

<論 文>

비대칭 복합적층판의 Warping 해석†

全完柱* · 洪昌善**

(1983년 6월 22일 접수)

Warping Analysis of Unsymmetric Laminated Composites

W. J. Jun and C. S. Hong

Abstract

The warping of unsymmetric laminated composites is induced by residual curing stress at the room temperature. Classical lamination theory (C.L.T.) predicts the room temperature shapes of all unsymmetric laminates to be a saddle. Experimental observations, however, indicate some unsymmetric laminated composites have cylindrical room temperature shapes. This anomalous behavior is explained by the extension of C.L.T. which involves Von Karman's large deflection theory.

It is shown that, depending on the thickness, width, length, curing temperature and room temperature of the laminate, critical boundaries of the shape change are determined. Theoretical predictions are compared with experimental results of Toray Graphite/Epoxy $[0_n/90_n]_T$.

기 호 설 명

1. 서 론

- T, L, W : 적층판의 두께, 길이, 폭
- w : 적층판의 처짐
- \bar{Q}_{ij} : 변환강성도
- h : 층(lamina)의 두께
- E : 전 포텐셜 에너지
- Ω : 변형을 에너지 밀도 함수
- T_c, T_r : 큐어링(curing), 룬(room)온도
- α_i : 열팽창 계수
- u, v : 접선방향의 변위
- a, b : x, y 방향의 골물
- c, d : 적분상수

비대칭 복합적층판(複合積層板)에 발생하는 warping 은 대칭 복합적층판과는 달리 대칭면에 대하여 열팽창 계수가 다르기 때문에 적층판의 제작과정에서 발생하는 residual curing stress^{1,2)}에 그 원인이 있다. Warping 을 갖는 적층판의 유용성은 곡률을 갖는 구조물 특히 자동차의 rotor, fan blade 그리고 항공기의 wing panel, 동체등에서 요구된다.

고전적층 이론³⁾ (classical lamination theory ; C.L.T.)에 따르면 비대칭 복합적층판은 항상 anticlastic warping 으로 안장 모양을 예견하나 실험적 관찰⁴⁾로는 cylindrical warping 인 원통모양도 관찰 할 수 있다. 1981년 Hyer^{4,5)}가 이러한 모순을 모어원(Mohr Circle)을 그려서 발견하고 C.L.T.에 비선형 항을 첨가함으로써 정사각형인 경우 비대칭 복합적층판에 대하여 곡률을 수치적 방법으로 구하였다.

† 1982년도 대한기계학회 추계 학술대회에서 발표

* 정회원, 한국과학기술원 연구부

** 정회원, 한국과학기술원 기계공학과

1981년 Hahn⁶⁾은 $[0_n/90_n]_r$ 의 정사각형인 경우 적층판에 대하여 적층판의 길이 변화에 따라서 근사적인 모양의 변화를 관찰하고 습기의 흡수와 배출을 통하여 곡률의 변화와 함께 모양의 변화를 관찰하고 이를 뒷받침 하였다^{7,8)}.

본 연구에서는 C.L.T.에 Hyer가 적용의 가능성을 제시한 Von Karman의 대처짐 이론(large deflection theory)⁹⁾을 이용하여 C.L.T.를 확장하고 Hyer¹⁾가 사용한 전 포텐셜 에너지 방법(total potential energy method)을 사용하여 적층판의 두께, 폭, 길이, 큐어링 온도, 실내온도에 따른 적층판의 곡률과 모양 변화의 임계치를 직교 이방성인 적층 $[0_n/90_n]_r$ 에서 n 을 변화시켜 여러가지 두께를 실험과 수치적 방법으로 비교하였다.

