

<論 文>

慣性車를 가진 回轉子の 動特性에 관한 研究†

許 鏞 政* · 金 炳 九** · 李 長 茂***

(1983年 3月 15日 接受)

A Study on Dynamic Characteristics of Rotor with Flywheel

Y. J. Huh, B. K. Kim and J. M. Lee

Abstract

The purpose of this study is to determine the general frequency expression for a rotating shaft of uniform cross section, supported by two bearings, and carrying flywheel at the free end.

The bearing spacing and the ratio of the weight of flywheel to the total distributed weight are used as parameters.

The data have thus been reduced to dimensionless form so that the results are generally applicable for this type of rotor.

Frequencies for the first three modes of vibration are determined.

Experimental investigation with rotor/flywheel model confirmed the critical speed frequencies lie between analytical models with simply supported-simply supported boundary conditions and spring supported-spring supported boundary conditions.

기 호 설 명

- EI : 보의 굽힘강성
- J : 자유단에 있어서 횡축에 대한 관성차의 질량 관성 모우멘트
- ω : 원진동수
- pL : 고유치 문제에 대한 특성치
- $P = \frac{gJ}{wL^3}$
- w : 단위길이당 축의 무게
- g : 중력
- N_c : 위험속도
- W : 관성차의 무게

- N : 축의 총무게에 대한 관성차 무게의 비
- L : 축의 길이
- y : 횡방향 변위
- a : 축 전체의 길이에 대해서 베어링 지지간격이 차지하는 비
- b : 축 전체의 길이에 대해서 지지 베어링 B와 끝단의 관성차 사이 간격이 차지하는 비
- $Q = \frac{kL^3}{EI}$
- k : 베어링의 스프링 상수
- N_z : 베어링에서 열당 rolling elements 의 수
- D_0 : 불직경
- α : 접촉각
- Q_{max} : Rolling element 의 최대하중
- F_r : 반경 방향힘
- δ_r : 반경방향 변형

† 1982년도 대한기계학회 추계 학술대회에서 발표

* 정희원, 한국과학기술원 연구부

** 정희원, 한국에너지연구소

*** 정희원, 서울대학교 공과대학

1. 서 론

보다 우수한 성능을 지닌 고속회전기에 대한 수요가 늘어감에 따라 1차 위험속도 이상의 속도에서 가동되는 회전자의 제작이 불가피하게 되었다⁽¹⁾. 발전소의 터어빈의 경우에는 3차 위험속도와 4차 위험속도 사이에서 가동되는데 이와같은 회전자의 위험속도를 정확히 예측하는 것은 회전자의 설계에 있어서 매우 중요하다^{(1), (2)}.

원자력 발전소에서는 냉각수 펌프로써 수직형 원심축류펌프를 주로 사용하는데 여기에는 전원공급이 중단될 경우에 발생하는 급격한 유량역류를 막기 위해 유량감소 시간을 연장시키는 관성차가 모우터축에 장치되어 있다⁽³⁾.

이 관성차로 말미암은 회전자 동특성의 변화를 계산하여 예기치 못한 축의 파손을 방지하는 것은 원자력 발전소의 경우, 펌프 운전중 방사능 물질을 포함하므로 원자력 발전소의 안정성, 신뢰성에 주요한 영향을 미치게 된다⁽⁴⁾.

관성차를 가지는 회전자와 같은 형태의 기계는 engine, 공작기계, press, 송풍기, compressor 및 여러 산업기계의 동력전달 장치에서 많은 예를 볼 수 있다.

R.B. Green은 자이로 효과를 고려한 휨 회전자의 위험속도 계산에 있어서 lumped parameter 모델을 사용하였다⁽⁵⁾.

그러나 lumped parameter 모델은 고차 진동형을 예측하는데 있어서 부적합하였으므로 R.L. Eshleman과 R.A. Eubanks는 연속계 모델을 사용하여 동일한 문제를 해결하였다⁽¹⁾.

T.C. Huang과 Frank C.C. Huang도 이와 비슷한 모델을 채택하여 위험속도와 회전자의 mode shape을 구하였다⁽⁶⁾.

