

# 비선형 Normal Mode 진동의 현황과 과제

編輯理事 朴 喆 熙

## 1. 서 론

비선형 진동은 그간 많은 연구를 하여 왔으나, 주로 1 자유도계에 국한되었으며, 2 자유도 이상의 계에서는 아직도 실용성 있는 연구 결과는 극히 제한된 상태에 머물러 있다. 최근 약 30 여년간 다자유도계의 비선형 normal mode 진동은 산발적으로 연구되어 오다가 1966년 Rosenberg 교수<sup>(1)</sup>가 이를 종합 정리 하였으며, 그 이후에도 많은 연구가 계속되고 있다. 본 해설에서는 이 분야의 주요 연구결과를 소개하고 앞으로 다루어져야 할 과제에 대하여 설명하고자 한다.

## 2. 비선형 진동의 일반사항

일반적으로 동역학계는 비선형이 대부분이지만 해석을 쉽게 하기 위해서 선형화(linearization)한 계에 대해 운동해석을 먼저 하게 된다. 선형해석이 만족스러운 결과를 낼 때도 있지만, 오늘날 고도의 과학 기술 분야에서는 선형해석이 충분하지 못한 경우가 많이 발생하게 된다. 비선형계를 선형화함으로써, 해석결과치의 정확성을 흔히 문제시하지만, 그보다 더욱 중요한 것은 선형계에서 생각할 수 없는 색다른 운동 현상이 나타나기 때문에 비선형 이론이 필요하다. 예로서 1 자유도 비선형 진동을 요약하기로 한다.

### 2.1. 1 자유도계

운동방정식이 다음과 같이 주어졌을 때,

$$m(x, \dot{x})\ddot{x} + g(x, \dot{x})\dot{x} + f(x) = p(t) \quad (1)$$

$$p(t) = p(t + \Omega)$$

여기서  $g(x, \dot{x})$ 은 감쇠계수,  $f(x)$ 는 복원력, 그리고  $p(t)$ 는 주기가  $\Omega$ 인 주기적인 외력이다. 만일  $m$ 과  $g$ 가 상수이고  $f(x)$ 가 일차함수이면 선형계로서,  $p(t)$ 의 주기가 고유진동수와 같을 때 공진현상이 발생하므로 주의를 기울여야 한다.

만일  $m, g, f$  중 한개라도 선형조건을 만족하지 않을 때에는 계(1)은 비선형이 된다. 선형계에서는 고유진동수가 진폭에 관계없이 일정하지만, 비선형일 때는 진폭(A)에 따라 변동한다. 식 (1)의 정상해를 구하면,  $A-\Omega$  평면에서 볼 때, 주어진  $\Omega$ 에 대하여 선형계는 한개의 진폭을 갖게 되지만 비선형계에서는 그림 1과 같이 두 개 이상의 응답(A)을 갖게 되며 이 응답은 불안정(unstable)한 경우도 있을 수 있다. 불안정한 운동은 수치해석으로 볼 때 정상해로서 계

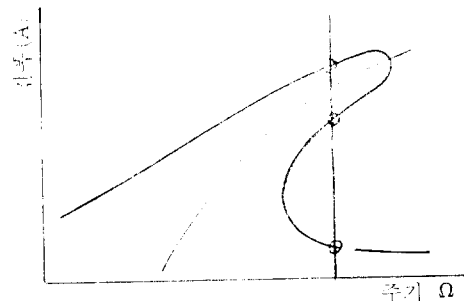


그림 1 비선형 강제 진동의 응답곡선

## ◆ 解 說

산되지만 실제적으로 그러한 운동은 일어나지 않는다.

복원력  $f(x)$ 의 형태에 따라서 준조화 진동(subharmonic vibration)이 일어나는 경우도 있다. 즉 외력  $p(t)$ 의 진동수가 고유진동수의  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{3}$ ,  $\frac{1}{4}$  등에서 공진 현상이 일어난다. 이것 역시 선형계에서는 찾아 볼 수 없다.

