◆ 講 座

복합수력학 문제의 효과적인 해석방법

李 振 鎬
<延世大學校 機械工學科>

1. 머리말

최근 들어 열 및 유체과학에서 점증적인 관심과 함께 활발히 연구가 진행되고 있는 분야중의 하나가 물리화학적 현상과 관련한 유체(특히 액체 상태)의 유동현상에 관한 연구이며 이 분야를 특별히 복합수력학(Physicochemical Hydrodynamics: PCH, 이하 PCH라 칭한다)이라 부르고 있다. PCH의 넓은 의미로는 물리화학적인 인자가 유체의 유동에 미치는 영향뿐 아니라 유체의 유동이 화학적 및 물리화학적 변화에 미치는 영향도 취급하는 제반 문제로써 인식되고 있다.

PCH에 대한 본격적인 관심의 출발은 1967년에 Levich에 의해 발간된 Physicochemical Hydrodynamics(Prentice Hall)란 책을 들수 있으며 그 이후 격증된 관심의 결과 1980년부터 International Journal, Physicochemical Hydrodynamics가 발간되어 오고 있다. 최근들어 이와같은 급격한 연구와 관심의 대상이 된 주된 이유로는 첨단기술의 효과적인 개발에 보다 철저하고 정확, 엄밀한 물리화학적인 현상의 규명이 필요함에 따라 관련 PCH에 대한 연구가 필수불가결해졌기 때문이다. 대표적인 예로써는 유체의 유동(특히 자연대류 현상)이 결정성장(crystal growth)에 미치는 영향에 관한 연구이며 그밖에 전해용액(electrolytic solution)에서의 입자의 유동, 모세관 현상에 의한 유체의 유동, 유체내의 기포 및 액적의 유동등에 관한 연구등 우리 주변에서 많은 예를 찾아볼수 있다.

PCH에 있어서의 유체의 유동은 관련된 물리, 화학적인 인자들 때문에 단일 유체에서의 경우보다 훨씬 복잡하고 이해하기 어려우며 때로는 예상밖의 새로운 현상들이 많이 일어나고 있다. 따라서 이와같이 새롭고 복잡한 현상들에 대한 이해에 있어서는 무엇보다도 그 효과적인 해석방법이 절실히 요구되고 있다.

종래에 있어서의 문제의 해결은 주로 귀납적인 방법에 의해 이루어 졌다. 이는 종래의 문제가 비교적 단순한 실제문제로써 즉각적인 해답을 요구하였으므로 귀납적인 방법에 의한 문제해결이 상당히 효과적이었기 때문이다.

그러나 근간에 들어 훨씬 복잡해지고 또 미경험의 새로운 현상들의 문제를 다루는 데 있어서 그와같은 방법으로는 그 효과가 지극히 저하되고 있다. 이는 귀납적 방법에 의한 문제의 해결은 해석자가 그 자신의 직관과 경험을 토대로 하여 무엇보다도 수학적 취급의 가능성을 전제하여 실제와는 동떨어진 이상적인 모델을 선정하는 경우가 많아서 실제적으로 많은 중요한 현상들이 쉽게 간과(看過)되어 버리기 때문이다. 따라서 현재의 난해하고 미지의 새로운 현상들을 효과적으로 규명, 이해하기 위해서 합리적이며 보다 일반적이고 기본적인 접근방법이 절실히 요구되어 왔으며 그동안 많은 연구가들에 의해 여러가지 방법이 시도되어 왔다. 이들 방법중에서 현재 매우 성공적으로 수행되고 있는 방법은 주어진 문제에 관련된 현상들을 기술할 수 있는 가장 일

반적인 방정식에 그 경계조건과 함께 차원해석을 가하여 고려대상의 실제문제에 접근, 응용해결하는 일종의 연역적(演繹的)인 해석방법이다. 이 연역적 해석방법에서 차원해석은 단순한 대수적인 절차에 의해서가 아니고 실제 문제를 정확히 시뮬레이션하기 위해 주어진 문제의 물리현상에 대한 깊은 통찰력과 이해가 극히 요구된다.

연역적 방법으로 성립된 이론이나 해석들은 일반적인 가정에 의한 것과는 다르다. 왜냐하면 이 해석방법은 필수적으로 그 정당성이 이미 입증된 가장 일반적인 법칙(방정식)에서 출발하기 때문이다. 또한 이론적 해석을 위한 방정식의 단순화도 공식적인 수학적 방법이나 분명한 물리적인 가정 혹은 양자 모두에 의해 행해진다. 그러므로써 주어진 문제에 어떤 항들이 보지되어 있고 어떤 물리적 특성들이 무슨 근거에 의해 무시되었는 가를 상세히 알 수 있다. 그리고 이와 같은 해석방법에 의한 결과는 실제 문제가 어떤 조건 및 가정하에서 근사적으로 취급되었는가가 충분히 평가되므로 상당히 의미가 있으며 유용하다.

