우에는 소위 스토크스(Stokes)해가 있게되어 오센의 해가 극한적으로 스토크스의 해와 일치하게 되겠으나 본 연구에서 다루고 있는 流體境界面의 경우는 확실치 않다. 그래서 Takaisi의 연구를 확장하여 본 문제를 해석하였다. 두 유체의 점성비가 무한히 크다면 이는 고체벽의 경우가 되며 점성비가 영이면 물리적으로 보아 액체와 기체의 경계면이라고 생각되어 일반적인 境界面 문제가 될 것이다.

球가 流體境界面 근처에서 임의의 저속운동을 할 경우에는 Lee et al.⁽⁴⁾과 Lee & Leal⁽⁵⁾에 의하여 해석되었으며 그들은 스토크스 방정식을 해석하였다. 뒤에서 언급되었으나 球에 의하여 교란되는 경계면의 변위가 상당히 작다는 가정하에 1次解를 다루었다. 本論文에서도 이 가정을 도입하였으며 오센 방정식을 해석함으로써 일반적인 流體境界面 또는 고체벽면의 영향과, 스토크스해가 존재하는 경우라도 속도의 영향을 일관성 있게 고찰할 수 있었다.

2. 지배방정식과 해석방법

비압축성 低速粘性流動의 경우 연속방정식과 오센방정식은 다음과 같다.

$$\nabla \cdot \bar{u} = 0 \tag{1}$$

$$\rho u_0 \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \bar{u} \tag{2}$$

수평, 수직운동의 경우 자세한 내용은 분리하여 다음에서 설명되겠으나 일단 좌표계는 그림 1 또는 그림 2와 같이 원점을 실린더의 중심에 두고 실린더의 운동방향을 x 축으로 한다. 유선함수 ψ 를 도입하면

$$\psi = u_0 y + \phi \tag{3}$$

가 되며 ϕ 는 교란되는 양을 나타내는 유선함수이다. 교란속도는 다음과 같이 나타낸다.

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \phi}{\partial x} \tag{4}$$

이를 이용하여 식(1)과 식(2)를 정리하면 ϕ 는 다음의 방정식을 만족하여야 한다.

$$\nabla^2 \left(\nabla^2 - 2k \frac{\partial}{\partial x} \right) \phi = 0 \tag{5}$$

여기서 $2k = u_0/\nu$, $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ 이다. 식(5)의 해는

$$\phi = \phi_1 + \phi_2 \tag{6}$$

로 나타낼 수 있는데 ϕ_1 과 ϕ_2 는 각각 다음식의 해이다.

$$\nabla^2 \phi_1 = 0 \tag{7}$$

$$(\nabla^2 - k^2)(e^{-kx} \phi_2) = 0 \tag{8}$$

Filon⁽⁶⁾에 의하면 위 식의 일반해는 다음과 같이 주어진다.

$$\phi_1 = A_0 \ln r + B_0 \theta + \sum_{n=1}^{\infty} r^{-n} (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta), \tag{9}$$

$$\begin{aligned} \phi_2 = & a_0 e^{kx} K_0(kr) + b_0 \int_0^\theta kr \{K_1(kr) + K_0(kr) \cos \theta\} e^{krcos\theta} d\theta \\ & + e^{kx} \sum_{n=1}^{\infty} K_n(kr) (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta), \end{aligned} \tag{10}$$

$$B_0 = -b_0 \tag{11}$$

식(11)의 관계는 ϕ 가 연속이고 一價 함수(single valued function)가 되기 위한 조건이다. 그러나 본 논문에서는 Lamb⁽¹⁾과 같이 A_0, B_0, a_0, b_0 만 고려하여 속도를 나타내고자 한다.

$$\begin{aligned} u = & A_0 r^{-1} \sin \theta + B_0 r^{-1} \cos \theta \\ & - ka_0 e^{kx} K_1(kr) \sin \theta \\ & + kb_0 e^{kx} \{K_1(kr) \cos \theta + K_0(kr)\} \end{aligned} \tag{12}$$

$$v = -A_0 r^{-1} \cos \theta + B_0 r^{-1} \sin \theta$$

$$+ka_0e^{i\theta}\{K_1(kr)\cos\theta-K_0(kr)\} +kb_0e^{i\theta}K_1(kr)\sin\theta \quad (13)$$

위 식을 공액복소수 속도(conjugate complex velocity) $w(=u-iv)$ 로 나타내면

$$\frac{w}{k} = \left(\frac{1}{2}-r-\ln\frac{kr}{2}\right)b_0 - i\left(\frac{1}{2}+r+\ln\frac{kr}{2}\right)a_0 + e^{-i\theta}\left[i\frac{A_0}{kr} + \frac{B_0}{kr} + \frac{b_0}{kr} - i\left\{\frac{1}{kr} + kr\left(r+\ln\frac{kr}{2}\right)\right\}a_0\right] \quad (14)$$

가 된다. 여기서 k^2r^2 이상의 고차항은 무시하였다.

무한 유체내에서의 유동은 Lamb⁽¹⁾과 같이 위의 해가 실린더에서 무한히 떨어진 점에서의 경계조건을 만족시키므로, 실린더 위에서 $w=-u_0$ 를 만족시키도록 식(14)의 계수를 정하게 된다. 그러나 여기서 경계면 위에서의 조건을 생각해야 한다. 물리적으로는 변형된 경계면 위에서 속도는 연속이어야 하고, 운동학적 조건과 동역학적 조건을 동시에 만족하여야 한다. Lee et. al.⁽⁴⁾에서는 엄밀한 경계조건에서 레이놀즈수가 적고 따라서 교란된 경계면의 변위가 작다는 가정하에 perturbation 방법을 이용하여 1次解를 얻기위한 경계조건을 유도하였다. 즉 $\frac{u_0\mu_2}{\sigma} \ll 1, \frac{u_0\mu_2}{g\alpha^2\Delta\rho} \ll 1, a/b \ll 1$ 중 어느 한 조건이 만족될 때 경계조건으로 교란이 없는 경계면에서 접선속도는 연속이고 수직속도는 영이다. 또 접선방향의 응력은 연속이고 앞서 언급한 무한 유체 내에서 경계조건을 만족시켜야 한다. 이러한 解를 구하기 위하여 Faxen⁽³⁾은 경계면의 효과를 나타내 주는 적분형태의 해를 가정한 후 경계조건을 만족하도록 미지함수를 구하였다.

3. 垂直運動

수직운동에 대한 解析를 위하여 Fig. 1과 같이 좌표계를 택하였다. 여기서 수직운동은 실린더가 境界面에 접근하는 경우만을 고려하였다. 이는 반대의 경우도

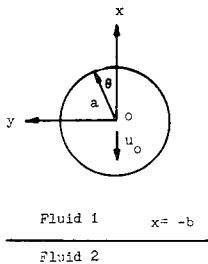


Fig. 1 Coordinate system for vertical motion.

센流動의 와류가 경계면을 지나기 때문에 解析이 어렵기 때문이다.