외력  $p(t)$ 가 없을 때에도 일어나는 자력진동(self-excited vibration)은 비선형계의 특색이라 할 수 있다. 마찰력의 비선형특성에서 야기되는 자력진동으로서, 각종 브레이크장치의 squeal 소음, 바이올린 줄의 횡진동, 공작기계의 chatter( chatter), 회전축 베어링의 오일 휩(oil whip) 등을 들 수 있다. 운동 전달기구의 상호 간섭에서 야기되는 것으로서, 자동차 조종장치의 시미(shimmy) 현상을 들 수 있으며, 공기력의 비선형 특성에서 야기되는 비행기 날개의 플러터(flutter) 현상, 송전선의 횡진동, 기타 구조물의 자력진동을 들 수 있다. 이러한 진동은 한계 사이클(limit cycle) 또는 완화진동(relaxation oscillation)으로 해석되고 있다.

이러한 비선형 현상은 1 자유도계에서는 비교적 완벽하게 해석할 수 있는 이론이 적용되어 있지만, 다자유도계에서도 유사한 현상이 일어난다고 생각할 수 있지만 아직까지 이론이 정립되어 있지 않고 있다. 비선형 다자유도계의 이론을 정립하기 위하여 선형계의 normal mode 진동을 정의하기로 한다.

### 2.2. 다자유도계의 Normal Mode 진동의 정의

그림 2와 같이  $n$  개의 질량  $m_1, m_2, \dots, m_n$  이 스프링과 감쇠장치로 지지될 때 운동방정식은

$$m_i \ddot{x}_i + \sum_{j=1}^n C_{ij}(x, \dot{x}) \dot{x}_j + \frac{\partial V(x)}{\partial x_i} = p_i(t), \quad i=1, 2, \dots, n \quad (2)$$

여기서  $C_{ij}$ 는 감쇠계수,  $V(x)$ 는 포텐셜 에너지  $p_i(t)$ 는 외력이다. 만일  $C_{ij}$ 가 상수이고,  $V(x)$ 가  $x$ 에 대하여 2차식일 때 선형계라 한다.

선형계는 중첩원리(superposition principle)가 적용되므로 고유값(eigenvalue) 문제로 다룰 수

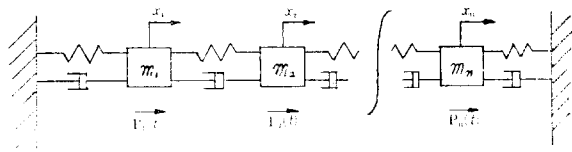


그림 2 다자유도

있기 때문에 강제진동이나 자유진동에서 모우드 해석(modal analysis)의 편리한 방법을 이용할 수 있다.  $n$  자유도계에서는 정확히  $n$  개의 고유 모우드(eigen-mode)가 존재하며, 비감쇠계의 안정성은  $V(x)$ 의 positive definite 특성으로 쉽게 확인할 수 있다. 선형계의 normal mode 진동은 모든 질량이 각 모드에 해당되는 고유진동수를 갖는 주기운동으로써 모든 질량이 동시에 평형상태에 도달했다가 또한 동시에 속도가 영이 된다. 그리고 이 운동을 상태공간(configuration space)에 도시하면 직선으로 되어 임의 질량  $m_i$ 의 변위  $x_i$ 를 알 수 있다면 다른 질량의 변위는  $x_i$ 에 비례하므로 쉽게 알 수 있다.

비선형 다자유도계의 이론이 정립되지 않은 현 시점에서는 문제를 명확히 하기 위하여 우선 감쇠가 없고 외력이 없는 계를 생각한다. 비선형 normal mode는 선형과 유사한 개념으로 다음과 같이 정의된다.<sup>(1,14)</sup>

- (i) 모든 질량  $m_i$ 는 같은 진동수를 갖는 주기 운동을 하고,
- (ii) 모든 질량  $m_i$ 는 같은 시간에 평형상태가 되고;  $x_i(t_1)=0, i=1, 2, \dots, n$
- (iii) 모든 질량  $m_i$ 는 같은 시간에 최대변위에 도달하고;  $\dot{x}_i(t_2)=0, i=1, 2, \dots, n$
- (iv) 임의의 시간  $t$ 일 때, 한 질량  $m_i$ 의 변위  $x_i(t)$ 를 알 수 있으면, 나머지 질량의 변위  $x_j, j \neq i$ 는  $x_i$ 의 단일 함수로 표시된다.