연역적인 방법의 한계는 그 방법의 성공 여부가 주어진 동류의 문제들에 관련된 모든 현상들을 기술하는 기본적이고 일반적인 방정식의 존재 및 타당성 여부에 달려있다는 것이다. 그러나 일반적인 방정식이 반드시 수학적으로 그 해가 구해져야 할 필요는 없다.

본 강좌에서는 이 연역적 해석방법의 핵심적인 부분을 몇개의 참고문헌[1~3]을 기초로 기술하고자 한다.

2. 연역적 해석방법

연역적 해석방법의 첫 단계는 주어진 문제의 일반 방정식들과 경계 및 초기조건들을 단위 크기를 무차원화(unit-order nondimensionalization or normalization)하는 것이다. 단위 크기 무차원화는 무차원화를 할 때 주어진 일반 방정식들과 조건들에 관련된 변수들을 단위 크기(unit order)를 갖도록 무차원화 하는 것을 의미한다. 이 단계가 가장 중요한 단계이며 이는 결코 Buckingham π theorem의 적용과 같은 자동적인 절차가 아니다. 단위 크기로 무차원화 하기 위해서는 무엇보다도 관련 변수들이나 그들의 도함수를 단위 크기로 무차원화 시키기 위한 적절한 대표양(characteristic quantity)과 대표길이(characteristic length)를 찾아야 하며 이를 위해서 모든 가능한 물리적 지식과 경험 및 직관을 이용하여야 한다.

단위크기 무차원화를 행하면 중요한 무차원 매개변수(dimensionless parameter)들이 방정식내의 단위 크기로 무차원화된 각 항들의 계수로써 나타난다. 이 계수들은 관심의 정도에 따라서 평가되며 그들은 방정식 내에서 여러 항들의 상대적인 중요성을 나타낸다. 그리고 그 단위 크기 항들 자체가 물리적 의미를 지니고 있으므로 이변수들의 크기로써 주어진 문제에서 어떤 물리적 측면이 중요한가가 즉시로 분명해 진다. 또한 무차원 매개변수들은 공식적인 수학적 단순화 방법을 제시하고 있으므로 주어진 해가 실제적인 경우를 합리적으로 근사화할 수 있는 조건과 그 근사의 정도를 나타낼 수 있는 정량적인 기준이 그 물리적 의미와 함께 얻어진다.

무차원 매개변수들은 문제의 이론적 해석에서 가치가 있을뿐 아니라 관심의 대상이 되는 물리적 현상이나 실제크기의 장치들을 실험실에서 시뮬레이션할 때나 실험에서 관련 변수들의 변화 영역을 충당하는 데 필요한 실험의 수를 최소화 할 때, 그리고 실험 데이타의 상호관계를 나타내는 데 필수적이다. 따라서 무차원 매개변수들은 해석적인 모델에서와 마찬가지로 실험적인 모델 및 조건을 적절히 선정하는 데도 지극히 중요하다.

3. 실제 해석예

위의 간략한 정성적인 기술만으로는 연역적 해석방법에 관한 모든 측면을 분명히 다 나타내기는 어려우므로 여기서 최근 Dr. Ostrach에 의해 체계화된 두가지 경우[2,3,4] 즉, 온도 및 농도의 구배(gradient)에 의한 body force차로 인해 일어나는 자연대류 흐름과 표면장력(surface tension)의 변화에 의해 일어나는 흐름에 대한

해석방법을 소개함으로써 그 이해를 돕고자 한다.

3.1. Natural Convection with Combined Driving Forces

농도 및 온도차에 의한 자연대류 흐름은 질량, 운동량, 에너지 및 성분물질(species)의 보존을 표현하는 다음의 기본방정식에 의해 설명된다.

$$\frac{\partial U_j}{\partial X_j}=0, \tag{1}$$

$$\rho U_j\frac{\partial U_i}{\partial X_j}=\mu\frac{\partial^2 U_i}{\partial X_j\partial X_j}+(\rho_\infty-\rho)g_i-\frac{\partial P_D}{\partial X_i}, \tag{2}$$

$$\rho c_p U_j\frac{\partial T}{\partial X_j}=\kappa\frac{\partial^2 T}{\partial X_j\partial X_j}, \tag{3}$$

$$U_j\frac{\partial C}{\partial X_j}=D\frac{\partial^2 C}{\partial X_j\partial X_j}, \tag{4}$$