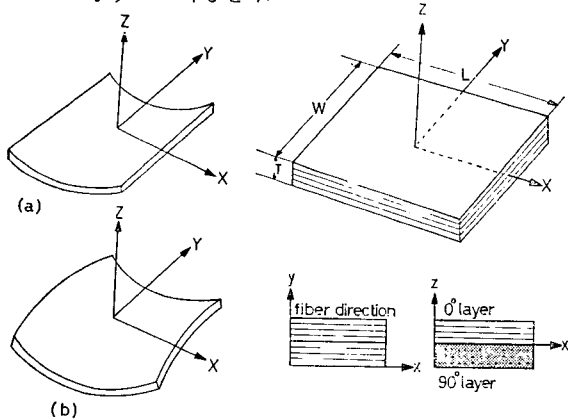
2. Warping 해석

2.1. 이 론

본 연구에서 다루고 있는 복합적층판의 일반적인 형상은 Fig. 1과 같고 표시법은 Fig. 2와 같다.

적층판의 warping을 해석하기 위해서 다음과 같은 가정을 하였다.

- (가) Cylindrical warping에서도 중립면에서의 변형율은 선형 범위로 가정한다.
- (나) 중립면에서의 전단변형율은 무시한다.
- (다) z 방향의 처짐 w 는 여러항으로 가정함에 따라 정확하여지나 적층판의 곡률 및 형상을 예측하기 편리하고 비교적 정확하므로 $w = \frac{1}{2}(ax^2 + by^2)$ 으로 가정한다.



(a) cylindrical shape
(b) saddle shape
Fig. 1 Laminate shape

Fig. 2 Laminate notation and geometry

(라) 적층판을 해석하는데 쉽게 하기 위해 폭과 길이의 결정은 $W \leq L$ 이 성립 되도록 한다.

Von Karman의 대처짐 이론을 사용하면 변형률-변위 관계에 다음과 같은 식을 얻는다.

$$\begin{aligned} \epsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial w}{\partial x} \right\}^2 \\ \epsilon_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial w}{\partial y} \right\}^2 \\ \epsilon_{xy} &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} - 2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right\} \end{aligned} \quad (1)$$

중립면에서의 변형률-변위 관계식은 $z=0$ 을 식 (1)에 대입함으로써 다음의 식을 얻는다.

$$\begin{aligned} \epsilon_{xx}^0 &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial w}{\partial x} \right\}^2 \\ \epsilon_{yy}^0 &= \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial w}{\partial y} \right\}^2 \\ \epsilon_{xy}^0 &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right\} \end{aligned} \quad (2)$$

가정 (다)로부터 다음을 얻는다.

$$w = \frac{1}{2}(ax^2 + by^2) \quad (3)$$

식 (3)을 (2)에 대입하고 가정 (가)와 (나)를 적용하면 중립면에서의 변위 u, v 는 다음과 같이 얻는다.

$$\begin{aligned} u &= cx - \frac{abxy^2}{4} - \frac{a^2x^3}{6} \\ v &= dy - \frac{abx^2y}{4} - \frac{b^2y^3}{6} \end{aligned} \quad (4)$$

식 (3), (4)의 u, v, w 를 식 (1)에 대입하여 $\epsilon_{xx}, \epsilon_{xy}, \epsilon_{yy}$ 를 얻는다. Total potential energy는 다음과 같이 표시된다.

$$E = \int_V \Omega dv \quad (5)$$

일반적으로 열이 작용하는 조건하에서 응력-변형률 법칙을 적용하여 Ω 를 벡극수로 전개한 후 고차항을 무시하면 다음의 식을 얻는다.

$$\Omega = \frac{1}{2} C_{ijkl} \epsilon_{ij} \epsilon_{kl} - \beta_{ij} (T_c - T_r) \epsilon_{ij} \quad (6)$$

Cross-ply 인 경우에 임의의 층(lamina)에 대하여 전개하면 다음과 같은 식을 얻는다.