이렇게 정의된 운동을 상태공간에 표시하면 그림 3과 같으며 이를 모우드곡선(modal curve)이라 한다. 선형계의 모우드 곡선은 직선으로 표시된다. 비선형계의 특수한 경우는 직선으로 표시될 수 있으며<sup>(1,2,9,17)</sup> 이러한 normal mode를 similar라 부르며, 직선이 아닐때를 nonsim-

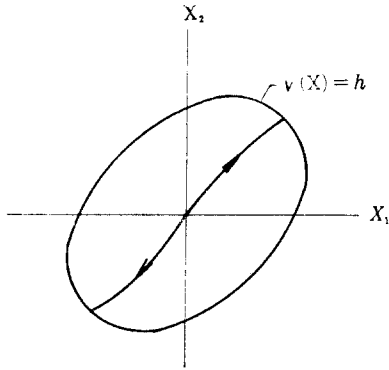


그림 3 모우드곡선(線型系는 直線임)

ilar normal mode 라 하였다.

비선형계는 중첩원리가 적용되지 않으므로 모우드 해석 방법을 활용할 수 없지만, normal mode 에서 공진현상이 일어날 수 있음을 밝혔다<sup>(1,2)</sup>. 공진현상이 기계진동에서 원하지 않는 운동임에 틀림없지만, 비선형계의 normal mode 가 안정(stable)할 때는 공진현상이 예상되고, 불안정할 때는 운동이 앞으로 어떻게 전개될 지 알 수 없으므로 더욱 난처한 입장에 도달하게 된다.

2.3. Perturbation 기법과 비선형도의 분류

일반적으로 비선형진동을 해석할 때 perturbation 기법을 흔히 사용한다. 이 기법은 해가 잘 알려져 있는 선형계에 아주 작은 비선형 인자가 추가된 것으로 가정하여 급수전개 이론을 채택하고 있다. 따라서 이 기법을 사용할 수 있는 비선형계는 선형화가 가능하다고 한다. 즉, 식 (2)의 포텐셜 에너지  $V(x)$ 가 멱급수로서

$$V(x) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n k_{ij} x_i x_j + V_3(x) \quad (3)$$

여기서  $V_3(x)$ 는  $x$ 에 의하여 3차 및 그 이상의 항을 말한다. 비선형진동에서 매트릭스  $[k_{ij}]$ 가 positive definite 일 때, 이 계를 선형화가 가능하다고 한다.

Perturbation 기법의 또 한가지 제한사항은, 비선형 인자에 관한 급수전개에서 급수가 수렴한다는 가정을 두고 있으며, 급수가 수렴하려면

만드시 진폭이 아주 작아야 한다. 그러나 진폭이 얼마나 작아야 한다는 수치적 한계를 규정할 수 없다. 뿐만 아니라 이 기법에는 small divisor 문제가 야기된다.

$$\Delta = \sum_{i=1}^n l_i \omega_i \quad (4)$$

여기서  $l_i$ 는 정수,  $\omega_i$ 는 선형화계의 고유진동수이다. Perturbation 기법의 급수전개에서 small divisor  $\Delta$ 가 분모에 들어가므로  $\Delta=0$ 일 때 이 기법을 사용할 수 없다.  $l_i$ 는 임의 정수이므로  $\omega_i$ 의 비가 유리수일 때  $\Delta=0$ 으로 된다.  $\Delta=0$ 일 때 commensurability 조건이라 하며 내부공진(internal resonance)과 모우드의 불안정성의 가능성이 있는 것으로 알려져 있다<sup>(27)</sup>.