Wojnowski와 Faucett는 자유단에서 관성차를 가지고 두 개의 베어링으로 지지된 균일 단면 회전자의 일반적인 진동수 방정식을 유도하였다⁽⁷⁾.

이들은 베어링 지지를 단순 지지로 가정하고 자유단의 관성차를 집중질량으로 가정하여 동특성을 해석하였으며 실험결과와 비교하였다.

그 결과 자유단에 위치한 관성차의 회전 관성을 무시함으로써 발생하는 오차가 1차 위험속도를 제외하고는 고차로 올라갈수록 점점 더 심각해 지는 것을 보게 되었다.

본 연구에서는 이 관성차의 회전관성과 베어링의

stiffness를 고려함으로써 좀 더 정확한 해석적 결과를 얻는데 역점을 두었다.

해석 결과의 확인을 위해 수학적 모델과 유사한 회전자 모델을 제작한 후 이 모델에 대한 이론값과 실험값을 비교하였다.

본 연구에서 매개 변수로 택한 관성차의 크기 및 베어링 지지 간격 변화에 따른 고유 진동수의 정성적, 정량적 분석도 아울러 수행되었다.

2. 관성차를 가지는 회전자의 수학적 모델에 대한 동특성 해석

2.1. 운동 방정식

관성차를 가지는 회전자의 수학적 모델을 Fig. 1에 도시하였다.

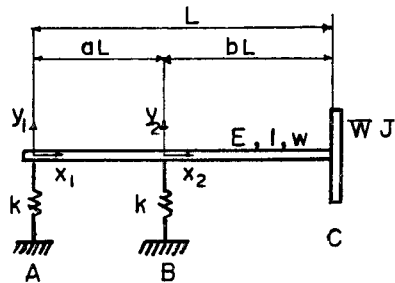


Fig. 1 System model.

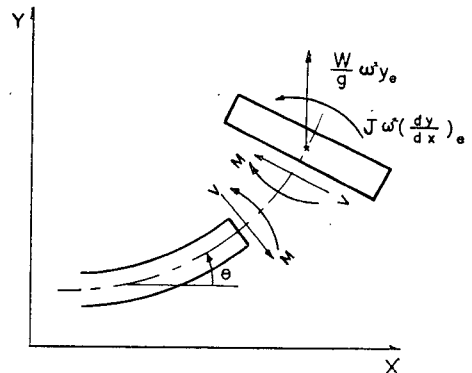


Fig. 2 Boundary conditions at the right end.

관성차는 비교적 얇은 두께를 가진 원판으로 생각하였고 축은 단면적이 일정하며 질량 분포가 균일하다고 가정하였다.

베어링 지지는 stiffness k 값을 갖는 스프링 지지로 해석하였으며 k 값이 클 경우를 생각하여 단순지지 조건으로도 고려해 보았다.

축의 위험속도는 transverse vibration 을 하는 축의 고유 진동수로 적절히 근사시킬 수 있다고 가정하였다^{(7), (8), (9), (10)}.

AB 와 BC 부분에서 제각기 다른 좌표계를 선정하였으며 B에서의 연속조건을 사용하여 문제를 풀었다.

Fig. 1에서 AB부분 및 BC부분에 대한 변위를 각각 $y_1(x_1, t)$, $y_2(x_2, t)$ 라 하면 운동 방정식은 다음과 같이 된다.

$$EI \frac{\partial^4 y_1(x_1, t)}{\partial x_1^4} + \frac{w}{g} \frac{\partial^2 y_1(x_1, t)}{\partial t^2} = 0, \quad 0 \leq x_1 \leq aL \quad (1)$$

$$EI \frac{\partial^4 y_2(x_2, t)}{\partial x_2^4} + \frac{w}{g} \frac{\partial^2 y_2(x_2, t)}{\partial t^2} = 0, \quad 0 \leq x_2 \leq bL \quad (2)$$

위험속도는 다음 식으로부터 결정될 수 있다.

$$N_c = \frac{60 \omega}{2\pi} = \frac{60}{2\pi} \sqrt{\frac{(\rho L)^4 g EI}{w L^4}} \text{ (revolutions per minute)} \quad (3)$$

여기서 $p = \sqrt{\frac{w \omega^2}{g EI}}$ 이다.