수직운동에서는 θ 에 대하여 u 가 대칭되어야 하므로 식(12)에서 $A_0=0, a_0=0$ 이 된다. 한편 境界面에서는 Cartesian 좌표계로 나타내면 편리하므로 이를 위하여 $\ln r$ 과 $e^{i\theta}K_0(kr)$ 을 적분형태로 나타내면 다음과 같다.

$$\ln r = -\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{|\alpha|}\exp(i\alpha y-|\alpha||x|)d\alpha \quad (15)$$

$$e^{i\theta}K_0(kr) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\lambda_0}\exp(i\alpha y-\lambda_0|x|+kx)d\alpha \quad (16)$$

여기서 $\lambda_0 = \sqrt{\alpha^2+k^2}$ 이다. 위 식을 각각 x, y 에 대하여 편미분하면 다음의 관계식을 얻고,

$$\frac{\cos\theta}{r} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|x|}{x}\exp(i\alpha y-|\alpha||x|)d\alpha \quad (17)$$

$$\frac{\sin\theta}{r} = -\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{i\alpha}{|\alpha|}\exp(i\alpha y-|\alpha||x|)d\alpha \quad (18)$$

$$e^{i\theta}K_1(kr)\cos\theta = \frac{1}{2k}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|x|}{x}\exp(i\alpha y-\lambda_0|x|+kx)d\alpha \quad (19)$$

$$e^{i\theta}K_1(kr)\sin\theta = -\frac{1}{2k}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{i\alpha}{\lambda_0}\exp(i\alpha y-\lambda_0|x|+kx)d\alpha \quad (20)$$

이들을 식(12), 식(13)에 대입하면 속도 u, v 는 다음과 같이 나타낸다.

$$u = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|x|}{x}B_0\exp(i\alpha y-|\alpha||x|)d\alpha + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{k}{\lambda_0} + \frac{|x|}{x}\right)b_0\exp(i\alpha y-\lambda_0|x|+kx)d\alpha, \quad (21)$$

$$v = -\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{i\alpha}{|\alpha|}B_0\exp(i\alpha y-|\alpha||x|)d\alpha - \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{i\alpha}{\lambda_0}b_0\exp(i\alpha y-\lambda_0|x|+kx)d\alpha. \quad (22)$$

Faxen⁽³⁾과 같이 image 속도를 다음과 같이 가정하면

$$u^* = -\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}i\alpha f_1(\alpha)\exp(i\alpha y-|\alpha|(x+2b))d\alpha - \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}i\alpha f_2(\alpha)\exp(i\alpha y-(\lambda_0+k)(x+2b))d\alpha \quad (23)$$

$$v^* = -\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}|\alpha|f_1(\alpha)\exp(i\alpha y-|\alpha|(x+2b))d\alpha - \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}(\lambda_0+k)f_2(\alpha)\exp(i\alpha y-(\lambda_0+k)(x+2b))d\alpha \quad (24)$$

이고 u^*, v^* 는 u, v 와 각각 합하여서 유체 1 내에서 교란속도를 나타내게 된다. 여기서 f_1, f_2 는 경계조건에 의하여 결정될 미지함수이다. 한편 유체 2 내에서 속도분포는 다음의 형태로 가정한다.

$$\hat{u} = -\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}i\alpha f_3(\alpha)\exp(i\alpha y+|\alpha|(x+b))d\alpha$$

$$-\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} i\alpha f_4(\alpha) \exp\{i\alpha y + (\lambda_0 + k)(x+b)\} d\alpha \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \dot{v} &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |\alpha| f_3(\alpha) \exp\{i\alpha y + |\alpha|(x+b)\} d\alpha \\ &+ \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (\lambda_0 + k) f_4(\alpha) \exp\{i\alpha y + (\lambda_0 + k)(x+b)\} d\alpha \end{aligned} \quad (26)$$

편의상 image 속도를 공액복소수함수($w^* = u^* - iv^*$)로 나타내면 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} w^* &= \frac{i}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (|\alpha| - \alpha) f_1(\alpha) \exp\{i\alpha y - |\alpha|(x+2b)\} d\alpha \\ &+ \frac{i}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (\lambda_0 + k - \alpha) f_2(\alpha) \exp\{i\alpha y - (\lambda_0 + k)(x+2b)\} d\alpha \end{aligned} \quad (27)$$

위에서 가정된 속도함수는 流體境界面에서 만족해야 할 조건은 前節에서 언급한 바 다음과 같다.

$$\begin{aligned} (u + u^*)|_{x=b} &= 0, \quad \dot{u}|_{x=b} = 0 \\ (v + v^*)|_{x=b} &= \dot{v}|_{x=b}, \quad \frac{\partial}{\partial x}(v + v^*)|_{x=b} \\ &= r_0 \frac{\partial \dot{v}}{\partial x}|_{x=b} \end{aligned} \quad (28)$$

여기서 $r_0 = \frac{\mu_2}{\mu_1}$ 이다.

식(21)~식(26)을 식(28)에 대입하여 $f_1(\alpha)$ 와 $f_2(\alpha)$ 를 구하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} f_1(\alpha) &= m \left[\frac{\lambda_0 + |\alpha|}{k\alpha} B_0 i + \frac{|\alpha|(\lambda_0 - k + |\alpha|)}{\alpha \lambda_0 k} b_0 i \exp\{- (\lambda_0 + k - |\alpha|) b_0\} \right] + \frac{n B_0 i}{\alpha} \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} f_2(\alpha) &= -m \left[\frac{\lambda_0 + |\alpha| - k}{k\alpha} B_0 i \exp\{- (|\alpha| - \lambda_0 - k) b\} \right. \\ &\left. + \frac{(\lambda_0 - k + |\alpha|)^2}{2\alpha \lambda_0 k} b_0 i \right] + \frac{n(\lambda_0 - k)}{\lambda_0 \alpha} b_0 i \end{aligned} \quad (30)$$

여기서 $m = \frac{r_0}{r_0 + 1}$, $n = \frac{1}{r_0 + 1}$ 이다. 이를 식(27)에 대입하고 $\alpha = k\beta$, $\lambda = \sqrt{\beta^2 + 1}$ 로 치환하여 정리하면 w^* 는 아래와 같이 된다.

$$\begin{aligned} w^*/k &= m B_0 \int_0^{\infty} (\lambda + \beta) \exp\{-ik\beta y - k\beta(x+2b)\} d\beta \\ &+ m b_0 \int_0^{\infty} \frac{\beta(\lambda + \beta - 1)}{\lambda} \exp\{-ik\beta y - k\beta x - k\beta(\lambda + \beta + 1)\} d\beta \\ &+ n B_0 \int_0^{\infty} \exp\{-ik\beta y - k\beta(x+2b)\} d\beta \\ &+ m B_0 \int_0^{\infty} \exp\{ik\beta y - k(\lambda + 1)x - kb(\lambda + \beta + 1)\} d\beta \\ &+ \frac{m b_0}{2} \int_0^{\infty} \frac{\lambda + \beta - 1}{\lambda} \exp\{ik\beta y - k(\lambda + 1)(x+2b)\} d\beta \\ &- \frac{n b_0}{2} \int_0^{\infty} \left(\frac{\beta + 1}{\lambda} - 1 \right) \exp\{ik\beta y - k(\lambda + 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &(x+2b)\} d\beta \\ &- m B_0 \int_0^{\infty} (\lambda + \beta) \exp\{-ik\beta y - k(\lambda + 1)x - kb(\lambda + \beta + 1)\} d\beta \\ &- \frac{m b_0}{2} \int_0^{\infty} \frac{(\lambda + \beta)(\lambda + \beta - 1)}{\lambda} \exp\{-ik\beta y - k(\lambda + 1)(x+2b)\} d\beta \\ &+ \frac{n b_0}{2} \int_0^{\infty} \left(1 + \frac{\beta - 1}{\lambda} \right) \exp\{-ik\beta y - k(\lambda + 1)(x+2b)\} d\beta \end{aligned} \quad (31)$$

이제 식(14)와 식(31)에서 $B_0 = -b_0$ 이므로 B_0 만 미지수가 되고 이는 실린더 위에서의 경계조건, 즉($w + w^*$) $_{r=a} = -u_0$ 을 만족하도록 정해주면 된다.