Perturbation 기법을 사용할 수 있는 비선형계를 약한 비선형계(weakly nonlinear system)라 하고, 그렇지 않은 계를 강한 비선형계(strongly nonlinear system)라 하며, 여기서는 진폭이 큰 비선형계의 운동과 선형화가 불가능한 계(nonlinearizable system)를 포함하므로, 정확히 말하면 대부분의 비선형계는 여기에 속한다.

3. 同次系の 事例

식 (2)에 주어진 비선형계에서 비감쇠 자유진동을 우선 생각한다.

$$y_i = \sqrt{m_i} x_i \quad (4)$$

로 변환하면 식 (2)는 다음과 같이 된다.

$$\ddot{y}_i + \frac{\partial V(y)}{\partial y_i} = 0 \quad (5)$$

Rosenberg 와 Hsu<sup>(1,2)</sup>는 특수한 비선형계로서

$$V(y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n \frac{a_{ij}^{(k)}}{k+1} |y_i - y_j|^{k+1}, \quad 0 < k < \infty \quad (6)$$

와 같은 포텐셜 에너지가 주어졌을 때, 동차계(homogeneous system of degree  $k+1$ )라 정의하고, normal mode 진동을 구체적으로 다루었다. 이 계에서  $k=1$ 일때는 선형이 되고,  $k \neq 1$ 일때는 선형화가 불가능한 계가 된다. 따라서 perturbation 기법은 적용이 불가능하다.

선형계에서는 normal mode 의 수는 정확히 자

## ◆ 解 說

유도와 같으나 이 계에서는 자유도보다 많은 normal mode가 존재함을 시사하였다. 모든 모우드 곡선은 직선이며, normal mode를 정리하던 다음과 같은 식을 얻게 된다.

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + C_p x_1 |x_1|^{k-1} &= 0 \\ x_j &= C_{pj} x_1, \quad j=2, 3, 4, \dots, n \end{aligned} \quad (7)$$

이 식을 풀기 위하여 ateb function이란 새로운 함수를 만들어서 해석적인 해답을 구할 수 있다. 이 함수는 주기함수로서 Jacobi elliptic function과 유사하여 그 파형은 진폭과  $k$ 의 값에 따라 다르지만  $k=1$ 일 때 sine 함수와 같다. 이 함수를 활용하여 특정한 형태의 주기적인 외력이 작용되었을 때, 강제진동을 해석할 수 있었다. Normal mode가 불안정한 것도 발견되었으며, 이때에는 공진이 불안정하여 예상할 수 없는 운동으로 비약됨을 시사하였다.

### 4. Normal Mode의 존재

Similar normal mode는 同次系 이외에 특수한 비선형계에 존재함을 알 수 있다. 식 (5)에서 보는 바와 같이 단위질량은  $n$ 차 공간에서 grad  $V$ 란 힘을 작용받아서 운동하고 있다.  $n$ 차 공간의 원점을 통하는 직선에서 grad  $V$ 가 이 직선과 평행할 때 similar normal mode가 있다는 것을 알 수 있다. 이러한 조건을 만족하는 포텐셜 에너지는 선형계에서 자유도수 만큼 존재하나, 일반적인 비선형계에서는 특수한 경우를 제외하면 찾아볼 수 없다.

Nonsimilar normal mode의 존재에 관하여 고전적인 방법으로 약한 비선형 계에서 commensurability 조건이 만족되지 않을 때 자유도수 만큼 존재함을 시사하였다. 그 후 Cooke과 Struble<sup>(4)</sup>는 Commensurability 조건에 상관하지 않고 자유도수와 같은 normal mode진동이 존재함을 입증하였다. 이때에는  $V(x) = V(-x)$ 의 가정만을 두었다.

강한 비선형 계에서 Pak과 Rosenber<sup>(5)</sup>는  $V(x) = V(-x)$ 로 가정하여 최소한 한개의 normal mode가 존재함을 입증하였다. 이는 원

점과  $V(x) = h$ 인 곡면을 연결하는 곡선 중에 action I

$$I = \int_A^B \sqrt{2(h-V)} \sqrt{dx_1^2 + dx_2^2 + \dots + dx_n^2} \quad (8)$$

이 최소로 되는 곡선이 normal mode임을 시사하였다.