여기서 U_j는 X_j방향 속도성분을, ρ와 ρ_∞는 흐름 내에서와 대표위치(reference location)에서의 질량밀도를 각각 나타내며 μ는 점성계수, g_i는 i방향의 body force성분의 음의 값을, p_D는 $p-p_\infty$로 정의되는 압력을, c_p는 정압비열, T는 온도를, D는 확산계수를 그리고 C는 농도를 각각 나타낸다. 윗 방정식 (1)~(4)는 본 강좌의 용이함을 위해 몇몇개의 가정을 포함하고 있다. 즉, 밀도의 변화는 부력항에서만 고려된다(Boussinesq Approximation). 이는 $\beta(T-T_\infty)\ll 1$일때 정당화되며[5] 여기서 β는 체팽창계수로써 $\beta=-\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial\rho}{\partial T}\right)_{P,C}$로 정의된다. 그리고 압력일(pressure work), 점성확산(viscous dissipation), soret(thermal diffusion) 및 defour (diffusion thermal)영향은 무시되었다.

$(\rho_\infty-\rho)$를 p, T 및 C에 대해 직렬(series)로 확장(expansion)시키면 $\beta(T-T_\infty)\ll 1$, $\bar\beta(c-c_\infty)\ll 1$일때 압력의 영향은 무시되므로 단지 T및 C에 관한 1차항들만 남기면 된다[5]. 여기서 $\bar\beta$는 $\bar\beta=-\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial\rho}{\partial C}\right)_{T,P}$로 정의된다. 그 직렬을 방정식 (2)의 부력항에 대입하면

$$U_j\frac{\partial U_i}{\partial X_j}=\nu\frac{\partial^2 U_i}{\partial X_j\partial X_j}+\beta g_i(T-T_\infty)+\bar\beta g_i(C-C_\infty)-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P_D}{\partial X_i} \tag{2a}$$

방정식 (2)~(4)의 변수들을 다음의 정의에 의해 단위 크기 무차원화 한다.

$$u_i=U_i/U_R,\ x_i=X_i/L,\ \theta=(T-T_\infty)/(T_w-T_\infty), \tag{5}$$
$$\phi=(C-C_\infty)/(C_w-C_\infty),\ p=P/\rho U_R^2,$$

여기서 U_R는 미결정의 대표속도(characteristic velocity)로써 속도변수를 적절히 단위 크기로 무차원화 하기 위해 주어진 물리적 상황에 따라 결정되는 양이다. L은 대표길이를 표시하며 역시 주어진 상황에 따라 기하학적 길이 단위(length scale) 혹은 다른 물리적 양의 길이 단위가 될 수 있다. 하첨자 w와 ∞는 2개의 다른 대표값(reference values)을 표시한다. 정의 (5)에 의해 무차원화된 방정식은

$$u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}=\frac{\nu}{U_RL}\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j\partial x_j}+\frac{g_iL\beta\Delta T}{U_R^2}(\theta+N\phi)-\frac{\partial p_D}{\partial x_i}, \tag{6}$$

$$u_j\frac{\partial\theta}{\partial x_j}=\frac{\alpha}{U_RL}\frac{\partial^2\theta}{\partial x_j\partial x_j}, \tag{7}$$

$$u_j\frac{\partial\phi}{\partial x_j}=\frac{D}{U_RL}\frac{\partial^2\phi}{\partial x_j\partial x_j}, \tag{8}$$

여기서 $\Delta T=T_w-T_\infty$, $\Delta C=C_w-C_\infty$, α는 열확산계수 그리고 N은 농도에 의한 부력과 온도에 의한 부력의 비를 나타내며

$$N\equiv\bar\beta\Delta C/\beta\Delta T \tag{9}$$

로 표시된다.

매개변수 N는 넓은 범위의 값을 가질수 있으며 양의 값일 때는 농도 및 온도에 의한 부력은 상호 증가시키며 음의 값일 때는 농도에 의한 부력과 온도에 의한 부력은 서로 상반된다. 방정식 (6)~(8)의 오른쪽 편의 첫 항의 인자(factor)로써 표시된 계수들은 각각 레이놀즈수의 역수, 레이놀즈수와 프란틀수의 곱(페크렛수)의 역수, 그리고 슈밋트수와 레이놀즈수의 곱의 역수로 간주될 수 있다.

대표속도 U_R을 결정하기 위해서는 주어진 문제에 관련된 물리적 항들 중에 가장 영향력을 끼치는 항이 무엇인가를 알아야 하며 이는 그들 항의 앞에 붙은 계수 즉 무차원수들로 결정된다.