다시 실린더 좌표계를 도입하여 Cartesian 좌표계와의 관계,

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta = \frac{r}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) \\ y &= r \sin \theta = -\frac{ir}{2}(e^{i\theta} - e^{-i\theta}) \end{aligned}$$

와 kr 에 대한 지수함수의 Taylor 전개식을 이용하면 $\exp(-ik\beta y - k\beta x) = 1 - k\beta r e^{i\theta} + \dots$

$$\begin{aligned} \exp\{ik\beta y - k(\lambda + 1)x\} &= 1 - \frac{\lambda + \beta + 1}{2} k r e^{-i\theta} + \dots \\ \exp\{-ik\beta y - k(\lambda + 1)x\} &= 1 - \frac{\lambda - \beta + 1}{2} k r e^{i\theta} + \dots \end{aligned} \quad (32)$$

$\frac{w^*}{k}$ 는 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} w^*/k &= m B_0 \int_0^{\infty} (\lambda + \beta) e^{-2k\beta b} d\beta \\ &+ m b_0 \int_0^{\infty} \frac{\beta(\lambda + \beta - 1)}{\lambda} e^{-k\beta(\lambda + \beta + 1)} d\beta \\ &+ n B_0 \int_0^{\infty} e^{-2k\beta b} d\beta + m B_0 \int_0^{\infty} \exp\{-kb(\lambda + \beta + 1)\} d\beta \\ &+ \frac{m b_0}{2} \int_0^{\infty} \frac{\lambda + \beta - 1}{\lambda} \exp\{-2kb(\lambda + 1)\} d\beta \\ &- \frac{n b_0}{2} \int_0^{\infty} \left(\frac{\beta + 1}{\lambda} - 1 \right) \exp\{-2kb(\lambda + 1)\} d\beta \\ &- m B_0 \int_0^{\infty} (\lambda + \beta) \exp\{-kb(\lambda + \beta + 1)\} d\beta \\ &- \frac{m b_0}{2} \int_0^{\infty} \frac{(\lambda + \beta)(\lambda + \beta - 1)}{\lambda} \exp\{-2kb(\lambda + 1)\} d\beta \\ &+ \frac{n b_0}{2} \int_0^{\infty} \left(1 + \frac{\beta - 1}{\lambda} \right) \exp\{-2kb(\lambda + 1)\} d\beta \end{aligned} \quad (33)$$

단 식(32)에서 $e^{-i\theta}$ 를 포함하는 항과 상수항만 고려하였으며 $k^2 r^2$ 이상의 고차항은 무시하였다. 여기서 다음의 적분형태의 함수와 초월함수와의 관계식,

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} x e^{-ax} dx &= \frac{1}{a^2}, \quad \int_0^{\infty} \sqrt{x^2 + 1} e^{-ax} dx \\ &= \frac{\pi}{2a} \{H_1(a) - Y_1(a)\} \end{aligned}$$

$$\int_1^\infty \frac{e^{-ax}}{x+1} dx = -e^{-a} \text{Ei}(-2a),$$

$$\int_1^\infty \frac{e^{-ax}}{x} dx = -\text{Ei}(-a)$$

$$\int_1^\infty \frac{xe^{-ax}}{\sqrt{x^2-1}} dx = K_1(a), \int_1^\infty \frac{e^{-ax}}{\sqrt{x^2-1}} dx = K_0(a)$$

$$\int_1^\infty \sqrt{x^2-1} e^{-ax} dx = \frac{1}{a} K_1(a)$$

를 식(33)에 대입 정리하면 $\frac{w^*}{k}$ 는 다음과 같이 간략히 표현된다.

$$\begin{aligned} w^*/k = & \frac{\pi m B_0}{4 kb} \left[\{H_1(2kb) - Y_1(2kb)\} + \frac{1}{4 k^2 b^2} \right. \\ & + mb_0 \left\{ \frac{e^{-2kb}}{2k^2 b^2} + \frac{e^{-kb}}{2} \text{Ei}(-kb) + \frac{kb}{2} e^{-kb} \right. \\ & \left. \left. \text{Ei}(-kb) + \frac{1}{2} e^{-2kb} \right\} \right. \\ & + \frac{n B_0}{2kb} + m B_0 \left\{ \frac{e^{-2kb}}{2kb} + \frac{kb}{2} e^{-kb} \text{Ei}(-kb) + \frac{e^{-kb}}{2} \right\} \\ & + \frac{mb_0}{2} \left\{ e^{-2kb} K_1(2kb) - e^{-2kb} K_0(2kb) + \frac{e^{-4kb}}{2kb} \right\} \\ & + nb_0 \{e^{-2kb} K_1(2kb) - e^{-2kb} K_0(2kb)\} \\ & - m B_0 \left\{ \frac{e^{-2kb}}{2kb} + \frac{e^{-2kb}}{2k^2 b^2} - \frac{e^{-kb}}{2} \text{Ei}(-kb) \right\} \\ & - \frac{mb_0}{2} \left\{ \frac{e^{-2kb}}{kb} K_1(2kb) + \frac{e^{-4kb}}{2kb} + \frac{e^{-4kb}}{2k^2 b^2} \right. \\ & \left. - e^{-2kb} K_1(2kb) + e^{-2kb} K_0(2kb) \right\} \end{aligned} \quad (34)$$

식(14)와 식(34)를 경계조건에 대입하면 B_0 는 아래와 같다.

$$B_0 = \frac{u_0 k}{S - mF_1 - nF_2} \quad (35)$$

여기서

$$\begin{aligned} F_1(kb) = & \frac{\pi}{4 kb} \{H_1(2kb) - Y_1(2kb)\} \\ & - \frac{e^{-2kb}}{k^2 b^2} + \frac{1}{4k^2 b^2} - e^{-2kb} \times K_1(2kb) \\ & + e^{-2kb} K_0(2kb) + \frac{e^{-4kb}}{4k^2 b^2} + \frac{e^{-2kb} K_1(2kb)}{2kb}, \end{aligned} \quad (36)$$

$$F_2(kb) = \frac{1}{2kb} + e^{-2kb} K_0(2kb) - e^{-2kb} K_1(2kb),$$

$$S = \frac{1}{2} - \gamma - \ln\left(\frac{ka}{2}\right)$$

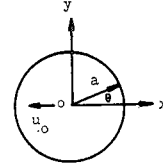
이다. Filon⁽³⁾에 의하면 물체가 받는 저항 D 는 $D = 2\pi\rho u_0 B_0$ 로 주어지며 이 때 무차원 변수로 정리하면 아래와 같다.

$$\frac{D}{\mu u_0} = \frac{4\pi}{S - mF_1 - nF_2} \quad (35)$$

수직운동의 경우에는 유동이 대칭이기 때문에 양력은 받지않게 된다.

4. 水平運動

境界面に 平行, 즉 水平운동의 경우에는 Fig. 2 와 같이 좌표계를 택하면 편리하다.



Fluid 1 $y = -b$
Fluid 2

Fig. 2 Coordinate system for parallel motion.

수직운동에서의 비슷한 방법으로 다음의 관계를 이용한다.

$$\ln r = -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|\alpha|} \exp(i\alpha x - |\alpha||y|) d\alpha + c_1 \quad (36)$$

$$e^{kx} K_0(kr) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\lambda_0} \exp(i\alpha x - \lambda_0|y|) d\alpha \quad (37)$$

여기서 $\lambda_0 = \sqrt{\alpha^2 + 2ik\alpha}$ 이다. 위 식을 각각 x, y 에 대하여 편미분하면 아래의 관계를 얻는다.

$$\frac{1}{r} \cos \theta = -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{i\alpha}{|\alpha|} \exp(i\alpha x - |\alpha||y|) d\alpha,$$

$$\frac{1}{r} \sin \theta = \frac{1}{2} \frac{|y|}{y} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\alpha x - |\alpha||y|) d\alpha,$$

$$\begin{aligned} e^{kx} K_1(kr) \cos \theta = & -\frac{1}{2k} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{i\alpha - k}{\lambda_0} \\ & \times \exp(i\alpha x - \lambda_0|y|) d\alpha, \end{aligned} \quad (38)$$

$$\begin{aligned} e^{kx} K_1(kr) \sin \theta = & \frac{1}{2k} \frac{|y|}{y} \\ & \times \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\alpha x - \lambda_0|y|) d\alpha. \end{aligned}$$