그 후 Gordon<sup>(6)</sup>과 Weinstein<sup>(7)</sup>은 강한 비선형 계에서 Commensurability 조건이나  $V(x) = V(-x)$ 의 가정에 관계없이 normal mode는 최소한 자유도수만큼 존재하게 됨을 범함수 해석(functional analysis) 방법으로 입증하였다.

2자유도계의 강한 비선형 계를 중점적으로 다룬 결과 Anand<sup>(8)</sup>는 normal mode가 두 개 이상 존재함을 시사하였으며, 그 중 안정한 것과 불안정한 것이 있음을 입증하였다. Yen<sup>(9)</sup>는 일반적인 비선형계에서 normal mode는 2, 4, 6 등 짝수로 일어나게 되는 것을 입증하였다. Johnson과 Rand<sup>(10)</sup>은 상태 평면의 원점에서 시작되는 궤도의 envelope이 원활하다는 가정하에서 식 (8)에서 정의된 action I의 최대 또는 최소 개념을 활용하여 두 개의 normal mode가 비선형 인자의 변화에 따라 4개로 분리되는 현상을 규명하였다.

이와같이 normal mode진동 분야는 재래방법인 perturbation 기법에서 야기되는 급수의 수렴 여부 등의 문제를 해결함으로써 새로운 국면으로 발전하게 됨을 알 수 있다.

### 5. Normal Mode안정성

#### 5.1. 안정성 개념

동역학계의 운동안정성은 Liapunov 개념(L-stability)과 Orbital stability 개념(P-stability)으로 생각할 수 있다. 이 두가지 개념을 정의하기 위하여 운동방정식을

$$\dot{x} = f(x, t) \quad (9)$$

와 같이  $r$ 차 벡터식으로 주어질 때, 초기 조건  $t=t_0$ 에서  $x=x_0$ 인 해를  $x(x_0, t_0; t)$ 라 할 때 관심있는 운동  $x(a, t_0; t)$ 의 L-stability는 다음과 같이 정의된다.

## 비선형 Normal Mode 진동의 현황과 과제 ◆

$x(a, t_0; t)$  is L-stable if for each  $\epsilon > 0$  there is a  $\delta(\epsilon) > 0$  such that  $|x_0 - a| < \delta(\epsilon)$ , then  $|x(a, t_0; t) - x(x_0, t_0; t)| < \epsilon$  for all  $t > t_0$   
그리고 P-stability의 정의는

$x(a, t_0; t)$  is P-stable if for each  $\epsilon > 0$  there is a  $\delta(\epsilon) > 0$  and function  $t_1(t)$  such that if  $|x_0 - a| < \delta(\epsilon)$ ,  $|x(a, t_0, t) - x(x_0, t_0, t_1(t))| < \epsilon$  for all  $t < t_0$

이 정의에 따르면 normal mode가 L-stable 할 때는 P-stable 하지만, 반대로 P-unstable이면 L-unstable임을 알 수 있다. 그러므로 L-stability 개념에서 불안정할 때 P-stability 개념에서 안정될 수 있다. 예를 들면 단진자 운동  $\dot{x}_2 = \omega x_2$ ,  $\dot{x}_1 = -\omega \sin x_1$ 에서 이를 位相평면에 표시하면 그림 4와 같다. 관심 있는 운동 C는 인접된 운동 C'과 주기가 다르기 때문에 L-unstable 하지만 P-stable임을 알 수 있다.

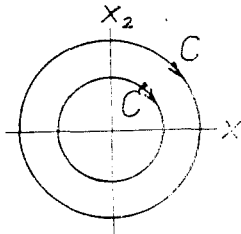


그림 4 단진자 운동의 위상도

일반적으로 normal mode 진동은 L-unstable이다<sup>(1,12)</sup>. 그리고 normal mode 진동은 시간  $t$ 가 개입되지 않는 狀態空間이나 位相空間에서 서술되므로 P-stability 개념으로 해석되어야 한다. 따라서 L-stability 개념에서 해석한 결과, 不安定일 때에는 P-stability 개념에서 재검토되어야 한다<sup>(17)</sup>.