여기서 유체의 흐름이 주로 온도차의 영향에 의해 야기된다고 간주하면 즉 $N \ll 1$ 일때 표 1은 남은 무차원수들의 모든 가능한 조합을 나타내고 있다. 표 1에서 부호 S는 무차원수가 1보다 작은 경우, U는 1정도의 크기, 그리고 L은

표 1 무차원 변수값의 크기에 따른 정성적인 흐름 특성

경우	Re	Pr	Pe	흐름 특성
1	S	S	S	부력과 점성력우세, 관성력무시
2	S	U	S	부력과 점성력우세, 관성력무시
3	S	L	U	부력과 점성력우세, 관성력무시
4	S	L	L	열경계층 존재
5	U	S	S	모든 힘이 같은 크기의 정도
6	U	U	U	모든 힘이 같은 크기의 정도
7	U	L	L	열경계층 존재
8	L	S	S	속도 경계층 존재
9	L	S	L	열 및 속도경계층 존재
10	L	U	L	열 및 속도경계층 존재
11	L	L	L	열 및 속도경계층 존재

1보다 큰 경우를 표시하며 마지막 난은 각각의 경우에 가장 영향력을 끼치는 힘 혹은 흐름의 다른 정성적인 특성을 표시하고 있다. 주어진 문제에서 부력이 언제나 흐름을 유발하는 힘이라는 것을 생각할 때 1～3의 경우에서는 점성력이 가장 영향력을 끼치는 항이 되므로 방정식 (6)에서 점성력항과 부력항의 계수를 같은 크기로 놓으면

$$U_R=\beta g\Delta TL^2/\nu=Gr(\nu/L), \tag{10}$$

이 얻어진다. 여기서 Gr는 그라숖수로써 $Gr=\beta g\Delta TL^3/\nu^2$로 정의된다. 식 (10)을 방정식 (6)～(8)에 대입하면

$$u_i\frac{\partial u_i}{\partial x_j}=\frac{1}{Gr}\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i\partial x_j}+\frac{1}{Gr}(\theta+N\phi)-\frac{\partial P_D}{\partial x_i} \tag{11}$$

$$u_i\frac{\partial\theta}{\partial x_j}=\frac{1}{PrGr}\frac{\partial^2\theta}{\partial x_j\partial x_j} \tag{12}$$

$$u_i\frac{\partial\theta}{\partial x_j}=\frac{1}{GrS_c}\frac{\partial^2\phi}{\partial x_j\partial x_j} \tag{13}$$

식 (11), (12)에서 대표속도 (10)은 $Gr\le 1$, $Ra\le 1(Ra=PrGr)$의 조건하에서 합리적으로 사용될 수 있음을 알 수 있다.

표 1에서 4, 7, 9～11의 경우에는 에너지 방정식 (7)에서 오른편 전도 열전달항의 계수가 1보다 적게 된다. 이와같이 고차 도함수의 항의 계수가 1보다 적은 경우를 singular problem이라고 하며 이때에는 열경계층이 존재한다. 열경계층이 존재하면 부력이 작용하는 영역이 이 열경계층 내에서이므로 열경계층의 두께, δ_t가 대표길이가 되어야 한다. 그리고 열경계층의 두께는 열경계층 내에서의 관련 물리적 항들의 균형을 취함으로써 얻어진다. 열경계층의 두께를 구하기 위해서는 우선 좌표변수(이차원 이상 흐름에서는 열경계층의 두께방향 성분)를 아직 결정되지 않은 열경계층 두께 δ_t로써 단위 크기 무차원화 한다. 이를 위해서는 연속식을 고려할 때 다음과 같은 좌표 및 속도성분의 stretching이 필요하다[6].

$$\tilde{x}_j=\varepsilon x_j \tag{14}$$

$$\tilde{u}_j=\varepsilon u_j \tag{15}$$

여기서 j는 열경계층 두께방향 성분을 표시하며 ε는 적은 매개변수로써

$$\varepsilon\sim\frac{\delta_t}{L} \tag{16}$$

의 크기로 정의된다.

식 (14), (15)를 방정식 (6), (7)에 대입하면

$$\tilde{u}_j\frac{\partial u_i}{\partial\tilde{x}_j}=\frac{1}{\varepsilon^2}\frac{\nu}{U_RL}\frac{\partial^2 u_i}{\partial\tilde{x}_j\partial\tilde{x}_j}+\frac{\beta g\Delta TL}{U_R^2}(\theta+N\phi)-\frac{\partial p_D}{\partial x_i} \tag{17}$$

$$\tilde{u}_j\frac{\partial T}{\partial\tilde{x}_j}=\frac{1}{\varepsilon^2}\frac{\alpha}{U_RL}\frac{\partial^2 T}{\partial\tilde{x}_j\partial\tilde{x}_j} \tag{18}$$