이들을 식(12)와 식(13)에 대입하면 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} u = & \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{|y|}{y} A_0 - \frac{i\alpha}{|\alpha|} B_0 \right) \\ & \times \exp(i\alpha x - |\alpha||y|) d\alpha \\ & - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{|y|}{y} a_0 + \frac{i\lambda_0}{\alpha} b_0 \right) \\ & \times \exp(i\alpha x - \lambda_0|y|) d\alpha, \end{aligned} \quad (39)$$

$$\begin{aligned} v = & \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{i\alpha}{|\alpha|} A_0 + \frac{|y|}{y} B_0 \right) \\ & \times \exp(i\alpha x - |\alpha||y|) d\alpha \\ & + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left(-\frac{i\alpha}{\lambda_0} a_0 + \frac{|y|}{y} b_0 \right) \\ & \times \exp(i\alpha x - \lambda_0|y|) d\alpha. \end{aligned} \quad (40)$$

수직운동의 경우와 같은 방법으로 境界面을 고려하기 위한 image 속도 u^*, v^* 와 流體 2 내에서 속도 \hat{u}, \hat{v} 을 아래와 같이 가정한다.

$$u^* = -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |\alpha| f_1(\alpha) \times \exp\{i\alpha x - |\alpha|(y+2b)\} d\alpha - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \lambda_0 f_2(\alpha) \exp\{i\alpha x - \lambda_0(y+2b)\} d\alpha, \quad (41)$$

$$v^* = -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} i\alpha f_1(\alpha) \exp\{i\alpha x - |\alpha|(y+2b)\} d\alpha - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} i\alpha f_2(\alpha) \exp\{i\alpha x - \lambda_0(y+2b)\} d\alpha, \quad (42)$$

$$\hat{u} = -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |\alpha| f_3(\alpha) \exp\{i\alpha x + |\alpha|(y+b)\} d\alpha - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \lambda_0 f_4(\alpha) \exp\{i\alpha x + \lambda_0(y+b)\} d\alpha \quad (43)$$

$$\hat{v} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} i\alpha f_3(\alpha) \exp\{i\alpha x + |\alpha|(y+b)\} d\alpha + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} i\alpha f_4(\alpha) \exp\{i\alpha x + \lambda_0(y+b)\} d\alpha \quad (44)$$

$$w^* = u^* - i v^* = -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (|\alpha| + \alpha) f_1(\alpha) \exp\{i\alpha x - |\alpha|(y+2b)\} d\alpha - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (\lambda_0 + \alpha) f_2(\alpha) \exp\{i\alpha x - \lambda_0(y+2b)\} d\alpha \quad (45)$$

한편 수평운동에서의 경계조건은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} (v + v^*)|_{y=-b} &= 0 \\ \hat{v}|_{y=-b} &= 0 \\ (u + u^*)|_{y=-b} &= \hat{u}|_{y=-b} \\ \frac{\partial}{\partial y}(u + u^*)|_{y=-b} &= r_0 \frac{\partial}{\partial y} \hat{u}|_{y=-b} \end{aligned} \quad (46)$$

이는 경계면에서 수직속도성분은 영이고 수평속도성분과 전단응력은 연속이어야 함을 나타낸다. 식 (39)~식 (44)를 위 경계조건에 대입하여 $f_1(\alpha)$ 와 $f_2(\alpha)$ 를 구하면 다음과 같다.

$$f_1(\alpha) = m \cdot \left[\frac{1}{2k} \left\{ -i \frac{(\lambda_0 + |\alpha|)^2}{|\alpha|} A_0 + \frac{(\lambda_0 + |\alpha|)^2}{\alpha^2} B_0 \right\} + \frac{1}{k} \left\{ i \frac{(\lambda_0 + |\alpha|)}{\alpha} a_0 + \frac{\lambda_0(\lambda_0 + |\alpha|)}{\alpha^2} b_0 \right\} \right] \exp\{-b(\lambda_0 - |\alpha|)\} + n \cdot \left(\frac{A_0}{|\alpha|} + \frac{B_0 i}{\alpha} \right) \quad (47)$$

$$f_2(\alpha) = m \cdot \left[\frac{1}{k} \left\{ \frac{i(\lambda + |\alpha|)}{\alpha} A_0 - \frac{(\lambda_0 + |\alpha|)}{|\alpha|} B_0 \right\} \exp\{b(\lambda_0 - |\alpha|)\} + \frac{1}{2k} \left\{ i \frac{(\lambda + |\alpha|)^2}{\lambda_0 \alpha} a_0 + \frac{(\lambda_0 + |\alpha|)^2}{\alpha^2} b_0 \right\} \right] - n \cdot \left(\frac{a_0}{\lambda_0} - \frac{b_0 i}{\alpha} \right) \quad (48)$$

이를 식 (45)에 대입하고 $\alpha = k\beta$, $\lambda = \sqrt{\beta^2 + 2i\beta}$, $\lambda' = \sqrt{\beta^2 - 2i\beta}$ 로 놓아 정리하면 $\frac{w^*}{k}$ 는 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} w^*/k &= m \cdot \left\{ \frac{iA_0}{2} \int_0^{\infty} \frac{(\lambda + \beta)^2}{\beta} \exp(-2kb\beta + ik\beta x - k\beta y) d\beta - \frac{B_0}{2} \int_0^{\infty} \frac{(\lambda + \beta)^2}{\beta} \exp(-2kb\beta + ik\beta x - k\beta y) d\beta - ia_0 \int_0^{\infty} (\lambda + \beta) \exp\{-kb(\lambda + \beta) + ik\beta x - k\beta y\} d\beta - b_0 \int_0^{\infty} \frac{\lambda(\lambda + \beta)}{\beta} \exp\{-kb(\lambda + \beta) + ik\beta x - k\beta y\} d\beta + \frac{iA_0}{2} \left[- \int_0^{\infty} \frac{(\lambda + \beta)^2}{\beta} \exp\{-kb(\lambda + \beta) + ik\beta x - k\lambda y\} d\beta + \int_0^{\infty} \frac{\lambda'^2 - \beta^2}{\beta} \exp\{-kb(\lambda' + \beta) - ik\beta x - k\lambda' y\} d\beta \right] + \frac{B_0}{2} \left[\int_0^{\infty} \frac{(\lambda + \beta)^2}{\beta} \exp\{-kb(\lambda + \beta) + ik\beta x - k\lambda y\} d\beta + \int_0^{\infty} \frac{\lambda'^2 - \beta^2}{\beta} \exp\{-kb(\lambda' + \beta) - ik\beta x - k\lambda' y\} d\beta \right] + \frac{ia_0}{4} \left[\int_0^{\infty} \frac{(\lambda + \beta)^3}{\lambda\beta} \exp(-2kb\lambda + ik\beta x - k\lambda y) d\beta - \int_0^{\infty} \frac{(\lambda' + \beta)^2(\beta' - \beta)}{\lambda'\beta} \exp(-2kb\lambda' - ik\beta x - k\lambda' y) d\beta \right] + \frac{b_0}{4} \left[\int_0^{\infty} \frac{(\lambda + \beta)^3}{\beta^2} \exp(-2kb\lambda + ik\beta x - k\lambda y) d\beta + \int_0^{\infty} \frac{(\lambda' + \beta)^2(\lambda' - \beta)}{\beta^2} \exp(-2kb\lambda' - ik\beta x - k\lambda' y) d\beta \right] \right\} + n \cdot \left\{ -(A_0 + B_0 i) \int_0^{\infty} \exp(-2kb\beta + ik\beta x - k\beta y) d\beta + \frac{a_0}{2} \int_0^{\infty} \left(1 + \frac{\beta}{\lambda}\right) \exp(-2kb\lambda + ik\beta x - k\lambda y) d\beta - \frac{b_0 i}{2} \int_0^{\infty} \left(1 + \frac{\lambda}{\beta}\right) \exp(-2kb\lambda + ik\beta x - k\lambda y) d\beta + \frac{a_0}{2} \int_0^{\infty} \left(1 - \frac{\beta}{\lambda'}\right) \exp(-2kb\lambda' - ik\beta x - k\lambda' y) d\beta - \frac{b_0 i}{2} \int_0^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda'}{\beta}\right) \exp(-2kb\lambda' - ik\beta x - k\lambda' y) d\beta \right\} \end{aligned}$$