### 5.2. L-stability 개념의 事例

이 개념은 normal mode 진동에서 P-stability를 할 수 있는 充分조건을 만족할 수 있고, 운동방정식이 시간  $t$ 를 독립 변수로 하기 때문에 안정성 해석이 보다 간편하므로 아직까지 흔히 사용하여 왔다.

운동방정식 (5)의 normal mode 진동을  $y^*(t)$ 로 표시하고, 인접된 상태에서 시작된 궤도  $y(t)$

$= y^*(t) + \eta(t)$ 로 하면, 다음과 같은 변분방정식 (variational equation)을 얻게 된다.

$$\ddot{\eta}_i + \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 V}{\partial y_i \partial y_j} \eta_j = 0, \quad i=1, 2, 3, \dots, n \quad (10)$$

이것은 결합된 Hill의 방정식으로 알려져 있다. 여기서  $\frac{\partial V}{\partial y_i \partial y_j}$ 는 normal mode  $y^*(t)$ 에서 값을 취해야 하므로 주기함수로 표시된다. 따라서 식 (10)의 해가 무한히 크게 되면 不安定이고 모든  $t$ 에 대하여 有限한 값을 갖게 되면 安定이다. 이러한 판단을 얻기 위하여 Floquet 理論을 적용할 수 있다. 식 (10)은  $\eta$ 에 대하여 결합(coupling)되어 있으므로 적절한 방법으로 분해(decouple)하고 또한 이를 간략화하여 다음과 같은 Mathieu 식으로 환산할 수 있다.

$$\ddot{z} + (\delta + \epsilon \cos t)z = 0 \quad (11)$$

Mathieu 식의 안정성은 그림 5와 같이 strutt chart를 활용할 수 있다<sup>(1,2,8,12)</sup>.

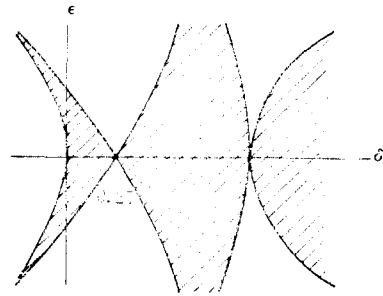


그림 5 Strutt chart(빛금친 영역은 안정)

Hsu<sup>(27)</sup>, Pecelli와 Thomas<sup>(11)</sup> 등은 결합된 Hill의 방정식 (10)을 분해하는 방안을 연구하였다. 분해된 Hill의 방정식은 계수가 주기함수이므로 Fourier 급수를 전개할 때 식 (10)과 같은 완전한 Mathieu 식이 되지 않으므로 이에 관한 연구도 많이 이루어졌다.

감쇠가 없는 자유진동에서는 운동방정식 (5)는 Hamiltonian 계가 되므로 Canonical Perturbation 技法을 활용할 수 있다<sup>(14,15,16,28)</sup>. 이 방법은 비교적 간단한 數式으로 안정성을 해석할 수 있으며, 안정성은 Commensurability 조건과 관계가 있는 것으로 된다. Normal mode가 준

◆ 解 說

재하는 데에도 이 조건이 따라야 하므로 더 많은 연구가 필요하리라 생각된다. 이 방법은 실제적으로 약한 비선형계에 적용되므로 normal mode가 2元化되는 경우에는 쉽게 활용할 수 없다.

5.3. P-stability 와 유사한 개념의 事例

최근에 Month와 Rand<sup>(17)</sup>은 비선형 normal mode 진동을 P-stability 개념으로 해석하기 위하여 에너지 integral  $\frac{1}{2}(\dot{y}_1^2 + \dot{y}_2^2) + V(y_1, y_2) = h$  이외에 제 3의 integral(third integral)  $f(y_1, y_2, \dot{y}_1, \dot{y}_2) = c$ 를 구하여 2自由度系の 안정성을 검토하였다. 두 integral에서  $y_1$ 과  $\dot{y}_1$ 를 소거하면 함수  $g(y_2, \dot{y}_2, h, c) = 0$ 를 얻어서, 이를  $y_2 - \dot{y}_2$  평면에 도시하여 Poincaré Map을 설정할 수 있었다. 이 평면에는 여러가지 운동의 궤적이 그려질 수 있으며 normal mode는 fixed point로서 center 또는 saddle point로 되므로 安定性を 판단할 수 있었다.