여기서 대표속도 U_R을 구하기 위해서는 Pr의 크기를 고려해야 한다. Pr이 1보다 적을 때는 열경계층 내에서 점성력보다 관성력이 우세하다. 또한 이 열경계층 내에서 전도열전달항과 대류열전달항이 같은 크기가 되므로 식 (17), (18)에서 관성력항 및 부력항과 전도 열전달항 및 대류 열전달항을 같은 크기로 두면

$$U_R=(\beta g\Delta TL)^{1/2}=(Gr)^{1/2}\nu/L \tag{19}$$

$$\varepsilon=\frac{1}{(PrRa)^{1/4}} \tag{20}$$

그리고 $$\delta_t\sim\frac{L}{(PrRa)^{1/4}} \tag{21}$$

로써 주어진다. Pr이 큰 경우는 열경계층 내에

서 점성력이 관성력에 비해 우세하므로 식 (17), (18)에서 점성력 및 부력항과 그리고 전도 열전달 및 대류 열전달항을 같은 크기로 놓으면

$$U_R = \left(\frac{\beta g \Delta TL}{Pr}\right)^{1/2} = \left(\frac{Gr}{Pr}\right)^{1/2} \nu/L \tag{22}$$

$$\varepsilon = \frac{1}{Ra^{1/4}} \tag{23}$$

그리고 $\delta \sim \dfrac{L}{(Ra)^{1/4}}$ (24)

로 주어진다. 식 (19) 및 (22)의 대표속도를 방정식 (7)에 대입하면 대표속도 (19)는 $Pr\sqrt{Gr} \gg 1$, $Pr < 1$ 인 조건하에서, 대표속도 (22)는 $\sqrt{Ra} \gg 1$, $Pr \geq 1$ 인 조건하에서 합리적으로 사용될 수 있음을 알 수 있다.

표 1 에서 8의 경우는 속도경계층만 존재하며 $Pr<1$ 이므로 부력항과 관성력항의 밸런스가 바람직 하다. 그리고 5, 6의 경우와 같이 모든 항들이 다 같은 크기의 정도일때는 식 (10) 혹은 (19) 어느 경우든 같이 사용될 수 있다.

흐름이 농도차에 의해 주로 야기되는 경우에는 즉, $N \gg 1$ 인 때는 그라쇼수의 정의에서 $\beta \Delta T$가 $\beta \Delta C$로 대체 되어야 한다. 온도 및 농도차에 의한 부력의 영향이 같은 크기일때 즉 $N \approx 1$ 일 때는 $\beta \Delta T$는 $\dfrac{\Delta \rho}{\rho}$로 대체되어야 한다. 어느 경우이든 온도 및 농도차에 의한 흐름의 기술에는 기본적인 4개의 무차원수 즉 그라쇼수, 프란틀수, 슈밋트수, 그리고 부력비 N가 필요하다. 온도 혹은 농도 중 어느 하나에 의한 흐름에는 2개의 기본 무차원수가 필요한데 비해, 이 점이 이와같은 문제에 관련된 어려움의 다른 한 면이다. 또한 여기서는 3개의 서로 다른 경계층 즉, 속도, 온도 및 농도에 의한 경계층이 존재할 수 있으며 그들의 상대크기는 Pr 및 Sc의 상대크기에 의해 결정된다.

3.2. Convection Due to Surface-Tension Gradients

두개의 서로 다른 상태의 유체가 인접하고 있을때 그 인접면에서 장력의 변화가 일어나면 각 유체의 유동은 이 인접면의 장력의 변화에 의해 영향을 받는다. 표면장력은 온도, 농도 및 전기포텐셜등에 의존하므로 이들의 변화는 바로 표면장력의 변화를 가져온다. 여기서는 표면장력의 변화가 온도만의 변화에 의해 야기된다고 보고 그로 인한 유체의 흐름을 그림 1과 같은 이차원 직각 용기 내에서 고려하기로 한다.

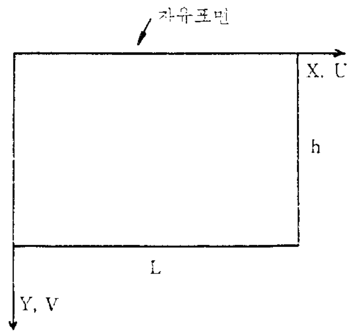

그림 1 개략도

앞에서 주어진 기본 방정식 (1)~(3)을 이차원 흐름에 적용하여 다음의 정의에 의해 단위크기를 무차원화 한다.

$$x=X/L,\ y=Y/h,\ u=U/U_R,\ v=V/[U_R \cdot (h/L)],\ p=\frac{P}{\rho U_R^2},\ \tau=\frac{T-T_C}{T_w-T_C} \tag{25}$$

여기서 T_w와 T_C는 각각 용기의 가열 벽면과 냉각 벽면의 온도를, U와 V는 각 방향의 속도성분을 나타낸다. 무차원화된 기본 방정식은 다음과 같다.