식 (3)에 있어서 (ρL) 의 값은 진동수 방정식의 근이다.

2.2. 경계 조건(Spring Supported)

필요 충분한 경계 조건과 연속 조건은 다음과 같다.

$$EI \frac{\partial^2 y_1(x_1, t)}{\partial x_1^2} \Big|_{x_1=0} = 0 \quad (4)$$

$$EI \frac{\partial^3 y_1(x_1, t)}{\partial x_1^3} \Big|_{x_1=0} = -k y_1(x_1, t) \Big|_{x_1=0} \quad (5)$$

$$y_1(x_1, t) \Big|_{x_1=aL} = y_2(x_2, t) \Big|_{x_2=0} \quad (6)$$

$$\frac{\partial y_1(x_1, t)}{\partial x_1} \Big|_{x_1=aL} = \frac{\partial y_2(x_2, t)}{\partial x_2} \Big|_{x_2=0} \quad (7)$$

$$\frac{\partial^2 y_1(x_1, t)}{\partial x_1^2} \Big|_{x_1=aL} = \frac{\partial^2 y_2(x_2, t)}{\partial x_2^2} \Big|_{x_2=0} \quad (8)$$

$$EI \frac{\partial^3 y_1(x_1, t)}{\partial x_1^3} \Big|_{x_1=aL} - k y_1(x_1, t) \Big|_{x_1=aL} = EI \frac{\partial^3 y_2(x_2, t)}{\partial x_2^3} \Big|_{x_2=0} \quad (9)$$

$$EI \frac{\partial^3 y_2(x_2, t)}{\partial x_2^3} \Big|_{x_2=bL} = -\frac{W}{g} \omega^2 y_2(x_2, t) \Big|_{x_2=bL} \quad (10)$$

$$EI \frac{\partial^2 y_2(x_2, t)}{\partial x_2^2} \Big|_{x_2=bL} = J \omega^2 \frac{\partial y_2(x_2, t)}{\partial x_2} \Big|_{x_2=bL} \quad (11)$$

2.3. 진동수 방정식(Spring Supported)

운동 방정식에 경계 조건과 연속 조건을 적용하면 다음과 같은 진동수 방정식을 얻게 된다.

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & d_{22} & 1 & d_{24} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & d_{34} & 0 & -1 & 0 & -1 \\ d_{41} & d_{42} & d_{43} & d_{44} & -1 & 0 & -1 & 0 \\ d_{51} & d_{52} & d_{53} & d_{54} & 0 & 1 & 0 & -1 \\ d_{61} & d_{62} & d_{63} & d_{64} & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d_{75} & d_{76} & d_{77} & d_{78} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d_{85} & d_{86} & d_{87} & d_{88} \end{vmatrix} = 0 \quad (12)$$