$$\begin{aligned} \Omega &= \frac{1}{2} \bar{Q}_{11} \epsilon_{11}^2 + \bar{Q}_{12} \epsilon_{11} \epsilon_{22} + 2\bar{Q}_{66} \epsilon_{12}^2 + \frac{1}{2} \bar{Q}_{22} \epsilon_{22}^2 \\ &\quad - (\bar{Q}_{11} \alpha_1 + \bar{Q}_{12} \alpha_2) \epsilon_{11} \Delta T - (\bar{Q}_{12} \alpha_1 + \bar{Q}_{22} \alpha_2) \epsilon_{22} \Delta T \end{aligned} \quad (7)$$

여기서 $\epsilon_{11}, \epsilon_{22}, \epsilon_{12}$ 는 앞에서 얻은 $\epsilon_{xx}, \epsilon_{yy}, \epsilon_{xy}$ 와 같은 값이며 tensorial strain으로 표현되었다. 식 (7)을 식 (5)에 대입하면 식 (5)는 다음과 같이 정리된다.

$$E = \int_{-L/2}^{L/2} \int_{-W/2}^{W/2} \int_{-T/2}^{T/2} \Omega(a, b, c, d, Q_{ij}, \Delta T, \alpha_i, x, y, z) dx dy dz \quad (8)$$

에너지가 평형상태를 만족하기 위해서 $\delta E=0$ 이 되어야 한다.

$$\delta E = \left(\frac{\partial E}{\partial a}\right)\delta a + \left(\frac{\partial E}{\partial b}\right)\delta b + \left(\frac{\partial E}{\partial c}\right)\delta c + \left(\frac{\partial E}{\partial d}\right)\delta d = 0 \quad (9)$$

$$\frac{\partial E}{\partial a} = 0, \frac{\partial E}{\partial b} = 0, \frac{\partial E}{\partial c} = 0 \text{ and } \frac{\partial E}{\partial d} = 0$$

또 안정조건을 만족하기 위해서 에너지가 최소가 되어야 하므로 식 (10)의 $\delta^2 E$ 가 positive definite 해야 한다.

$$\delta^2 E = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 E}{\partial a^2} & \frac{\partial^2 E}{\partial a \partial b} & \frac{\partial^2 E}{\partial a \partial c} & \frac{\partial^2 E}{\partial a \partial d} \\ \frac{\partial^2 E}{\partial a \partial b} & \frac{\partial^2 E}{\partial b^2} & \frac{\partial^2 E}{\partial b \partial c} & \frac{\partial^2 E}{\partial b \partial d} \\ \frac{\partial^2 E}{\partial a \partial c} & \frac{\partial^2 E}{\partial b \partial c} & \frac{\partial^2 E}{\partial c^2} & \frac{\partial^2 E}{\partial c \partial d} \\ \frac{\partial^2 E}{\partial a \partial d} & \frac{\partial^2 E}{\partial b \partial d} & \frac{\partial^2 E}{\partial c \partial d} & \frac{\partial^2 E}{\partial d^2} \end{vmatrix} \quad (10)$$

여기서 해는 수치적 방법을 사용하여 비선형 연립방정식을 Newton-Rapson 반복법으로 구하였다.

2.2. 실험방법

먼저 이론의 결과와 실험의 결과를 비교하기 위해서 일본 Toray 회사의 Graphite/Epoxy 305 prepreg 을 사용하여 재료 상수를 구하였다. 회사에서 제공된 제작 과정에 따라서 hot press 와 oven(Fig. 3 참조)을 사용하여 cure cycle 에 따라서 인장 시편(Fig. 4 참조)을 3개씩 제작하여 $[0_s]_T$ 에서 E_{11}, ν_{12} 를 $[90_s]_T$ 에서 $E_{22}, [\pm 45]_2$ 에서 G_{12} 를 Instron 시험기를 사용하여 측정하였으며 층의 두께 h 와 열팽창계수 α_1, α_2 는 제공된 값