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0 \tag{26}$$

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{ReA^2}\left(A^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)-\frac{\partial p}{\partial x} \tag{27}$$

$$u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{1}{ReA^2}\left(A^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)-\frac{Gr}{Re^2A}\tau-\frac{1}{A^2}\frac{\partial p}{\partial y} \tag{28}$$

$$u\frac{\partial \tau}{\partial x}+v\frac{\partial \tau}{\partial y}=\frac{1}{PrReA^2}\cdot$$

$$\left(A^2\frac{\partial^2\tau}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\tau}{\partial y^2}\right) \qquad (29)$$

여기서 A는 종횡비(aspect ratio)로써 $A=\frac{h}{L}$로 정의된다.

용기 내에서의 유체의 유동은 자유표면에서 온도차로 인한 표면장력의 변화로 생기는 전단응력에 의해 일어나므로 대표속도 U_R는 접선방향으로의 힘의 균형으로 부터 얻어진다. 그림 1에서 자유표면이 수평하다고 볼 때 힘의 균형은

$$-\mu\frac{\partial U}{\partial Y}=\frac{\partial\sigma}{\partial X}=\frac{\partial\sigma}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial X} \qquad (30)$$

여기서 σ는 표면장력을 나타낸다. 만약에 $ReA^2\ll1$이면 식 (27), (28)에서 관성력의 영향은 무시되고 흐름은 점성의 영향이 큰 고점성류(highly viscous flow)가 될 것이다. 이때에는 표면장력의 영향이 유체의 점성에 의해 용기 밑바닥까지 전달될 것이며 따라서 Y방향의 적절한 대표길이는 h가 될 것이다. 따라서 식 (30)을 무차원화 하면

$$-\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{(\partial\sigma/\partial T)\Delta Th}{\mu U_R L}\frac{\partial\tau}{\partial x} \qquad (31)$$

양쪽이 같은 크기의 정도임을 고려하면,

$$U_R=\frac{|\partial\sigma/\partial T|\Delta T}{\mu}\frac{h}{L} \qquad (32)$$

여기서 $\Delta T=T_w-T_c$이다. 식 (32)를 $ReA^2\ll1$의 조건에 대입하면 실제 흐름이 고점성류가 될 조건은

$$\frac{h}{L}\ll\left(\frac{\mu\nu}{(\partial\sigma/\partial T)\Delta Th}\right)^{1/2}\equiv(R_\sigma)^{-1/2} \quad (33)$$

여기서 R_σ는 표면장력 레이놀즈수(surface-tension Reynolds number)를 나타낸다.

만약에 $ReA^2\gg1$이면 자유표면에서 경계층 흐름이 나타날 것이며 거기서 점성력과 관성력이 같은 크기의 정도가 되어야 한다. 이때는 경계층 두께, δ가 적절한 대표길이가 되며 Y좌표의 stretching에 의해 다음과 같이 주어진다.

$$\frac{\delta}{h}=\frac{1}{ARe^{1/2}} \qquad (34)$$

자유표면에서 관련 힘의 균형을 취하고 식 (33)을 이용하면

$$U_R=\frac{|\partial\sigma/\partial T|\Delta T}{\mu}\frac{\delta}{L}$$

$$=\frac{|\partial\sigma/\partial T|\Delta T}{\mu}\left(\frac{\nu}{U_R L}\right)^{1/2} \qquad (35)$$

따라서

$$U_R=\left[\frac{(\partial\sigma/\partial T)^2\Delta T^2\nu}{\mu^2 L}\right]^{1/3} \qquad (36)$$

그리고 경계층 흐름이 나타나는 조건은

$$\frac{h}{L}\gg(R_\sigma)^{1/2} \qquad (37)$$

주어진 대표속도를 사용하면 단위 크기 무차원화된 방정식은 다음과 같이 주어진다.

(가) 고점성류인 경우($R_\sigma A^2\ll1$)

$$0=A^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{\partial p}{\partial y} \qquad (38)$$

$$0=A_2\frac{\partial^2\nu}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\nu}{\partial y^2}+\frac{GrA}{R_\sigma}\tau-A^{-2}\frac{\partial p}{\partial y} \qquad (39)$$

$$MaA^2\left(u\frac{\partial\tau}{\partial x}+\nu\frac{\partial\tau}{\partial y}\right)=A^2\frac{\partial^2\tau}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\tau}{\partial^2 y} \qquad (40)$$

여기서 고점성류이기 때문에 적절한 대표압력으로 $\mu U_R L/h^2$이 대신 사용 되었다.