$$d_{22} = d_{24} = \frac{Q}{(\rho L)^3}$$

$$d_{31} = -d_{42} = -d_{51} = \sin a\rho L$$

$$d_{32} = d_{41} = -d_{52} = \cos a\rho L$$

$$d_{33} = d_{44} = d_{53} = \sinh a\rho L$$

$$d_{34} = d_{43} = d_{54} = \cosh a\rho L$$

$$d_{61} = \frac{Q}{(\rho L)^3} \sin a\rho L + \cos a\rho L$$

$$d_{62} = \frac{Q}{(\rho L)^3} \cos a\rho L - \sin a\rho L$$

$$d_{63} = \frac{Q}{(\rho L)^3} \sinh a\rho L - \cosh a\rho L$$

$$d_{64} = \frac{Q}{(\rho L)^3} \cosh a\rho L - \sinh a\rho L$$

$$d_{75} = N\rho L \sin b\rho L - \cos b\rho L$$

$$d_{76} = N\rho L \cos b\rho L + \sin b\rho L$$

$$d_{77} = N\rho L \sinh b\rho L + \cosh b\rho L$$

$$d_{78} = N\rho L \cosh b\rho L + \sinh b\rho L$$

$$d_{85} = P(\rho L)^3 \cos b\rho L + \sin b\rho L$$

$$d_{86} = -P(\rho L)^3 \sin b\rho L + \cos b\rho L$$

$$d_{87} = P(\rho L)^3 \cosh b\rho L - \sinh b\rho L \quad (13)$$

2.4. Mode Shape

앞에서 논의된 단순지지조건에 따르는 deflection curve 방정식은

$$y_1 = C_{1L} \sin p x_1 + C_{3L} \sinh p x_1, \quad 0 \leq x_1 \leq aL \quad (14)$$

$$y_2 = C_{1R} \sin p x_2 + C_{2R} \cos p x_2 + C_{3R} \sinh p x_2 + C_{4R} \cosh p x_2, \quad 0 \leq x_2 \leq bL \quad (15)$$

mode shape 은 y_1, y_2 에서 상수 $C_{1L}, C_{3L}, C_{1R}, C_{2R}, C_{3R}, C_{4R}$ 만 계산되면 구해질 수 있다.

경계 조건과 연속 조건으로부터

$$C_{1L} = -\frac{C_{4R}}{\sin a\rho L} \quad (16)$$

$$C_{3L} = \frac{C_{4R}}{\sinh a\rho L} \quad (17)$$

$$C_{2R} = -C_{4R} \quad (18)$$

$$C_{1R} = \frac{-C_{4R} [P(\rho L)^3 (\sin b\rho L + \sinh b\rho L) - (\cos b\rho L + \cosh b\rho L) + M_1]}{P(\rho L)^3 (\cos b\rho L - \cosh b\rho L) + (\sin b\rho L + \sinh b\rho L)} \quad (19)$$

$$C_{3R} = \frac{-C_{4R} [P(\rho L)^3 (\sin \beta \rho L + \sinh \beta \rho L) - (\cos \beta \rho L + \cosh \beta \rho L) + M_2]}{P(\rho L)^3 (\cosh \beta \rho L - \cos \beta \rho L) - (\sinh \beta \rho L + \sin \beta \rho L)} \quad (20)$$

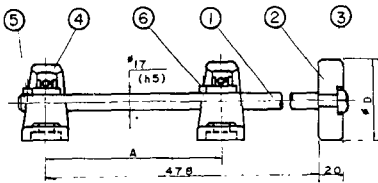
여기서 $M_1 = \{P(\rho L)^3 \cosh \beta \rho L - \sinh \beta \rho L\} (\coth \alpha \rho L - \cot \alpha \rho L)$

$M_2 = \{P(\rho L)^3 \cos \beta \rho L + \sin \beta \rho L\} (\coth \alpha \rho L - \cot \alpha \rho L)$ 로 된다.

이 상수들은 C_{4R} 을 1로 두면 특정한 진동수와 지지 조건에 대해서 계산될 수 있다. 이 값을 (14), (15) 식에 대입하면 mode shape이 구해진다.

3. 실험

수학적 해석 결과를 확인해 보기 위하여 실험모델을 제작하였으며 실험모델의 조립도가 Fig. 3에 나와 있다.



NO.	DESCRIPTION	MATERIAL	QUANTITY	SIZE	REMARK
1	MAIN SHAFT	S 45 C	1	φ25-450	
2	DISK	S 45 C	3		
3	HEX NUT		1	M12-P125	COMM.
4	PILLOW BLOCK		2	UCP203	COMM.
5	SET SCREW		1	M4-P0.7	COMM.
6	SET SCREW		1	M4-P0.7	COMM.

Fig. 3 Drawing of rotor model.

실험용 모델은 축 자체의 회전관성을 무시할 수 있도록 축의 길이와 지름의 비를 선정하였으며⁽¹¹⁾ 관성차의 크기변화에 따라 관성차의 회전관성이 축의 고유진동수에 미치는 영향을 상세히 고찰하기 위해 관성차를 여러가지 크기로 준비하였다.