다음으로 식 (14)와 식 (49)에 포함되어 있는 미지상수는 실린더 위에서 경계조건 $(w + w^*)_{r=a} = -u_0$ 를 만족시키도록 정한다. 수직운동에서의 같이

$$x = \frac{1}{2} r(e^{i\theta} + e^{-i\theta}), \quad y = -\frac{1}{2} i r(e^{i\theta} - e^{-i\theta})$$

의 관계와 Taylor 전개를 이용한다.

$$\exp(ik\beta x - k\beta y) = 1 + ik\beta r e^{i\theta} + \dots,$$

$$\exp(ik\beta x - k\lambda y) = 1 - \frac{1}{2} ikr(\lambda - \beta) e^{-i\theta} + \frac{1}{2} ikr(\lambda + \beta) e^{i\theta} + \dots, \quad (50)$$

$$\exp(-ik\beta x - k\lambda' y) = 1 - \frac{1}{2} ikr(\lambda' + \beta) e^{i\theta}$$

$$+ \frac{1}{2} ikr(\lambda' - \beta) e^{i\theta} + \dots$$

마찬가지로 상수항과 $e^{-i\theta}$ 항만 고려하며 $k^2 r^2$ 이상의

항을 무시한 후 식(49)를 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 \frac{w^*}{k} = & m \cdot \left\{ \left(\frac{iA_0}{2} - \frac{B_0}{2} \right) \int_0^\infty \frac{(\lambda+\beta)^2}{\beta} \exp(-2kb\beta) d\beta \right. \\
 & - ia_0 \int_0^\infty (\lambda+\beta) \exp\{-kb(\lambda+\beta)\} d\beta \\
 & - b_0 \int_0^\infty \frac{\lambda(\lambda+\beta)}{\beta} \exp\{-kb(\lambda+\beta)\} d\beta \\
 & - \frac{iA_0}{2} \left[\int_0^\infty \frac{(\lambda+\beta)^2}{\beta} \exp\{-kb(\lambda+\beta)\} d\beta \right. \\
 & \left. - \int_0^\infty \frac{\lambda'^2 - \beta^2}{\beta} \exp\{-kb(\lambda'+\beta)\} d\beta \right] \\
 & + \frac{B_0}{2} \left[\int_0^\infty \frac{(\lambda+\beta)^2}{\beta} \exp\{-kb(\lambda+\beta)\} d\beta \right. \\
 & \left. + \int_0^\infty \frac{\lambda'^2 - \beta^2}{\beta} \exp\{-kb(\lambda'+\beta)\} d\beta \right] \\
 & + \frac{ia_0}{4} \left[\int_0^\infty \frac{(\lambda+\beta)^3}{\lambda\beta} \exp(-2kb\lambda) d\beta \right. \\
 & \left. - \int_0^\infty \frac{(\lambda'+\beta)^2(\lambda'-\beta)}{\lambda'\beta} \exp(-2kb\lambda') d\beta \right] \\
 & + \frac{b_0}{4} \left[\int_0^\infty \frac{(\lambda+\beta)^3}{\beta^2} \exp(-2kb\lambda) d\beta \right. \\
 & \left. + \int_0^\infty \frac{(\lambda'+\beta)^2(\lambda'-\beta)}{\beta^2} \exp(-2kb\lambda') d\beta \right] \\
 & + kre^{-i\theta} \left\{ - \frac{A_0}{4} \left[\int_0^\infty \frac{(\lambda+\beta)^2(\lambda-\beta)}{\beta} \exp\{-kb(\lambda+\beta)\} d\beta \right. \right. \\
 & \left. - \int_0^\infty \frac{(\lambda'+\beta)^2(\lambda'-\beta)}{\beta} \exp\{-kb(\lambda'+\beta)\} d\beta \right] \\
 & - \frac{iB_0}{4} \left[\int_0^\infty \frac{(\lambda+\beta)^2(\lambda-\beta)}{\beta} \exp\{-kb(\lambda+\beta)\} d\beta \right. \\
 & \left. + \int_0^\infty \frac{(\lambda'+\beta)^2(\lambda'-\beta)}{\beta} \exp\{-kb(\lambda'+\beta)\} d\beta \right] \\
 & + \frac{a_0}{8} \left[\int_0^\infty \frac{(\lambda+\beta)^3(\lambda-\beta)}{\lambda\beta} \exp(-2kb\lambda) d\beta \right. \\
 & \left. - \int_0^\infty \frac{(\lambda'+\beta)^3(\lambda'-\beta)}{\lambda'\beta} \exp(-2kb\lambda') d\beta \right] \\
 & - \frac{ib_0}{8} \left[\int_0^\infty \frac{(\lambda+\beta)^3(\lambda-\beta)}{\beta^2} \exp(-2kb\lambda) d\beta \right. \\
 & \left. + \int_0^\infty \frac{(\lambda'+\beta)^3(\lambda'-\beta)}{\beta^2} \exp(-2kb\lambda') d\beta \right] \left. \right\} \\
 & + n \cdot \left\{ -(A_0 + B_0 i) \int_0^\infty \exp(-2kb\beta) d\beta \right. \\
 & + \frac{a_0}{2} \int_0^\infty \frac{\lambda+\beta}{\lambda} \exp(-2kb\lambda) d\beta \\
 & - \frac{b_0 i}{2} \int_0^\infty \frac{\lambda+\beta}{\beta} \exp(-2kb\lambda) d\beta \\
 & + \frac{a_0}{2} \int_0^\infty \frac{\lambda'-\beta}{\lambda'} \exp(-2kb\lambda') d\beta \\
 & - \frac{b_0 i}{2} \int_0^\infty \frac{\beta-\lambda'}{\beta} \exp(-2kb\lambda') d\beta \\
 & \left. - \frac{ik\gamma}{4} e^{i\theta} \left[a_0 \int_0^\infty \left(\frac{\lambda^2 - \beta^2}{\lambda} \right) \exp(-2kb\lambda) d\beta \right. \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - b_0 i \int_0^\infty \frac{\lambda^2 - \beta^2}{\beta} \exp(-2kb\lambda) d\beta \\
 & + a_0 \int_0^\infty \frac{\lambda'^2 - \beta^2}{\lambda'} \exp(-2kb\lambda') d\beta \\
 & \left. + b_0 i \int_0^\infty \frac{\lambda'^2 - \beta^2}{\beta} \exp(-2kb\lambda') d\beta \right\} \quad (61)
 \end{aligned}$$