Table 1 Unidirectional composite constants, Gr/ epoxy

E_{11}, G_{pa}	E_{22}, G_{pa}	G_{12}, G_{pa}	ν_{12}	h, mm	$\alpha_1, /^\circ C$	$\alpha_2, /^\circ C$
124.5	8.98	3.60	0.31	0.125	-0.4×10^{-6}	30×10^{-6}

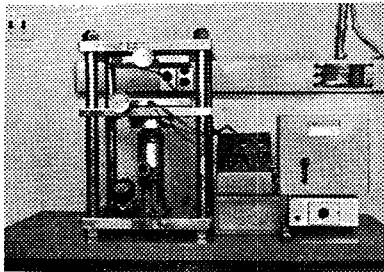


Fig. 3 Hot press and oven

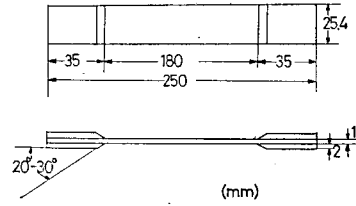
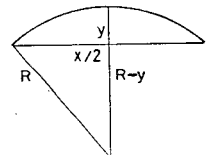
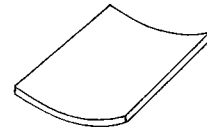


Fig. 4 Specification of tensile specimen

Table 2 Comparison of theory with experiment for radius of curvature at $T_s=23^\circ C$

No.	L x W	1/a		1/b	
		theory	experiment	theory	experiment
$[0_3/90_3]_T$	10 x 10	28.7	24.7		
$[0_2/90_2]_T$	10 x 9	68	66.1	137	131.5
$[0_3/90_3]_T$	14 x 7	28.3	29.8		
$[0_2/90_2]_T$	8 x 4	69.9	64.4	69.9	65.8
$[0_2/90_2]_T$	9 x 5	18.9	19.8		
$[0_4/90_4]_T$	6 x 2	52.6	45.6	52.6	46.8
$[0_4/90_4]_T$	14 x 2	39	44.9		
$[0_6/90_6]_T$	6 x 2	61.8	53.5	61.8	52.1



$$(x/2)^2 + (R-y)^2 = R^2$$

R: Radius of curvature
1/R: Curvature

Fig. 5 Curvature measurement

을 그대로 사용하였고 Table 1 에 보인바와 같다. 또 이론치와 비교할 시편은 Table 2 에 열거한 바와 같이 $T_s=23^\circ C$ 에서 시편을 다이아몬드톱으로 치수대로 가공하였다. 제작할때 hot press 에서 꺼내는 즉시 warping 이 발생하여 가끔씩 빨리 다이아몬드 톱으로 자르

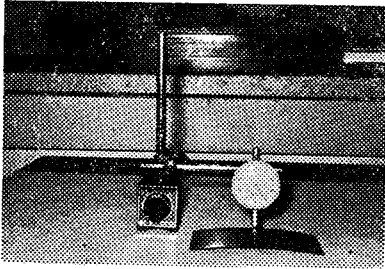


Fig. 6 Dial gage and blackgranite surface plate

는 것이 필요하며 자를때 delamination이 발생되지 않도록 주의하였다.

정판과 다이알게이지를 사용하여 Fig. 5, 6에서 보인 바와 같이 최대처짐을 측정하여 곡률 반경을 구하고 Table 2에 이론치와 비교하였다. 정판위에서 다이알게이지로 최대처짐을 측정할때 cylindrical warping에서는 오차가 거의 없었거나 anticlastic warping에서는 측정에 특히 주의하였다.