베어링은 깊은 홈 단열 베어링 UC 203을 pillow block과 함께 사용하였다. 축은 재질을 S45C로 선택하였으며 베어링 지지를 위해 표면을 정밀 가공하였다.

본 실험에 있어서 foundation floor로는 소형 가진기 위에 설치된 moving plate를 사용하였으며 베어링 지지 간격을 변화시키기 위해 모델 지지대를 별도로 제작하였다.

일단 moving plate 위에 볼트 체결로 모델 지지대를 고정된 후 모델 지지대 상에 다시 실험용 모델을 볼트로 고정하였다.

Fig. 4는 slip table 상에 설치 고정된 실험용 회전자모델의 조립된 모습이다.

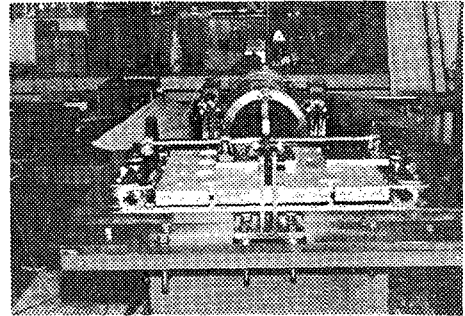


Fig. 4 Rotor model assembly after setting on the slip table.

동특성 실험에 있어서 가진기의 입력 가속도는 0.1g ~ 0.3g 사이에서 변화시켰으며 축의 베어링 지지 간격 및 관성차의 크기를 변경시켜 나가면서 여러 상태에서의 실험을 행하였다.

이 때 slip plate에 가해지는 진동 하중은 다음과 같다.

- 주파수 범위 ; 30~1100 Hz
- sweep rate ; 1 Hz/sec
- control level ; 0.1 g~0.3 g

g : 중력가속도

여기서 주파수 범위는 계산에 의한 1차~3차 고유진동수를 고려하여 결정한 것이다.

변환기는 가속도 변환기를 관성차가 달린 부분에 부착하여 이 가속도 변환기에서 pick-up되는 input signal을 vibration meter와 level recorder를 이용하여 측정하였다.

Fig. 5는 실험의 계통도를 표시한 것이다.

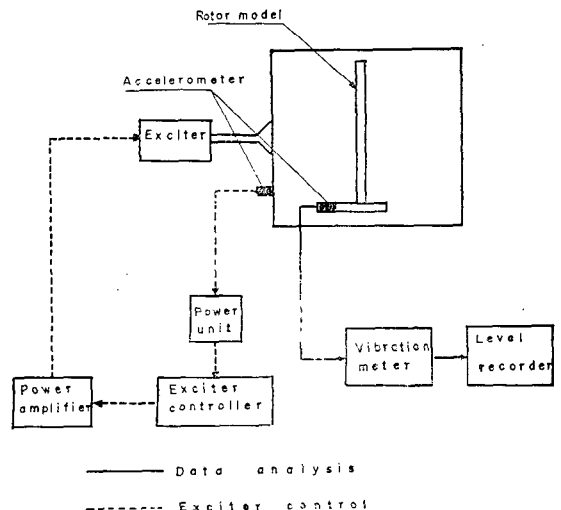


Fig. 5 Block diagram of the experimental set-up.

Table 1 Characteristic values with rotary inertia (simply supported).