(나) 경계층 흐름인 경우($R_\sigma A^2\gg1$)

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+\nu\frac{\partial u}{\partial y}=\left(\frac{A}{R_\sigma}\right)^{2/3}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{\partial p}{\partial x} \quad (41)$$

$$u\frac{\partial\nu}{\partial x}+\nu\frac{\partial\nu}{\partial y}=\left(\frac{A}{R}\right)^{2/3}\frac{\partial^2\nu}{\partial^2 x}+\frac{\partial^2\nu}{\partial y^2}+\frac{GrA}{\sigma}$$

$$\tau-\left(\frac{R_\sigma}{A}\right)^{2/3}\frac{\partial p}{\partial y} \qquad (42)$$

$$u\frac{\partial\tau}{\partial x}+\nu\frac{\partial\tau}{\partial y}=\frac{1}{Pr}\left[\left(\frac{A}{R_\sigma}\right)^{2/3}\frac{\partial^2\tau}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\tau}{\partial y^2}\right] \quad (43)$$

여기서 Ma는 마란고니(Marangoni)수로써 PrR_σ로 주어지는 일종의 수정 페크릿수 이다.

이상과 같은 해석에서 온도차로 인한 표면장력의 변화에 의한 흐름에서 R_σ와 Ma가 기본 무차원수로써 적절한 대표속도는 각 경우에 식 (32) 및 (36)으로 주어짐을 알 수 있다. 그러나 실제 많은 논문에서 대표속도로써 $U_R=\nu/L$를 사용하며 그 결과 Gr이 부력항의 계수로 그리고 $1/Pr$이 전도 열전달항의 계수로 표시되고 있다. 또한 여기서는 자유표면이 수평하다고 할때 경계조건에서는 아무런 무차원수가 나타나지 않지만 다른 해석에서는 R_σ가 인접면에서의 표면장력 변화항의 계수로 표시되기 때문에 이 R_σ 값이 극대화 될때 실제와는 다른 부정확한 경계조

건을 가지게 된다. 이와같은 사실은 일반적 무차원화와 단위크기 무차원화와의 차이가 어느 정도인가를 잘 나타내어 주고 있다.

4. 수치해석에 있어서의 무차원화

본 강좌를 마치기에 앞서 수치해석에 있어서의 변수의 무차원화에 관해 약간의 언급을 하고자 한다.

일반적으로 어떤 주어진 문제에 있어서의 수치해석의 결과가 여러 연구자에 의해 주어졌을 때 한 연구자와 다른 연구자의 결과를 서로 비교하기가 어렵다. 그 이유는 기본 방정식의 무차원화에 있어서 각기 임의대로 관련 변수의 대표량(특히 대표속도)을 잡았기 때문이다. 그러나 각 대표양은 그 자체가 특별한 물리적인 의미 및 암시를 가지고 있다는 것에 주지하여야 한다. 또한 각기 다른 대표량에 의해 무차원화된 기본 방정식의 각 물리적 항에는 서로 다른 계수로써의 무차원수가 나타난다. 따라서 서로 다른 대표량을 사용함으로써 동일한 문제에 대해 서로 다른 계수의 대수식(algebraic equation)을 가지고 결과를 얻게되는 것이다. 여기서 그 실례로써 앞에서 주어진 기본 방정식 (1)~(3)에서 온도차 만에 의한 자연대류 현상을 고려할때 서로 다른 대표속도를 사용함으로써 얻어지는 무차원 운동량 및 에너지 방정식을 살펴 보자.

(i) $U_R=\nu/L$

이 대표속도는 길이 L의 영역에서 관성력항과 점성력항이 서로 같은 크기의 정도를 가지는 것을 의미한다.

(관성력)$=Gr$(부력)+(점성력)

(대류 열전달)$=(Pr)^{-1}$(전도 열전달)

(ii) $U_R=\alpha/L$

이는 길이 L의 영역에서 대류와 전도 열전달 항이 서로 같은 크기의 정도임을 나타낸다.

$(Pr)^{-1}$(관성력)$=Ra$(부력)+(점성력)

(대류 열전달)=(전도 열전달)

(iii) $U_R=(\alpha\nu)^{1/2}/L$

이는 (i), (ii)에서의 대표속도의 혼합임.

(관성력)$=Ra$(부력)$+(Pr)^{1/2}$(부력)

(대류 열전달)$=(Pr)^{-1/2}$(전도 열전달)

(iv) $U_R=\beta g\Delta TL^3/\nu$

이는 길이 L의 영역에서 부력과 점성력항이 서로 같은 크기의 정도임을 나타낸다.