이 방법의 強點은 normal mode를 찾아낼 수도 있으며 특히 bifurcate되는 양상을 규명할 수 있을 뿐 아니라 직접 P-stability 해석이 가능하다. 단점으로서, 제 3의 integral은 약한 비선형 계에 한하여 존재할 수 있음이 밝혀졌으며<sup>(18)</sup>, 또한 Gustavson이<sup>(19)</sup> 제시한 제 3의 적분의 급수가 수렴한다는 점이 확정되어 있지 않다. 그러나 이 방법은 사용한 事例가 많지 않았으며, Poincaré Map의 좀 더 구체적인 특성을 연구하여야 하고, commensurability 조건 여하에 따라 제 3의 integral을 구하는 방법이 개발되어야 한다.

강한 비선형 계의 P-stability 해석을 위하여 Syngé<sup>(20)</sup>, Whittaker<sup>(21)</sup>, Lanzo<sup>(25)</sup> 등 많은 사람들은 動力學系の 운동방정식을 쓸 때 시간  $t$ 를 포함하지 않는 기하학적인 방법을 제시하였다. 이는 주로 Riemann 기하학과 變分法(calculus of variation)을 활용할 수 있는 방안에 주력하였다. Syngé<sup>(20)</sup>은 2自由度系에서 P-stability 정의에 명시된 시간 함수  $t_1(t)$ 를 적절히 설정하여 교란(disturbance)  $\beta(t)$ 의 크기와 부호를 그림

6과 같이 정의하므로써  $\beta(t)$ 의 지배방정식을 다음과 같이 유도하였다.

$$\beta + Q(t)\beta = 0 \tag{12}$$

여기서  $Q(t) = \sum_{i,j=1}^2 \frac{\partial^2 V}{\partial y_i \partial y_j} \nu_i \nu_j + 3v^2 k^2$ 이며  $\nu_i$ 는 모우드 곡선의 단위 normal 벡타,  $k$ 는 곡율,  $v$ 는 속력이다.

Rand<sup>(22)</sup>는 강한 비선형 계에서 nonsimilar 모우드 곡선을 간략화하여 Mathieu 식 (11)로 변환하므로써 P-stability 개념의 안정성을 해석할 수 있었다. 이 결과 L-unstable로 해석된 normal mode가 여기에서는 P-stable로 되었다. 이 방법은 아직도 많은 事例가 없었으며 앞으로 좋은 연구과제가 될 것으로 판단된다 특히 전산기로 normal mode를 찾아내고 모우드 곡선을 적절히 간략화하여 Mathieu 식으로 변환하는 프로그램이 아쉽다.

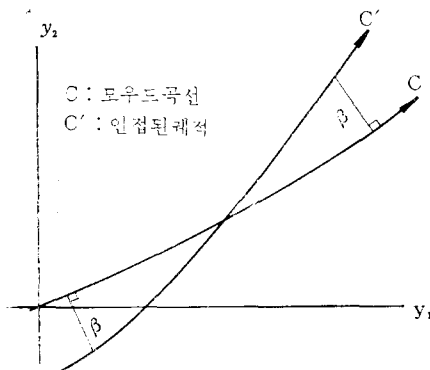


그림 6 교란된  $\beta(t)$ 의 크기 및 부호( $c'$ 가  $c$ 를 교차할 때 부호가 바뀐)

변분법을 활용하여 normal mode가 bifurcate되는 현상을 제한된 범위에서 규명하였으나<sup>(10)</sup>, 이 개념의 一般化와 3自由度 또는 그 이상의 계에 대하여 확대시킨 이론 정립이 아쉬운 설정이다. 또한 가장 흥미있는 課題는 normal mode와 이에 수반되는 安定性 變化에 관한 사항의 bifurcate라 생각된다.