이를 다음의 초월함수와 적분과의 관계를 이용하면,

$$\begin{aligned}
 \int_0^\infty \frac{1}{\lambda} e^{-x\lambda} d\lambda &= -i \frac{\pi}{2} e^{ix} \{J_0(x) - iY_0(x)\} \\
 \int_0^\infty \frac{1}{\lambda'} e^{-x\lambda'} d\lambda' &= i \frac{\pi}{2} e^{-ix} \{J_0(x) + iY_0(x)\} \\
 \int_0^\infty e^{-\lambda x} d\lambda + \int_0^\infty e^{-\lambda' x} d\lambda' &= 2K_1(x) \\
 \int_0^\infty e^{-\lambda x} d\lambda - \int_0^\infty e^{-\lambda' x} d\lambda' &= i\pi \left\{ I_1(x) - L_1(x) - \frac{2}{\pi} \right\} \\
 \int_0^\infty \frac{1}{\lambda} e^{-x\lambda} d\lambda + \int_0^\infty \frac{1}{\lambda'} e^{-x\lambda'} d\lambda' &= 2K_0(x) \\
 \int_0^\infty \frac{1}{\lambda} e^{-x\lambda} d\lambda - \int_0^\infty \frac{1}{\lambda'} e^{-x\lambda'} d\lambda' &= -i\pi \{I_0(x) - L_0(x)\} \\
 \int_0^\infty \frac{1}{u^2+1} e^{-xu} du &= g_1(x), \quad \int_0^\infty \frac{u}{u^2+1} e^{-xu} du = h_1(x) \\
 \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda x} d\lambda + \int_0^\infty \lambda' e^{-\lambda' x} d\lambda' &= K_0(x) + K_2(x) \\
 \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda x} d\lambda - \int_0^\infty \lambda' e^{-\lambda' x} d\lambda' &= -\frac{\pi i}{2} \{I_2(x) + I_0(x) - L_2(x) \\
 & \quad - L_0(x) - \frac{2x}{3\pi}\} \\
 \int_0^\infty \frac{\lambda}{\beta} e^{-x\lambda} d\lambda - \int_0^\infty \frac{\lambda'}{\beta} e^{-x\lambda'} d\lambda' &= 2iK_0(x) \\
 \int_0^\infty \frac{\lambda}{\beta} e^{-x\lambda} d\lambda + \int_0^\infty \frac{\lambda'}{\beta} e^{-x\lambda'} d\lambda' &= \frac{2}{\pi} + \pi \{I_0(x) - L_0(x)\} \\
 L_n(x) &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(x/2)^{n+2m+1}}{\Gamma(m+3/2)\Gamma(n+m+3/2)}
 \end{aligned}$$

식(51)은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned}
 \frac{r_0+1}{r_0} \frac{w^*}{k} = & A_0 \left[- \frac{1}{r_0 \times 2kb} - \frac{1}{2kb} - g_1(kb) \right. \\
 & + \frac{\pi}{4} \{J_0(2kb) + J_2(2kb)\} \cos 2kb \\
 & + \frac{\pi}{4} \{Y_0(2kb) + Y_2(2kb)\} \sin 2kb \\
 & + i \left[- \frac{1}{4k^2 b^2} - \frac{1}{2} h_1(kb) + h_2(kb) + \frac{\pi}{4} \{J_0(2kb) \right. \\
 & \left. + J_2(2kb)\} \sin 2kb - \frac{\pi}{4} \{Y_0(2kb) + Y_2(2kb)\} \cos 2kb \right] \\
 & + B_0 \left[\frac{1}{4k^2 b^2} + \frac{1}{2} h_1(kb) + h_2(kb) - \frac{\pi}{4} \{J_0(2kb) \right. \\
 & \left. + J_2(2kb)\} \sin 2kb + \frac{\pi}{4} \{Y_0(2kb) + Y_2(2kb)\} \cos 2kb \right. \\
 & + i \left[- \frac{1}{r_0 2kb} - \frac{1}{2kb} - g_1(kb) + g_2(kb) + \frac{\pi}{4} \{J_0(2kb) \right. \\
 & \left. + J_2(2kb)\} \cos 2kb + \frac{\pi}{4} \{Y_0(2kb) + Y_2(2kb)\} \sin 2kb \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &+ a_0 \left[\frac{K_1(2kb)}{r_0} - g_1(kb) + g_2(kb) + \frac{\pi}{4} \left\{ I_0(2kb) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - L_0(2kb) + I_2(2kb) - L_2(2kb) - \frac{4kb}{3\pi} \right\} \right] \quad (52) \\
 &+ i \left[-\frac{K_0(2kb)}{r_0} - \frac{1}{4k^2b^2} - \frac{1}{2} h_1(kb) + h_2(kb) \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{2} K_0(2kb) + \frac{1}{2} K_2(2kb) + \frac{\pi}{2} \left\{ I_1(2kb) - L_1(2kb) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \frac{2}{\pi} \right\} \right] \\
 &+ b_0 \left[\frac{K_0(2kb)}{r_0} - \frac{1}{4k^2b^2} - \frac{1}{2} K_0(2kb) + \frac{1}{2} K_2(2kb) \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{2} h_1(kb) - h_2(kb) - \frac{\pi}{2} \left\{ I_1(2kb) - L_1(2kb) - \frac{2}{\pi} \right\} \right] \\
 &+ i \left[-\frac{K_1(2kb)}{r_0} - \frac{1}{kb} + g_2(kb) - \frac{\pi}{4} \left\{ I_0(2kb) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - L_0(2kb) + I_2(2kb) - L_2(2kb) - \frac{4kb}{3\pi} \right\} \right] \\
 &+ ikr e^{-i\theta} \left\{ \frac{1}{2} A_0 \left[-\frac{1}{k^2b^2} - h_1(kb) + 2h_2(kb) \right] \right. \\
 &\quad + B_0 [-g_1(kb) + g_2(kb)] + \frac{1}{2} a_0 \left[\frac{-2K_0(2kb)}{r_0} \right. \\
 &\quad \left. - K_0(2kb) + K_2(2kb) + \frac{1}{2k^2b^2} + \pi \left\{ I_1(2kb) - L_1(2kb) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \frac{2}{\pi} \right\} \right] + \frac{1}{2} b_0 \left[\frac{2K_1(2kb)}{r_0} - \frac{\pi}{2} \left\{ I_0(2kb) - L_0(2kb) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + I_2(2kb) - L_2(2kb) - \frac{4kb}{3\pi} \right\} \right] \left. \right\}
 \end{aligned}$$

여기서

$$\begin{aligned}
 g_1(x) &= \int_0^\infty \frac{1}{u^2+1} e^{-xu} du \\
 &= \text{Ci}(x) \sin x - \text{Si}(x) \cos x + \frac{\pi}{2} \cos x
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 g_2(x) &= \int_0^\infty \frac{1}{(u^2+1)^2} e^{-xu} du \\
 &= \frac{1}{2} \left\{ \text{Ci}(x) \sin x - \text{Si}(x) \cos x + \frac{\pi}{2} \cos x \right\} \\
 &\quad - \frac{x}{2} \left\{ \text{Ci}(x) \cos x + \text{Si}(x) \sin x - \frac{\pi}{2} \sin x \right\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 h_1(x) &= \int_0^\infty \frac{u}{u^2+1} e^{-xu} du \\
 &= -\text{Ci}(x) \cos x - \text{Si}(x) \sin x + \frac{\pi}{2} \sin x
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 h_2(x) &= \int_0^\infty \frac{u}{(u^2+1)^2} e^{-xu} du \\
 &= \frac{1}{2} - \frac{x}{2} \left\{ \text{Ci}(x) \sin(x) - \text{Si}(x) \cos x + \frac{\pi}{2} \cos x \right\}
 \end{aligned}$$

이다. 식(14)와 식(52)는 실린더 위에서 경계조건을 만족시키기 위해서는 미지상수는 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned}
 B_0 &= -b_0 \\
 A_0 &= a_0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A_0 &= \frac{u_0}{k} \cdot \frac{F_1 \cdot \beta}{\left(F_3 - \frac{\beta}{2}\right)^2 - (F_2 + \beta S)^2 - F_1^2} \\
 B_0 &= \frac{u_0}{k} \cdot \frac{\beta \left(F_2 + \beta S - F_3 + \frac{\beta}{2}\right)}{\left(F_3 - \frac{\beta}{2}\right)^2 - (F_2 + \beta S)^2 - F_1^2} \quad (53)
 \end{aligned}$$