3. 결과 및 고찰

비대칭 복합적층판에서 C.L.T.의 적용 한계를 구하기 위해서 직교 이방성인 $[0_n/90_n]_T$ 의 여러가지 n 의 경우 중에 Fig. 7의 적층판이 정사각형($L/W=1$)인 경우 적층 $[0_3/90_3]_T$ 의 곡률을 구하였다. 적층판에 warping이 발생한 경우 항상 곡률 a, b 가 단조 감소함수로 무호만 반대이고 곡률의 절댓값이 같은 C.L.T. 이론은 여기서 Von Karman의 처짐 이론을 사용한 비선형 항의 첨가로 $T_r=23^\circ C$ 일때 $T/W=1.27\%$ 에서, 평판의 길이로는 5.9cm에서, a 의 곡률은 일정한 값에 수렴하고 b 의 곡률은 거의 없는 cylindrical warping을 갖게되어 C.L.T.의 적용이 불가능함을 알 수 있으며 적층판의 모양은 5.9cm에서 안장 모양에서 원통 모양으로 변하기 시작함을 관찰할 수 있다. 또한 cylindrical warping으로 변하기 시작하는 5.9cm 이상의 크기에서 곡률이 정반대인 snap-through 현상을 cylindrical warping에서는 관찰할 수 있다.

적층판에 두께의 영향에 따른 warping을 관찰하기 위해서 Fig. 8에서 보인바와 같이 $T_r=23^\circ C$ 에서 $[0_n/90_n]_T$ 의 n 을 2, 3, ..., 6까지 변화시킨 결과 적층판의 길이가 같은 조건에서 두께가 증가 할수록 a, b 의 곡률이 변화하여 형상이 평평한 적층판으로 변하는 것을 알 수 있다. 또한 $[0_2/90_2]_T$ 에서 3.9cm, $[0_3/90_3]_T$ 에서 5.9cm, $[0_4/90_4]_T$ 에서 11.8cm 즉 항상 $T/W=1.27\%$ 을 경계로 C.L.T.의 적용 불가능을 다시 말해서 적

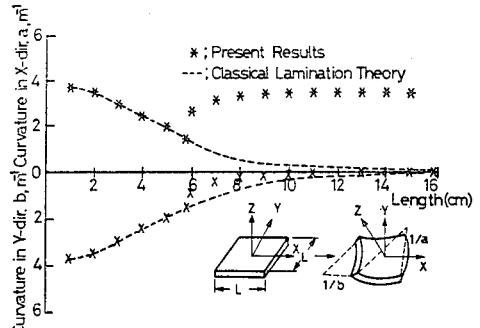


Fig. 7 Comparison of C.L.T. with extending C.L.T. for $[0_3/90_3]_T$, square plate at $T_r=23^\circ C$

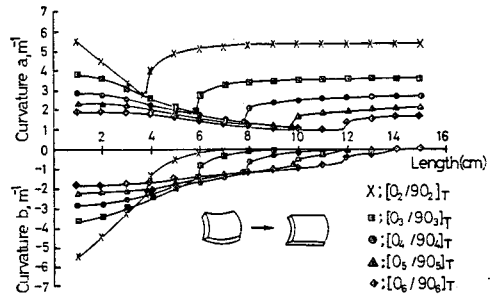


Fig. 8 Curvature change for various laminate thicknesses for $[0_n/90_n]_T$, square plate at $T_r=23^\circ C$