참 고 문 헌

(1) Rosenberg, R.M., "On normal mode vibrations of systems with many degrees of

- freedom", Academic Press in Applied Mechanics, p.178~Vol. 19(1966).
- (2) Rosenberg, R.M. and Hsu, C.S., "On the geometry of normal vibrations of nonlinear systems having many degrees of freedom", Proc. IUTAM Sympo. on nonlinear Vibr. Ukrarian Academy of Sciences, Kiev. 1, 380~415(1963).
- (3) Nemytski and Stepanov, "Qualitative theory of diff." eqn., Princeton, (1960).
- (4) Cooke and Struble, "On the existence of periodic solutions and normal mode vibrations in nonlinear systems," Q. Appl. Math. 24, 177-193, (1966).
- (5) Pak, C.H. and Rosenberg, R.M., "On the existence of normal mode vibrations in nonlinear systems," Q. Appl. Math. 26, 324-335(1968).
- (6) Gordon, W.B., "A theorem on the existence of periodic solutions to Hamiltonian systems of convex potential", J. Diff. Eqn 10, 324-335(1971).
- (7) Weinstein, A., "Normal Modes for Nonlinear Hamiltonian Systems," Inv. Math. 20, 47-57(1973).
- (8) Anand, G.A., "Natural Modes of a coupled nonlinear systems," Int. J. Nonl. Mech. 7, 81-91(1972).
- (9) Yen, D.H., "On normal modes of nonlinear dual mass systems," Int. J. Nonl. Mech. 9, 45-53(1974).
- (10) Johnson, T.L. and Rand. R.H., "On the existence and bifurcation of minimal normal modes", Int. J. Nonl. Mech. 14, 1-12(1979).
- (11) Pecelli, G. and Thomas, E.S., "Normal modes, Uncoupling and stability for a class of nonlinear oscillators", Q. Appl. Math., 281-301(1979).
- (12) Stoker, J.J. "Nonlinear Vibrations, Interscience" (1950).
- (13) Minorsky, N., "Nonlinear Oscillations", Van Nostrand(1962).
- (14) Hagedorn, P., "Nonlinear Oscillations," Clarendon Press(1981)
- (15) Goldstein, H., "Classical Mechanics", Addison-Wesley(1980)
- (16) Meirovitch, L., "Methods of Analytical Dynamics", Mc Graw-Hill(1970).
- (17) Month L A. and Rand. R.H., "Applications of Poincaré Map to the stability of nonlinear normal modes", J. Appl. Mech. (ASME), vol. 47, 645-651(1980).
- (18) Abrahams and Marsedeu, "Foundation of Mechanics," Benjamin(1980).
- (19) Gustavson, F.G., "On constructing formal integrals of a Hamiltonian system near equilibrium point.", Astron. J. Vol. 71, No.8, 670-686(1966).
- (20) Synge, J.L. "On the geometry of dynamics," Phil. Trans. A226, 31-106(1926).
- (21) Whittaker, E.T., "A treatise on the analytical dynamics of particles and rigid bodies," Cambridge Univ. Press(1970).
- (22) Rand, R.H., "The geometrical stability of nonlinear normal modes in two degrees of freedom systems," Int. J. Nonlinear Mech. 8, 161-168(1973).
- (23) Bolza, O., "Lectures on the calculus of variations," Dover, (1904).
- (24) Bliss, G.A., "Lectures on the calculus of variations," Univ. Chicago Press(1963).
- (25) Lanzo, C., "The variational principles of mechanics", Univ. Toronto Press(1966).
- (26) Magnus, W. and Winkler, S. "Hill's equations", Dover(1979).
- (27) Hsu, C.S., "On a restricted class of Hill's equations and some applications", J. Appl. Mech. (ASME) 28, E. 4, 551-556(1961).
- (28) Nayfe, A.H. and Mook, D.T., "Nonlinear Oscillations", Wiley(1979).