여기서 $\beta = \frac{r_0+1}{r_0} \circ \text{고}$

$$\begin{aligned}
 F_1(kb) &= \frac{1}{2kb} - g_1(kb) \\
 &\quad + \frac{\pi}{4} \{J_0(2kb) + J_2(2kb)\} \cos 2kb \\
 &\quad + \frac{\pi}{4} \{Y_0(2kb) + Y_2(2kb)\} \sin 2kb \\
 &\quad + \frac{K_1(2kb)}{r_0} - \frac{1}{r_0(2kb)} \\
 &\quad + \frac{\pi}{4} \left\{ I_0(2kb) - L_0(2kb) + I_2(2kb) \right. \\
 &\quad \left. - L_2(2kb) - \frac{4kb}{3\pi} \right\},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F_2(kb) &= \frac{1}{2k^2b^2} + h_1(kb) + \frac{1}{2} K_0(2kb) - \frac{1}{2} K_2(2kb) \\
 &\quad - \frac{\pi}{4} \{J_0(2kb) + J_2(2kb)\} \sin 2kb \quad (54) \\
 &\quad + \frac{\pi}{4} \{Y_0(2kb) + Y_2(2kb)\} \cos 2kb,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F_3(kb) &= 2h_2(kb) + \frac{\pi}{2} \left\{ I_1(2kb) - L_1(2kb) - \frac{2}{\pi} \right\} \\
 &\quad - \frac{K_0(2kb)}{r_0}, \quad S = \gamma + \ln(ka/2)
 \end{aligned}$$

이다. Filon⁽⁶⁾에 의하면 물체가 받는 양력 L 과 저항 D 는 다음과 같이 주어진다.

$$L = 2\pi\rho u_0 A_0, \quad D = 2\pi\rho u_0 B_0 \quad (55)$$

$$L/\mu u_0 = \frac{4\pi\beta F_1}{\left(F_3 - \frac{\beta}{2}\right)^2 - (F_2 + \beta S)^2 - F_1^2} \quad (56)$$

$$D/\mu u_0 = \frac{4\pi\beta \left(F_2 + \beta S - F_3 + \frac{\beta}{2}\right)}{\left(F_3 - \frac{\beta}{2}\right)^2 - (F_2 + \beta S)^2 - F_1^2} \quad (57)$$

5. 結果 및 考察

먼저 前節에서 유도된 식(56), 식(57)에 의하여 b/a , $Re = \frac{u_0 a}{\nu}$, r_0 를 변화시키면서 저항과 양력을 계산하였다. Fig. 3 에는 $r_0 = \infty$ 의 경우 저항을 나타내었는데 b/a 가 감소하고 또는 Re 가 증가할 수록 저항계수가 증가함을 알 수 있다. 한편 b/a 가 큰 경우는 Lamb⁽¹¹⁾ 의 결과로 접근함을 알 수 있다. 여기서 Lamb 의 결

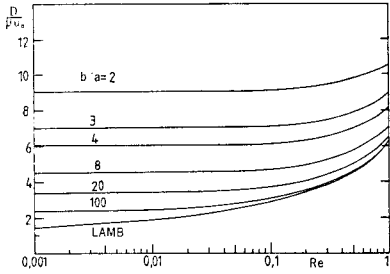


Fig. 3 Drag coefficients of a circular cylinder (parallel motion, $r_0 = \infty$).

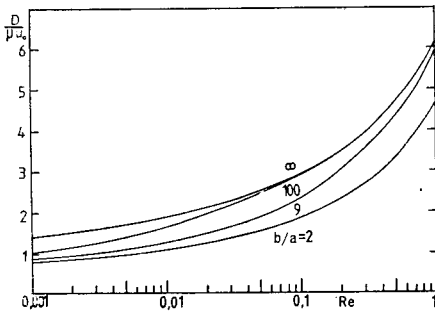


Fig. 4 Drag coefficients of a circular cylinder (parallel motion, $r_0 = 0.0$).

과는 무한 점성유체내에서 2차원 실린더의 운동을 말한다. Fig. 4에는 $r_0=0$ 인 경우 즉 액체, 기체 경계면으로 생각되는 경우인데 b/a 가 감소할 수록 저항이 감소하는 경향을 보여주며 경계면의 영향은 그리 심하지 않고 Lamb⁽¹⁾의 해보다 항상 적은 저항계수를 보여주고 있다. Fig. 5와 Fig. 6에서는 $Re=0.001$ 과 0.1

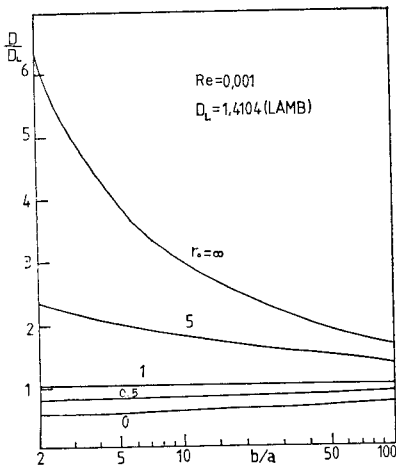


Fig. 5 Changes of drag coefficients with ratio of viscosity (parallel motion, $R=0.001$).

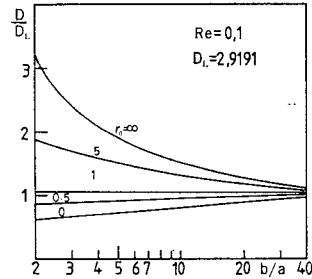


Fig. 6 Changes of drag coefficient with ratio of viscosity (parallel motion, $Re=0.1$).

인 경우 r_0 를 변화시킬 때의 영향을 보여준다. Fig. 5의 경우 $r_0 > 1$ 인 경우 실린더가 경계면에 가까울 수록 저항이 증가하나 $r_0 < 1$ 인 경우는 오히려 줄어들음을 알 수 있는데 $r_0=1$, 즉 점성이 동일한 섞이지 않는 유체의 경우 무한 단일유체내에서의 저항과 거의 같음을 보여준다. Fig. 6에서는 Fig. 5와 비교하여 이러한 벽면의 영향이 속도가 증가할 수록 감소함을 보여주고 있다.

한편 Fig. 3에서 보면 Re 수가 아주 작아지면 저항 계수가 일정한 경향을 보여준다. 이는 Re 수에 관계없는 解, 즉 스토크스 解가 존재함을 알 수 있다. 그러나 Fig. 4에서 $r_0=0.0$ 인 경우에는 이러한 경향을 볼 수 없다. 이를 확인하기 위하여 식(57)의 저항을 ka 가 점점 작아지는 극한값을 확인하였다. $ka \rightarrow 0$ 이면 $F_1(kb)=0$, $F_2(kb)=\frac{1}{2}-\gamma-\ln kb$, $F_3(kb)=\frac{1}{r_0}(\gamma+\ln kb)$ 가 되어 다음과 같다.

$$\frac{D}{\mu_1 u_0} = \frac{4\pi}{\left(\frac{1}{r_0+1}\right)\left(\frac{1}{2}-2\gamma\right) + \ln\left(\frac{2(kb)^{\frac{r_0-1}{r_0+1}}}{ka}\right)} \quad (58)$$

이 때 몇가지 점성비의 경우를 보면

$$\frac{D}{\mu u_0} = \frac{4\pi}{\ln \frac{2b}{a}}; r_0 = \infty \quad (59)$$

$$\frac{D}{\mu u_0} = \frac{4\pi}{\frac{1}{4}-\gamma-\ln \frac{ka}{2}}; r_0 = 1 \quad (60)$$

$$\frac{D}{\mu u_0} = \frac{4\pi}{\frac{1}{2}-2\gamma-\ln(2kb \cdot ka)}; r_0 = 0 \quad (61)$$

위에서 볼 때 $r_0 = \infty$ 를, 즉 고체벽의 경우에만 수평 운동은 스토크스 解가 있음을 짐작할 수 있다. 점성비 $r_0=1$ 인 경우 항력계수는 b/a 에 관계없이 항상 일정하다. Fig. 7에서는 $r_0 = \infty$ 와 $r_0 = 0$ 인 경우 양력이나

타내었다. 실린더가 경계면에 가까울수록, 속도가 증가할 수록 양력계수가 증가함을 알 수 있으며 모든 경우에 벽에서 멀어지는 방향의 양력을 보여준다.