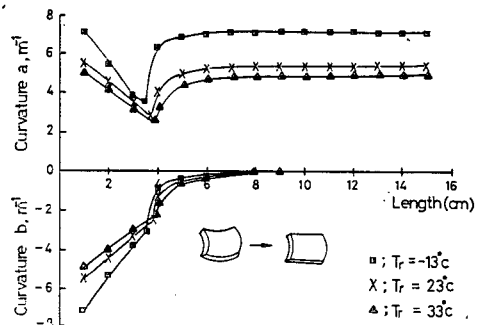


Fig. 9 Curvature change with room temperatures for $[0_2/90_2]_T$, square plate

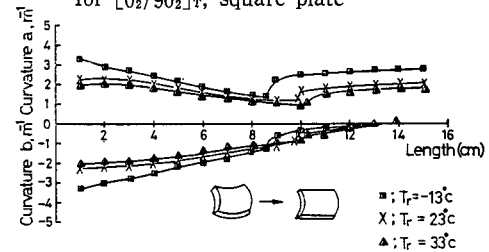


Fig. 10 Curvature change with room temperatures for $[0_5/90_5]_T$, square plate

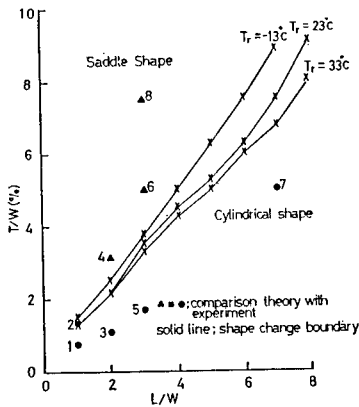


Fig. 11 Critical boundary of shape change for various configurations of laminates.

층판의 형태의 변화를 관찰할 수 있다.

Room 온도의 영향을 관찰하기 위하여 $[0_2/90_2]_T$ 인 경우 $T_r=33^\circ\text{C}$, 23°C , -13°C 로 변화시켰을 때 Fig. 9에서 보인 바와 같이 T_r 이 낮아수록 anticlastic warping에서는 a, b 의 곡률은 증가하며 cylindrical warping에서는 더 큰 곡률을 갖는 원통형 평판을 얻을 수 있다. 다시말해서 적층판의 모양이 23°C , 33°C 로 될 수록 평평한 평판으로 변하는 것을 알 수 있다. 곡률이 $T_r=-13^\circ\text{C}$ 에서 $T/W=1.47\%$ 인 3.4cm, $T_r=23^\circ\text{C}$ 에서 $T/W=1.27\%$ 인 3.9cm, $T_r=33^\circ\text{C}$ 에서 $T/W=1.24\%$ 인 4.0cm에서 안장모양에서 원통형 모양으로의 변화를 알 수 있다.

온도가 두께의 영향을 동시에 관찰하기 위하여 $[0_5/90_5]_T$ 를 사용하였다. Fig. 10에 보인 바와 같이 room 온도에 따라 평판의 곡률의 변화가 Fig. 9에서 얻은 결과와 같은 경향이며 $[0_2/90_2]_T$ 에서 보다 평판의 두께가 두꺼워져 온도에 따른 곡률 변화가 적어 온도 영향이 적음을 알 수 있으며 $T_r=-13^\circ\text{C}$ 에서 8.5cm, $T_r=23^\circ\text{C}$ 에서 9.8cm, $T_r=33^\circ\text{C}$ 에서 10.1cm로 적층판의 형태가 변함을 관찰할 수 있다. 일반적인 형상을 갖는 적층판에 두께, 폭, 길이, 온도영향을 관찰하기 위하여 정사각형뿐만 아니라 직사각형인 모든 경우에 대해서 복합적층판의 주요인자인 L, T, W, T_r, T_c 의 함수로 C.L.T.의 적용 영역의 한계와 모양의 변화를 도식화하였다. Fig. 11에 보인바와 같이 $T_r=23^\circ\text{C}$ 일때 $L/W=1$ 에서 $T/W=1.27\%$ 이하에서는 항상 C.L.T.의 적용이 불가능해지며 긴 직사각형이 될수록 C.L.T.의 적용 불가능의 영역이 거의 비례적으로 결정됨을 볼 수 있다. $T/W=5\%$ 일때 $T_r=-13^\circ\text{C}$ 에서 $L/W=4$, T_r