a	N			0.0			0.20977			0.4106			1.00315			1.92595		
	(pL) ₁	(pL) ₂	(pL) ₃	(pL) ₁	(pL) ₂	(pL) ₃	(pL) ₁	(pL) ₂	(pL) ₃	(pL) ₁	(pL) ₂	(pL) ₃	(pL) ₁	(pL) ₂	(pL) ₃	(pL) ₁	(pL) ₂	(pL) ₃
0.1	2.02	5.06	8.49	1.72	4.57	7.86	1.56	4.43	7.69	1.32	4.24	7.16	1.15	3.96	6.20			
0.2	2.19	5.54	9.34	1.84	4.98	8.61	1.67	4.82	8.41	1.41	4.59	7.69	1.22	4.22	6.58			
0.3	2.39	6.17	10.20	1.99	5.50	9.47	1.80	5.33	9.24	1.51	5.04	8.27	1.31	4.52	7.08			
0.4	2.66	6.90	9.05	2.18	6.16	8.83	1.96	5.97	8.77	1.64	5.58	8.41	1.41	4.86	7.57			
0.5	3.02	6.83	8.88	2.42	6.51	8.06	2.16	6.39	7.89	1.80	6.06	7.44	1.55	5.20	7.01			
0.6	3.47	6.07	10.15	2.74	5.89	9.08	2.43	5.84	8.74	2.02	5.76	7.58	1.73	5.41	6.29			
0.7	3.89	5.84	9.55	3.14	5.33	9.35	2.80	5.24	9.27	2.32	5.17	8.34	1.99	5.09	6.43			
0.8	3.83	6.75	8.96	3.50	5.34	8.49	3.24	5.02	8.44	2.76	4.77	8.32	2.38	4.67	7.10			
0.9	3.49	6.92	10.21	3.44	6.38	8.47	3.38	5.89	8.02	3.21	5.08	7.72	2.92	4.61	7.54			

Table 2 Comparison of experimental values and calculated values.

(a) Experimental values of natural frequencies of rotor model.

a	N			0.1167			0.32647			0.527346			1.11985			2.04265		
	f ₁	f ₂	f ₃	f ₁	f ₂	f ₃	f ₁	f ₂	f ₃	f ₁	f ₂	f ₃	f ₁	f ₂	f ₃	f ₁	f ₂	f ₃
0.3	54.8	372	1018	44.7	352	998	38.6	338	830	28.7	290	614	21.9	238	591			
0.493	79	567	718	65.7	496	654	55	475	642	40	407	616	29.4	299	600			
0.6886	134	368	1018	104	364	950	86.2	358	700	62	358	526	48	335	413			

(b) Calculated values of natural frequencies of rotor model (spring supported).

a	N			0.1167			0.32647			0.527346			1.11985			2.04265		
	f ₁	f ₂	f ₃	f ₁	f ₂	f ₃	f ₁	f ₂	f ₃	f ₁	f ₂	f ₃	f ₁	f ₂	f ₃	f ₁	f ₂	f ₃
0.3	60.58	407.44	1076.51	46.96	367.86	1004.45	39.61	349.52	939.44	29.56	310.31	761.56	22.37	249.34	617.05			
0.493	90.9	577.01	701.14	67.74	545.26	664.17	57.16	519.48	648.9	41.51	438.07	626.33	31.21	320.89	611.51			
0.6886	151.96	377.93	1047.39	111.87	363.59	1018.66	93.04	359.34	925.79	67.13	353.71	666.09	50.6	345.36	444.32			

베어링 지지간격 변화가 계에 미치는 영향을 고찰해 보기 위해서 지지조건을 단순지지로 한 후⁽¹²⁾ A베어링의 위치를 고정시키고 $a=0.1\sim 0.9$ 인 경우와 축무계에 대한 관성차 무게의 비 $N=0.0, 0.20977, 0.4106, 1.00315, 1.92595$ 인 경우에 대한 계산을 수행하였다.

이 결과가 Table 1에 수록되어 있다.

회전자 모델의 실험값을 얻기 위해서 모델 축의 길이를 1로 보았을 때 A베어링의 위치는 고정시키고 B베어링의 위치는 0.3, 0.493, 0.6886 되는 지점으로 변경시켜 나가면서 각각의 베어링 지지간격에 대하여 고유 진동수의 값을 측정하였으며 또한 관성차의 크기를 달리하여 축의 끝단에 부착시킴으로써 관성차 크기 변화에 따른 고유 진동수의 변화도 측정하였다.

이 실험값과 비교하기 위한 이론값을 얻기 위해서 지지조건은 스프링 지지를 사용하였다.

회전자 모델의 이론값과 실험값이 Table 2에 비교되어 있다. 단순 지지로 생각했을 경우 system model의 mode shape은 다음 Fig. 6과 같이 된다.