Gr(관성력)=(부력)+(점성력)

(대류 열전달)$=(Pr)^{-1}$(전도 열전달)

위에서 무차원수로 표시된 각 항의 계수들은 대체로 1보다 큰 값을 가지므로 주어진 문제에서 서로 다른 대표양을 사용할 때 무차원화된 동일 기본방정식의 각 항의 계수가 서로 다르게 됨을 명확히 볼 수 있다. 이는 상당한 수치해석상의 문제 및 착오를 유발시킬수 있다. 그러므로 무엇보다도 기본 방정식을 적절하게 단위크기 무차원화 하는게 중요하다. 이는 적정 mesh의 크기 선정에 있어서도 또한 중요하다. 주어진 문제를 푸는데 그 문제에 대한 사전지식이 없으면 일반적으로 대표길이로써 주어진 문제의 기하학적 길이를 택한다. 그러나 경계층 흐름이나 주흐름 내에서의 이차원 흐름(secondary flow)등에서의 적정 대표길이는 기하학적 길이단위(length scale)와는 다르므로 기하학적 대표길이를 기준으로 mesh 크기를 선정할 때 계산상의 착오를 일으키기 쉽다. 따라서 단위크기 무차원화를 통한 흐름의 정성적인 해석을 통해서 수치해를 더욱 빨리 그리고 경제적으로 가능케할 뿐 아니라 보다 섬세한 흐름의 구조도 전적으로 무시되지 않게 할 수 있다.

5. 맺 음 말

복합수력학문제를 효과적으로 해결하는 방법중의 하나로써 단위크기 무차원화를 통한 연역적 해석방법을 2가지 실례를 들어 서술하였다. 이와같은 해석방법은 결코 모든 문제에 있어서 전능의 절대확실한 방법은 아니다. 그러나 이 해석방법은 적어도 주어진 문제의 해결에 자명한 접근방법을 제공하며 또한 그와같은 해석을 통한 결과가 실제 어떤 조건하에서 이용될 수 있는가를 명백히 밝혀준다. 따라서 복합수력학 문제에서뿐 아니라 다른 영역의 난해하고 새로운 현상의 문제에 있어서도 단위크기 무차원화를 통

한 연역적 해석방법이 의미있고 유용한 결과를 가져다 줄 수 있을 것으로 생각된다.

참 고 문 헌

(1) Ostrach, S., "Role of Analysis in the Solution of Complex physical Problems", Proc. 3rd Int. Heat Transfer Conf. Vol. 6, pp. 32-43, 1966.

(2) Ostrach, S., "Motion Induced by Capillarity", In physicochemical Hydrodynamics: V.G. Levich Festschrift, Vol. 2, pp. 571-589. Advanced Publications, London, 1877.

(3) Ostrach, S., "Natural Convection with Combined Driving Forces", Physicochemical Hydrodynamics, Vol. 1, pp. 233-247, 1980.

(4) Ostrach, S., "Low-Gravity Fluid Flows", Ann Rev. Fluid Mech., Vol. 14, pp. 313-345, 1982.

(5) Ostrach, S., "Laminar Flows with Body Forces", In Theory of Laminar Flows; High Speed Aerodyramics and Jet Propulsion, F.K. Moore edit., Vol. 4, pp. 528-718, Princeton Univ. Press, 1964.

(6) Nayfeh, A., "Perturbation Methods", John Wiley and Sons, 1973.

(439 페이지에서 계속)

LDV 용 이송장치의 국내제작이 가능함을 확인할 수 있었다. 한편 LDV를 고정시켜 놓고 측정대상 유동장을 상대적으로 이송시키는 경우가 있는데 이는 측정 유동장이 매우 작은 경우 (예를들면 작은 직경의 노즐로 부터 분사되는 자유제트)에만 국한되는 방법으로 범용 이송장치를 사용할 수 있어 별 문제가 없다.

끝으로 LDV는 원리상 유동장내에 유체와 똑같이 행동하는 수 μm 정도의 매우 작은 입자들이 충분히 존재하여야 하는 데, 보통 입자발생기(particle-generater)를 사용하여 적절한 크기 입자농도 및 입자재료등을 선정하여야 하며, 이는 기본적인 사항이면서도 중요한 사항인 점을 명심해야 한다[6].

참 고 문 헌

(1) Robert J. Moffat, "The Thermocouple: Theory-Applications and Limitations" ISA, 1972.

(2) The Bell & Howell Co., Pressure Trandsducer Handbook, 1974.

(3) 이 동 호., "열선풍속계의 원리와 그 응용" 대한기계학회지 Vol. 21, No. 2, pp. 119～126, 1981.

(4) Bryan E. Richards, Measurement of Unsteady Fluid Dynamic Phenomena, Hemisphere Publishing Corp., 1977.

(5) Drust, F., and Zaré, M. "Removal of Pedestals and Directional Ambiguity of Optical Anemomer Signals. I-A Survey of Available Methods" J. of Appl. Opt. Vol. 13 pp. 2562～2579, 1974.

(6) Wolfgang Gregor, "Limite Imposed on the Concentration and Size of Tracer Particles in Laser-Doppler Anemometry" DISA Information, No. 22, Dec. pp. 39～41, 1977.