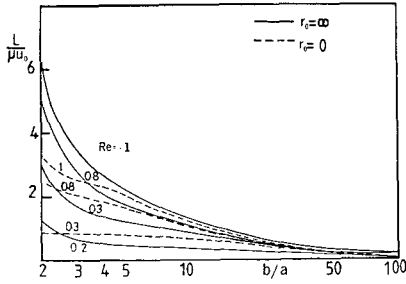


Fig. 7 Lift coefficients of a circular cylinder (parallel motion).

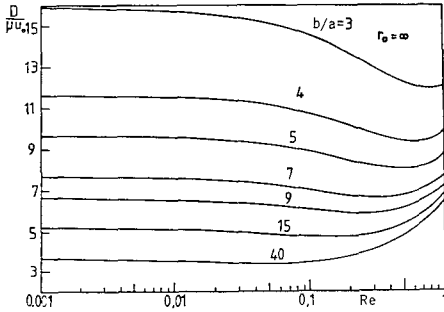


Fig. 8 Drag coefficients of a circular cylinder (vertical motion; $r_0 = \infty$).

다음에는 여러가지 조건에서 수직운동을 하는 경우 저항을 계산하였다. Fig. 8에서는 $r_0 = \infty$ 의 경우 저항계수를 보여주며 실린더가 경계면에 가까울 수록 증가한다. 여기서 특기할만한 것은 속도가 증가할 수록 저항계수가 감소하다가 다시 증가하며 최소로 하는 Re 수가 있게 된다. 이는 속도가 작은 경우 벽의 효과가 크다가 속도가 증가하면 상대적으로 관성력의 영향이 커 짐을 알 수 있다. Fig. 9에서는 $r_0 = 0$ 인 경우를 보여주며 Fig. 8과 비교할 때 거의 같은 특성을 나타낸다. 수평운동에서와 같이 $ka = \frac{1}{2} Re$ 가 아주작은 경우의 거동을 보면 Fig. 8과 Fig. 9에서 스토크스解가 있음을 보여준다. 이를 확인하기 위하여 식(35)의 극한치를 구해보면, $F_1(kb) = \frac{3}{2} - \gamma - \ln(kb)$, $F_2(kb) = 1 - \gamma - \ln(kb)$ 이므로 저항계수는 다음과 같이 된다.

$$\frac{D}{\mu u_0} = \frac{4\pi}{\ln \frac{2b}{a} - 1 - \frac{1}{2(\gamma_0 + 1)}} \quad (62)$$

따라서 수직운동의 경우에는 r_0 의 값에 관계없이 Re

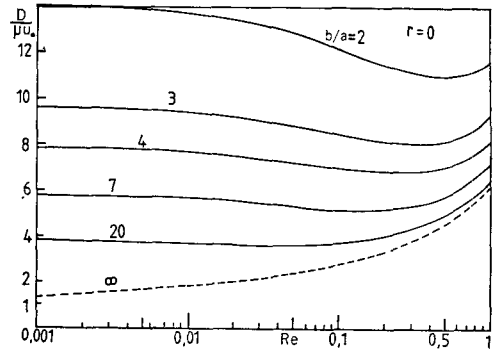


Fig. 9 Drag coefficients of a circular cylinder (vertical motion, $r_0 = 0.0$).

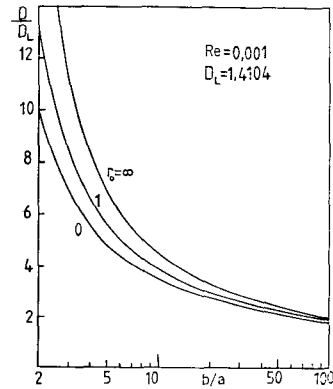


Fig. 10 Changes of drag coefficients with ratio of viscosity (vertical motion $Re = 0.001$).

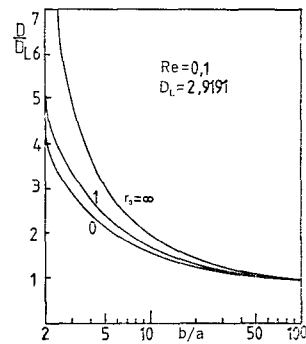


Fig. 11 Changes of drag coefficients with ratio of viscosity (vertical motion $Re = 0.1$).

수가 감소하면 일정한 저항계수를 보여주기 때문에 스토크스解가 있음을 알 수 있다. 몇가지 r_0 에 대하여 식(62)를 나타내면 다음과 같다.

$$\frac{D}{\mu u_0} = \frac{4\pi}{\ln \frac{2b}{a} - 1}; r_0 = \infty \quad (63)$$

$$\frac{D}{\mu u_0} = \frac{4\pi}{\ln \frac{2b}{a} - \frac{3}{4}}; r_0 = 1 \quad (64)$$

$$\frac{D}{\mu u_0} = \frac{4\pi}{\ln \frac{2b}{a} - \frac{1}{2}}; r_0 = 0.0 \quad (65)$$

식(63)은 Kim⁽⁷⁾이 스토크스 방정식을 해석한 경우와 동일한 결과임을 알 수 있다.

6. 結 論

本 論文에서는 오센 방정식에 근거를 두고 粘性이 서로 다른 유체경계면 근처에서 2차원 원형 실린더가 경계면에 수평 또는 수직으로 가까워 질때의 저항과 양력을 구하였다. 물론 교란된 경계면의 변위가 작다는 가정이 만족되는 범위내에서 여러가지 점성비, 속도, 경계면에서 떨어진 거리의 영향을 쉽게 알 수 있었다. 특히 점성비가 무한히 큰 경우는 경계면을 고체 벽으로 생각할 수 있어 이 경우 기존결과와 비교될 수 있었다.

한편 레이놀즈 수가 아주 작은 경우에 극한값을 취함으로 스토크스解가 존재할 수 있느냐를 보았다. 수직으로 접근하는 경우에는 모든 점성비에서, 평행운동을 하는 경우에는 점성비가 무한대일 때 저항계수는 레이놀즈 수에 관계없는 일정한 값을 보여주었다. 이 경우 스토크스解라고 할 수 있다.

일반적으로 저항계수는 수평운동의 경우 실린더가 벽에 가까울 수록($r_0 < 1$ 에서는 반대), 속도가 증가할 수록 점성비가 클 수록 증가한다. 양력계수도 같은 특성을 보여준다. 수직운동의 경우 대체로 같은 특성을 보여주나 저항계수가 최소가 되는 레이놀즈수가 있었으

며 수평운동 만큼 점성비에 예민하지 않았다.

謝 辭

진 研究기간을 통해 진지한 討論과 조언을 통하여 도와주신 劉丁烈 教授에게 깊은 감사를 드립니다.

參 考 文 獻

1. Lamb, H.; Hydrodynamics, 6th ed., Cambridge: Cambridge University Press, 1932.
2. Takaisi, Y., "The Forces on a circular cylinder moving with low speed in a semi-infinite viscous liquid bounded by a plane wall, J. Phys. Soc. Japan, Vol. 10, No. 5 (1955).
3. Faxen, H., Arkiv. Mat. Astron. Fys. 17, No.27(1923); disseration, Uppsala univ., (1921).
4. S.H. Lee, et. al., "Motion of a sphere in the presense of a plane interface. Part 1.," J. of Fluid Mech. (1979), Vol. 93, Part 4, pp. 705-726.
5. S.H. Lee and L.G. Leal, "Motion of a sphere in the presence of a plane interface, Part 2.," J. Fluid Mech. (1980), Vol 98 part 2, pp. 193-224.
6. L.N. Filon, Proc. Roy. Soc. A113 (1926) 7.
7. M.U. Kim, J. Phys. Soc. Japan, Vol. 46, (1979).