4. 실험 결과 및 고찰

관성차를 가지는 회전자의 진동특성을 규명하기 위하여 Wojnowski의 모델과 같이 관성차의 회전관성과 베어링 지지부의 Stiffness를 무시하고 이론해를 구하면 고유 진동수의 예측에 있어서 실험치에 대하여 약 25~44%의 오차를 갖게 된다.

그러나 본 연구에서 제시된 바와 같이 관성차의 회전관성과 베어링 지지부의 stiffness를 고려하여 고유치 문제를 풀면 계산과정은 다소 복잡하여 지나 고유진동수의 예측에 있어서 실험치에 대하여 오차가 약

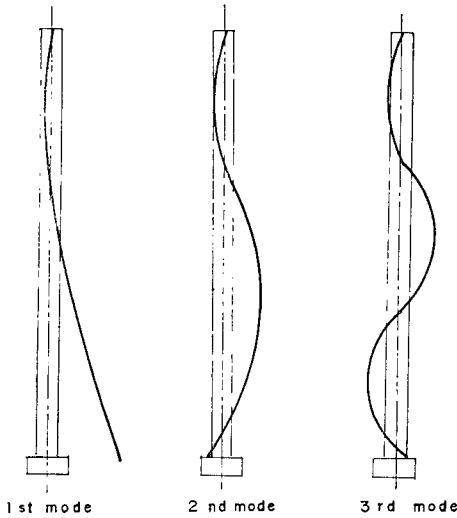


Fig. 6 Mode shapes of rotor model($a=0.3, N=0.4106$, simply supported).

2~8%로 감소되어 수직펌프 회전자의 진동특성을 정확히 규명할 수 있음을 알 수 있다. 본 연구에서 채택된 베어링은 k 값을 고려하지 않으면 많은 오차가 발생하나 k 값이 어느 정도 이상 클 경우에는 단순지지로 보아 해석하는 것이 편리하다.

본 연구에서 계산한 바에 의하면 k 값이 $7.84 \times 10^7 N/m$ 이상의 경우에는 단순지지로 보아도 무방한 것으로 나타났다.

단순지지의 경우도 공학적 응용도가 높으므로 이 경우에 베어링 지지간격 변화가 전체 계에 미치는 영향을 추가 해석하였다.

베어링 간격을 계속 변화시켜 나가면서 실험을 수행한 결과 어느 간격에서 가장 모델이 stiff 해 지는가를 아는 것을 알 수 있었다. 본 연구의 실험치와 이론치의 비교로 볼 때 ball-bearing 에 있어서는 damping 이 회전자의 위험속도에 미치는 영향이 극히 작은 것으로 나타났다. 이론적 해석치와 실험결과를 검토해 보면 만족할 만한 일치를 보여 주므로 실제 회전자 모델에 대한 본 연구의 접근 방법이 적합하였음을 알 수 있다.

5. 결 론

본 연구에서는 실제 수직펌프 속에 내장되어 있는 관성차를 가지는 회전자 부분에 관심을 가지고 이 부

분의 진동해석을 위하여 수학적 모델을 설정하고 이론적 해석을 하였으며 실험용 모델에 대한 측정치와 비교 검토한 결과 다음과 같은 결론을 얻었다.

(1) $a=0.493, N=1.11985$ 인 경우에 있어서 실험치는 $f_1=40 \text{ Hz}, f_2=407 \text{ Hz}, f_3=616 \text{ Hz}$ 이다.

스프링 지지조건을 사용한 이론적 해석에 의한 고유진동수값은 $f_1=41.51 \text{ Hz}, f_2=438.07 \text{ Hz}, f_3=626.33 \text{ Hz}$ 로 되고 실험치와의 오차는 f_1 이 3.77%, f_2 가 7.6%, f_3 가 1.68%이었다.

이 이외의 경우도 만족할 만한 일치를 보였다.