$=23^\circ\text{C}$ 에서 $L/W=5$, $T_r=33^\circ\text{C}$ 에서 $L/W=5.25$ 로 복합적층판의 모양이 변하며 $\frac{L}{W}=4$ 로 일정할 때 $T_r=-13^\circ\text{C}$ 일때 $T/W=5\%$, $T_r=23^\circ\text{C}$ 일때 $T/W=4.5\%$, $T_r=33^\circ\text{C}$ 일때 $T/W=4.25\%$ 에서 C.L.T.의 모순적 적층판의 모양이 변한다. 다시말해서 정사각형 적층판의 경우에 성립된 온도의 영향이 직사각형인 경우에도 $T_r=33^\circ\text{C}$, 23°C , -13°C 로 갈수록 C.L.T.의 적용 영역이 좁아진다. 적층판 모양 변화의 경계 주위에서는 Fig. 7에서 알 수 있듯이 원통형 모양을 갖기 시작하면서 다른 한쪽의 곡률이 남아 있어서 완전한 원통형 형태를 갖기까지는 중간 형태의 적층판의 모양을 이룬다. 여기서 ①~⑧까지 8가지 경우에 대하여 시편을 실험한 결과와 비교하기 위해서 시편을 제작하고 이론적 결과와 실험에서 얻은 곡률, 모양을 비교한다. (Table 2 참조)

4. 결 론

비대칭 복합적층판의 warping을 large deflection theory를 이용하여 해석한 결과 다음과 같은 결론을 얻었다.

- (1) 재료 상수만 결정되면 필요한 복합적층판의 곡률과 크기를 갖는 적층판을 얻을 수 있다.
- (2) 적층판의 크기가 일정 하더라도 사용온도가 변함에 따라 C.L.T.가 적용되지 않는 영역이 변하며 평판의 곡률이 변한다.
- (3) 적층판의 크기가 변함에 따라 warping 정도의 변화를 일정한 수치적 경계값으로 얻을 수 있다.
- (4) 적층판이 두꺼울수록 온도의 영향이 적으며 cylindrical warping에서는 적층판의 길이와 폭이 증가할 때 a, b 곡률은 일정한 값에 접근함을 알 수 있다.
- (5) 비틀림이나 곡률을 갖는 복합재료 구조물(자동차의 rotor, fan blade, 항공기의 wing panel, 등체)의 설계나 제작에 중요하게 이용될 수 있다.

참 고 문 헌

- (1) S.W. Tsai and H.T. Hahn, Introduction to Composite Materials, Technomic Publishing Co., Inc., Westport, CT06880, 1980.
- (2) N.J. Pagano and H.T. Hahn, "Evaluation of Composite Curing Stresses", Composite Materials Testing and Design (4th Conference), ASTM

- STP 617, 1977, p. 317-329.
- (3) R.M. Jones, *Mechanics of Composite Materials*, McGraw-Hill Co., New York, 1975, p. 147-173.
- (4) M.W. Hyer, "Calculations of the Room Temperature Shapes of Unsymmetric Laminates", *J. of Composite Materials*, Vol. 15, July 1981, p. 296-310.
- (5) M.W. Hyer, "Some Observations on the cured shape of Thin Unsymmetric Laminates", *J. of Composite Materials*, Vol. 15, March 1981, p. 175-194.
- (6) H.T. Hahn, "Warping of Unsymmetric Cross-Ply Graphite/Epoxy Laminates", *Composite Review*, 1981, p. 114-117.
- (7) H.T. Hahn and R.Y. Kim, "Swelling of Composite Lamintes", *ASTM STP 658*, 1978, p. 98-120.
- (8) F.W. Crossman, R.E. Mauri and W.J. Warren, "Moisture-Altered Viscoelastic Response of Graphite/Epoxy Composite", *ASTM STP 658*, 1978, p. 205-220.
- (9) Y.C. Fung, *Foundations of Solid Mechanics*, Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, NJ, 1965, p. 354-355, p. 434-470.
- (10) Brice Carnahan, H.A. Luther, James O. Wilkes, *Applied Numerical Methods*, 1969, John Wiley & Sons, Inc., p. 308-329.
- (11) George Lubin, *Handbook of Fiber Glass and Advanced Plastics Composites*, Von Nostrand Reinhold Company 1969, p. 708-746.
- (12) W.J. Jun, "Warping Analysis of Unsymmetric Laminated Composites by Residual Curing Stress", M.S. Thesis, KAIST, 1983.