(2) 단순 지지조건인 경우 베어링 지지 간격 변화가 계에 미치는 영향을 고찰해 본 결과 다음과 같은 결론을 얻었다.

f_1 에 있어서 $N=0.4$ 이하의 경우는 $a=0.7$ 부근에서 N 이 이보다 커질 경우는 $a=0.9$ 부근에서 가장 stiff 해 진다.

f_2 에 있어서 $N=0$ 인 경우에는 $a=0.4$ 부근에서 $N=0.20907, 0.4106, 1.0$ 인 경우에는 $a=0.5$ 부근에서 $N=1.9$ 인 경우에는 $a=0.6$ 부근에서 가장 stiff 해 진다.

f_3 에 있어서 $N=0$ 인 경우에는 $a=0.3, 0.6, 0.9$ 인 지점에서 $N=0.20977, 0.4106$ 인 경우에는 $a=0.3, 0.7$ 인 지점에서 $N=1.92595$ 인 경우에는 $a=0.4, 0.9$ 인 지점에서 가장 stiff 해 진다.

References

1. R.L. Eshleman, R.A. Eubanks, "On the Critical Speeds of a Continuous Shaft-Disk System", Journal of Engineering for Industry Nov. 1967
2. W. Kellenberger, "Should a Flexible Rotor Be Balanced in N or $(N+2)$ Planes?", Journal of Engineering for Industry May 1972
3. Preliminary Safety Analysis Report for Korea Nuclear Unit 5&6.
4. 김병구 외 7인, "원자로 기기의 동특성 해석 및 고장진단", 한국에너지 연구소, 1980년도 연구보고서
5. R.B. Green, "Gyroscopic Effects on the Critical Speeds of Flexible Rotors", Journal of Applied Mechanics, vol.15 1948
6. T.C. Huang, Frank C.C. Huang, "On Precession and Critical Speeds of Two Bearing Machines

- with Overhung Weight”, Trans. ASME, Journal of Engineering for Industry, Nov. 1967.
7. Reyton F. Wojnowski, Thomas R. Faucett, “Critical Speeds of Two Bearing Machines with Overhung Weight”, Trans. ASME, Journal of Engineering for Industry, Vol.83, Nov.1961
 8. R.G. Lowey, V.J. Piarulli, “Dynamics of Rotating shafts”, SVM-4, The Shock and Vibration Information Center, 1969
 9. R.H. Badgley, A.J. Smalley, Mr. Stanley, “Machinery Vibration Seminar”, Mechanical Technology Incorporated, January 1975.
 10. Neville F. Rieger, James F. Crofoot, “Vibrations of Rotating Machinery”, Part 1, The Vibration Institute November 1977
 11. S. Timoshenko, Vibration Problems in Engineering, 4th Ed., John Wiley & Sons, New York, 1974.
 12. 허 용 정, “관성차를 가진 회전자의 동특성에 관한 연구”, 서울대학교 석사학위 논문, 1982 .
 13. Harris., T.A., Rolling Bearing Analysis, John Wiley, 1966

부 록

볼 베어링의 스프링 비 k 는 다음과 같이 계산될 수 있다⁽¹³⁾.

$$\delta_r = 0.002 \frac{Q_{\max}^{2/3}}{D_b^{1/3} \cos \alpha}$$

$$Q_{\max} = \frac{5 F_r}{N_z \cos \alpha}$$

$$k = 3353.698 N_z D_b^{1/3} \cos^2 \alpha \delta_r^{1/2}$$

여기에서 사용된 기호는 다음과 같다.

N_z : 볼의 수

α : 볼의 접촉각(degree)

F_r : 반경방향의 힘(radial force) (N)

D_b : 볼의 지름(mm)

깊은 홈 볼 베어링 UC 203의 경우

1) 단열 내의 볼수 : $N_z = 8$

2) 볼의 지름 : $D_b = \frac{17}{64} \text{ in} = 6.747 \text{ mm}$

3) 볼의 접촉각 : $\alpha = 48^\circ$

4) $F_r = 38.906 \text{ N}$

이 값을 대입하여 계산하면

$k = 1.54 \times 10^7 \text{ N/m}$ 가 된다.